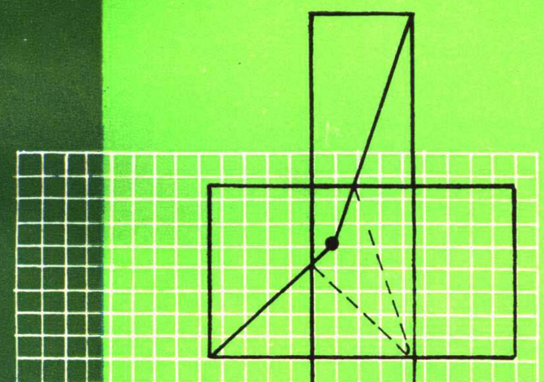
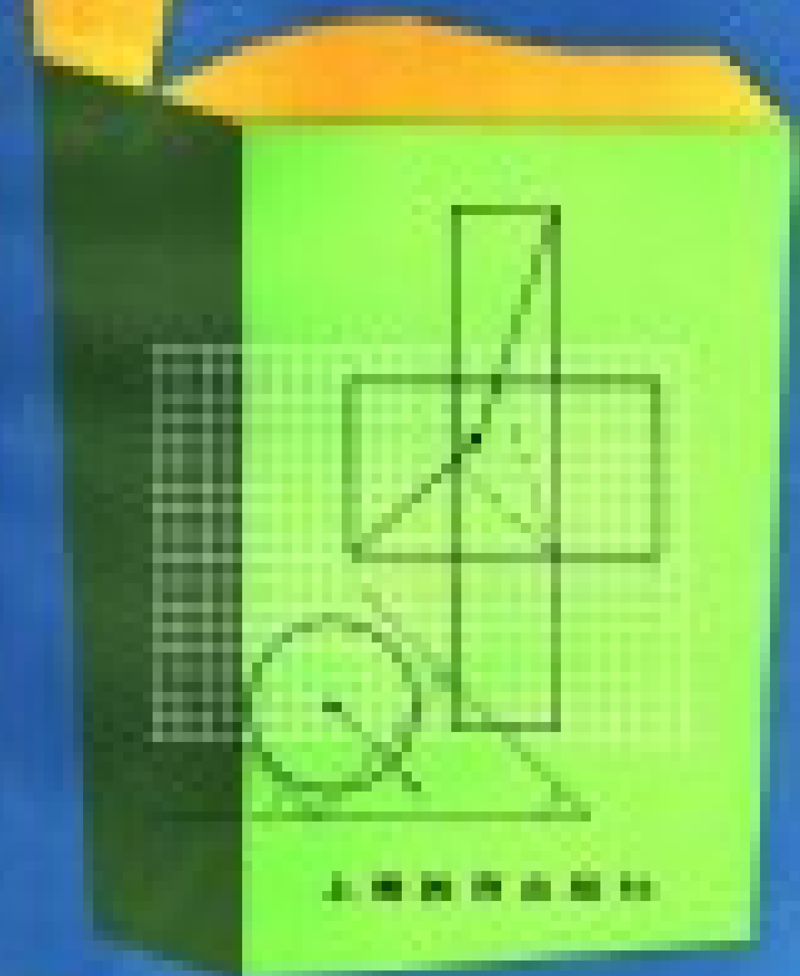
运动场上的数学



上海教育出版社

运动场上的数学



中学生文库

ZHONGXUESHENG WENKU

运动场上的数学

黄国勋　李炯生

上海教育出版社

责任编辑　谢　边
封面设计　范一辛

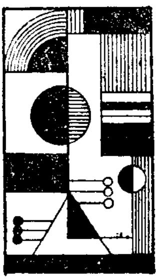
中学生文库　运动场上的数学
黄国勋　李炯生

上海教育出版社出版发行
(上海永福路 123 号)
各地新华书店经销　江苏海安印刷二厂印刷
开本 787×1092 1/32　印张 3.25　插页 2　字数 61,000
1989 年 5 月第 1 版　1989 年 5 月第 1 次印刷
印数 1—6,300本

ISBN 7-5320-0755-3/G·730　　定价：1.00 元

目　录

一、从起跑到冲刺 ……………………1
二、推铅球的最佳出手角……………10
三、投篮的抛物线方程………………18
四、跳高的起跳点……………………26
五、足球场上的射门与守门…………32
六、击球方向的选择…………………38
七、射门与射击的最佳机会…………45
八、运筹帷幄出奇制胜………………53
九、教练们的对策和决策……………61
十、怎样排出比赛程序表？…………69
十一、哪种比赛办法好？……………77
十二、射箭场上的最佳策略…………84
十三、谁是冠军？……………………94



一、从起跑到冲刺

生活里处处有数学，运动场上也不例外．比如在田径场的跑道上，从起跑到冲刺，就有不少数学问题．

1973年，数学家凯勒（T.B.Keller）曾用数学工具研究赛跑．谁都懂得，百米赛跑比的就是速度．速度是衡量短跑运动员技术水平的数量标志．凯勒通过大量观测、计算和研究，利用数学工具，搞出了一个"百米赛跑数学模型"．这种数学模型是百米赛跑时运动员的速度与路程之间的关系的一条曲线，即速度作为路程的函数的一条曲线．见图1-1，其中横坐标轴（s轴）表示路程，纵坐标轴（v轴）表示运动员的速度．图1-1中的曲线表示运动员从起跑到冲刺这个全过程的速度变化．曲线的开头一段，即运动员从起跑线跑到30米左右的运动过程，反映运动

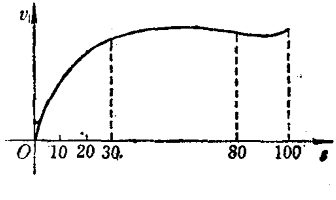


图 1-1

员起跑后逐渐加速直到接近最高跑速的情况．任何一个运

动员都不可能在起跑后立即达到最高跑速，而都需要经过一个由静到动，由慢到快的逐渐加速过程．所以曲线的左端从左到右单调上升．曲线中间一段，即运动员从30米左右跑到80米左右的运动过程，反映运动员途中跑的速度变化．在这一段赛程中，运动员都力求发挥出最高跑速，并且尽可能维持到最后．尽管速度可能有起伏，但波动不大，所以这段曲线略呈波浪形，升降平缓．曲线的右端，即运动员从80米左右到百米终点的运动过程，反映运动员的耐力和冲刺技术．由于运动员经过一段时间的全速赛跑，体力有所下降，速度稍为减慢，因而曲线略有下降．但是，在接近终点时，运动员发现终点就在眼前，抖擞精神，拚力冲刺，曲线终端就陡然上升．

这种百米赛跑数学模型有什么用处？如果你能请人帮个忙，在你百米赛跑时给你测量速度，比如每5米处测出速度，这样就可以得到20个数据：$(5, v_1)$，$(10, v_2)$，…，$(95, v_{19})$，$(100, v_{20})$，其中，坐标的第一个分量是路程，第二个分量 v_i 是速度．然后，把这些点描在 Osv 坐标平面上，并用一条光滑的曲线，把这些点及坐标原点 $(0, 0)$ 联结起来．这条曲线虽然比较粗糙，总可以反映出你在这次赛跑时速度与路程的关系．对于不同的运动员，这条曲线的形态不尽相同，但都类似于图1-1．有了这条速度与路程关系曲线，你就可以从中寻找出自己的弱点：或者起跑技术不够好；或者中途跑未能发挥出最高跑速；或者最高跑速持续时间太短；后劲不足；或者冲刺技术欠佳，等等，从而进行针

对性的训练，克服弱点，使技术更加全面.

起跑技术对于短跑运动员至关重要. 历史上曾有过各种各样的起跑方式，而现今最流行的是蹲踞式. 说来也十分有趣，据说，1887年左右，有一位美国人到澳大利亚旅行，澳大利亚的袋鼠闻名于世，这位美国人对袋鼠的起跑颇感兴趣. 他细心观察，颇有心得. 他注意到袋鼠在起跑之前，后腿弯屈，身体低俯，起跑时，腿往后猛蹬，向前跃起，势如箭发，迅速异常. 他从中得到启发，发明了“蹲踞式”起跑. 1888年，美国人首先在比赛中采用这种新的起跑姿势. 采用蹲踞式起跑，起跑时用力后蹬两腿，把身体“弹”出去，尽快摆脱静止状态，尽早获得高速度. 运动员为了双腿后蹬有力，就在起跑处挖坑刨穴，这就出现了起跑穴. 后来，起跑穴让起跑器代替了.

起跑器应当怎样放？起跑器的支板与地面应成多少度角？这似乎没有一致的答案，可以说是因人而异各取所好. 不过，你也许在200米或400米赛跑中见过这种“怪现象”，在弯道起跑时，有的运动员不是把起跑器安放在跑道的内沿，也不是放在跑道的正中，而是放在跑道的外沿. 明摆着，起跑器紧挨跑道外沿，这得多跑一段路，不是无事生事，净给自己添麻烦吗？

难道他们就这样傻？不，才不傻呢. 他们这样做，有数学头脑. 若是不信，不妨仔细想一想，认真算一算，就可以悟出其中的道理.

400米一圈的标准半圆式跑道，分直道和弯道两个部

分．弯道在田径场的两端，每端是一个半圆弧形．半圆的内半径等于36米，每条跑道的宽为1.25米左右．我们看看在第一条跑道(图1-2)的运动员．如果他把起跑器放在紧挨跑道内沿的地方，左脚与半圆圆心O的距离$OA=36$米；如果他把起跑器放在紧挨跑道外沿的地方，不妨设左脚与半圆的圆心O的距离$OB=36.9$米．起跑器放在外沿处，是为了在起跑后的疾跑阶段能够沿直线奔跑，较快地达到最高跑速，这就可以缩短速度--路程关系曲线的左端那一段，而增长曲线的中间那一段．如果起跑器安放在内沿处，起跑后马上得沿着半径为36米的圆周跑，力量必然分散在两处，既要往前疾跑又要克服离心力．因此，需要弄清楚的是，起跑器安放在外沿，起跑后可以跑多长的一段直线距离？这样起跑，全程增加了多少？这两笔账，一利一弊，一盈一亏．问题在于，总起来算，究竟划算不划算？

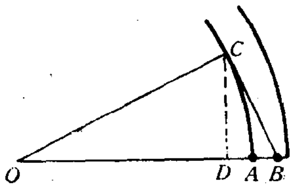


图 1-2

起跑器安放在外沿，起跑后是顺着与内半圆相切的切线BC方向向前直跑，如图1-2，直线BC与内半圆在点C相切．图中的OC是内半圆的半径．

先算算看，起跑后沿直线奔跑的长度是多少？这段直线距离是BC，它是直角三角形OBC的直角边，$\angle OCB$是直角．由勾股定理，有

$$BC^2=OB^2-OC^2,$$

因为 $OB=36.9$ 米，$OC=36$ 米，所以

$$BC=\sqrt{36.9^2-36^2}=8.1(\text{米}).$$

这即是说，起跑后可以沿直线奔跑 8.1 米左右．因为起跑后的头几步，步长较小，这 8.1 米大概需要跑 5 步．因此，如果把起跑器安放在外沿，可以在起跑后的开头 5 步沿直线跑，这有利于全力以赴，用于逐步增大步长和平稳地伸展躯干，较好地加快速度，较早地达到高速．

下面再算算看，这样起跑，多跑了多少路程？如果手上没有三角函数表，我们可以这样估算：在图 1-2 中，作 CD 垂直 OB，设 D 为垂足．于是有

$$\triangle BCD \backsim \triangle BOC,$$

所以对应边成比例，即

$$\frac{CD}{OC}=\frac{BC}{OB},$$

其中 $OC=36$，$OB=36.9$，$BC=8.1$，因而

$$CD=\frac{8.1\times 36}{36.9}=7.9(\text{米}).$$

所以多跑的路程 $BC-\overset{\frown}{AC}$ 满足

$$BC-\overset{\frown}{AC}<BC-CD=0.2(\text{米}),$$

即多跑的路程不足 0.2 米．

上面是粗略的估算．如果手上有三角函数表，就可以算出比较准确的数值．圆弧 $\overset{\frown}{AC}$ 的长可以借助三角函数表求出近似值．因为

$$\operatorname{tg}\angle AOC=\frac{8.1}{36}=0.225,$$

查反正切函数表，可以得到

$$\angle AOC=12.68^{\circ}.$$

因为圆的半径为 36 米，所以

$$\widehat{AC}=\frac{12.68}{180}\times\pi\times36=7.97(\text{米}),$$

从而

$$BC-\widehat{AC}=8.1-7.97=0.13(\text{米}).$$

这就是说，多跑的路程大约只有 0.13 米.

前面的计算表明，如果把起跑器安放在跑道外沿处，全程只需多跑 0.13 米左右，但可以换取起跑后的一段 8 米长的直线疾跑，即 5 步左右的直线疾跑，这还是划算的. 0.13 米，说起来还不足一只脚掌之长呢.

1968 年 10 月在墨西哥举行第十九届夏季奥林匹克运动会，美国选手海因斯突破 10 秒大关，创造了 9″9 的男子百米赛跑的世界纪录，震惊世界体坛. 也是在这次运动会上，在男子 4×100 米接力比赛中，美国队以 38″2 的优异成绩打破世界纪录，夺得冠军. 4×100 米只花 38″2，平均每一百米所花的时间还不到 9″6 呢.

这似乎难以理解，四个人接力赛跑，平均每人跑 100 米所花的时间竟比破世界纪录的百米冠军跑 100 米所花的时间还要少，这岂不怪哉?!

说怪并不怪. 要解释这个问题，前面的百米赛跑数学模型可派上用场. 不过，还得先从接力赛跑的规则说起，按接力赛跑规则，第二、三、四棒接力时，都有一段长 20 米

的接力区，在接力区的前面还有一段长10米的预跑区．如第二棒接力时，离起点80米处至90米处这一段是预跑区，离起点90米处至110米处这一段是接力区．从前面的百米赛跑数学模型可以看到，百米赛跑起跑后，在20米处已经达到较高的跑速，而在30米处已经接近最高跑速．因为预跑区与接力区总长30米，所以，运动员接棒之后可以很快达到最高跑速，而不必象第一棒运动员还要经历一段长30米左右的起跑后的逐步加速阶段．因此，第二、三、四棒运动员的那一段100米的成绩，应当比他们各自在百米赛跑中的成绩要好得多．只要有过硬的传接棒技术，4×100米接力赛跑每百米平均所花的时间比百米赛跑冠军跑100米所花的时间少一些，就不足为怪，而且，对4×100米接力赛跑冠军队来说，还是理应如此．

提高接力赛跑的传接棒技术，对提高接力赛跑的成绩关系甚大．百米赛跑数学模型也可以用来分析传接棒的最佳时机．图1-3是第二棒接力时两名运动员的速度与路程关系曲线图．第一棒运动员跑过$s=80$米处后，速度可能开始减慢，而第二棒运动员从$s=80$米处预跑，在$s=100$至

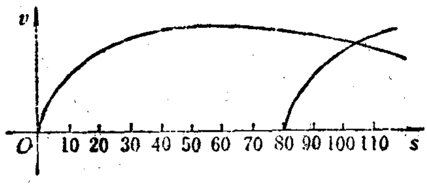


图 1-3

110 米那一段，已经可以跑出较快的速度，即取得较大的 v 值. 众所周知，两个以相同速度并排奔跑的人，他们之间宛如并排站在一起，容易彼此传递东西. 所以，如果第一棒与第二棒运动员能够在速度接近的时刻传接棒，而且这个速度尽可能接近第二棒运动员的最高跑速，那末，他们俩人就可以在飞奔的某一瞬间干净利落地完成传接棒动作，第二棒运动员可以很快地发挥出最高跑速. 从图 1-3 可以看出，这个理想的传接棒的瞬间，应当是第一棒、第二棒运动员的两条速度与路程关系曲线的交点. 为了在传接棒时保持较高的跑速，两条曲线交点的横坐标 s 最好落在100与 110 之间. 这样，传棒人在传棒之前不必有意放慢速度，而接棒人在接棒之后瞬即可以用最高跑速继续飞奔. 这样一棒传给一棒，最后一棒运动员用一个漂亮的撞线动作完成最后的冲刺，跑完全程.

许多跨栏运动员从起跑到冲刺的全过程中，都铭记住一条简单的口诀：起跑偶数步，栏间跑奇数步. 因为，两条腿都能娴熟自如地上栏，上栏技术都一样棒的跨栏运动员毕竟不多. 所以，对于大多数跨栏运动员来说，如果他起跑时把跨腿放在前起跑器上，并且在整个比赛过程中始终如一地遵照那条口诀，那末，他就可以用固定的、上栏技术较好的那条腿上栏，从而充分发挥自己的优势，取得更好的成绩. 这条口诀可以说是数学在跨栏运动场上的一个简单应用.

就是这么一个简单应用，却可以产生令人想象不到的

巨大效果. 美国著名选手摩西在男子400米跨栏比赛中数十次夺魁,并且在1983年以47″02的优异成绩四破世界纪录, 这与他能在全程中保持栏间跑13步(奇数步!)的硬功夫关系甚大. 因为,在田径场上与摩西争雄的运动员,有的13步功夫尚欠火候,未臻炉火纯青的境地,中途常在仓卒间改成14步, 既影响跨栏技术的发挥,也影响栏间跑的速度, 然而摩西却能象豹子那样狂奔猛跃, 连续飞越十座91厘米高的栏架,而且每35米的栏间距离都是恰好跑13步, 一步不差,如一股风似的,从栏架上一掠而过.

二、推铅球的最佳出手角

推铅球以远取胜．铅球推出的距离既和出手时的速度有关，也和出手角度有关．

大家知道，人类历史上第一个认识到在真空中斜抛物体的运动轨迹是一条抛物线的人，是二十五岁就当上数学教授的十七世纪意大利著名的数学家、物理学家、天文学家伽利略(G.Galileo)．他曾巧妙地证明了与传统的亚里斯多得(Aristotle)论断相悖的一条定律，即自由落体的运动距离与运动时间的平方成正比，而与落体的质量无关．具体地说，即有

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 s 是运动距离，t 是运动时间，而 g 是重力加速度．由此还可以知道，自由落体的运动速度 v 与运动时间 t 具有如下的关系：

$$v=gt.$$

利用伽利略的定律，可以推导出铅球推出的距离与出手速

度、出手角度等的关系.

铅球体积小,比重大,是形状匀称的球体,不妨把它看成一个质点. 在通常情况下,空气阻力对铅球的运动影响不大. 为计算简便,空气阻力可以忽略不计. 运动员推出铅球时的出手高度(即铅球离手时的位置至地面的垂直距离)记为 h, 出手速度(即铅球离手时的速度)记为 v, 出手角(即铅球离手时的运动方向与水平投影线之间的夹角)记为 α, 如图 2-1. 下面推导铅球推出的距离 s.

设 A 为出手点, O 为出手点 A 在地面上的垂足, C 为铅球的落地点. 以点 O 为坐标原点, 过点 O 与点 C 作 x 轴, 过点 O 与点 A 作 y 轴, 建立平面直角坐标系, 如图 2-1. 图中的曲线是铅球重心的运动轨迹, 不计空气阻力, 它是一条抛物线. 过点 A 作平行于 x 轴的直线, 它与抛物线的另一个交点记为 B. 过点 B 作 BD 垂直于 OC, 垂足记为 D. 于是, 铅球推出的距离 s 为

$$\begin{aligned} s &= OC = OD + DC \\ &= AB + DC. \end{aligned}$$

因为铅球的出手速度为 v, 出手角度为 α, 所以铅球出手时的水平分速度 v_x 与竖直分速度 v_y 应当满足

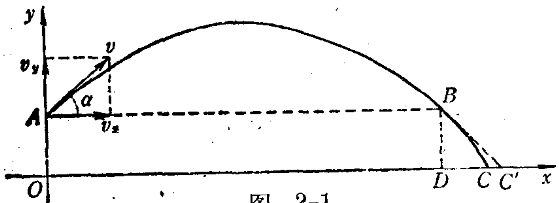


图 2-1

$$\frac{v_x}{v}=\cos\alpha,\qquad \frac{v_y}{v}=\sin\alpha,$$

即有 $v_x=v\cos\alpha$, $v_y=v\sin\alpha$. 设铅球出手后到达最高点(此时铅球的竖直速度为零)所需的时间为 t, 则有

$$v_y=gt,$$

因此
$$t=\frac{v\sin\alpha}{g}.$$

铅球出手后到达点 B 所需的时间是它到达最高点所需时间的二倍, 即为 $2t$. 由于不计空气阻力, 所以铅球的水平速度保持不变, 因此

$$AB=v_x\cdot 2t=v\cos\alpha\cdot\frac{2v\sin\alpha}{g}.$$

应用倍角公式 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$, 由上面得到

$$AB=\frac{v^2\sin 2\alpha}{g}.$$

再计算 DC. 因为推铅球时出手高度在 2 米上下, 而铅球推出的距离通常在十九、二十米左右, 所以和 OD (也即 AB)相比, DC 要小得多. 为计算方便, DC 取近似值. 在图 2-1 中, 设抛物线过点 B 的切线与 x 轴的交点为 C', 则 $DC\approx DC'$. 而

$$DC'=BD\operatorname{ctg}\alpha,$$

所以
$$DC\approx h\operatorname{ctg}\alpha.$$

于是, 我们得到铅球推出的距离 s 的近似计算公式:

$$s=\frac{v^2\sin 2\alpha}{g}+h\operatorname{ctg}\alpha. \tag{1}$$