1985年全国部分高等院校硕士研究生入学考试

高等数学

试题与解答

李远聆
…培
…阶
…良 编
…印 审

湖北科学技术出版社

1985年全国部分高等院校

硕士研究生入学考试

高等数学

试题与解答

李远聆 梁树培
余华阶 周学良 等编

周鸿印 审

湖北科学技术出版社

1985年全国部分高等院校
硕士研究生入学考试

高等数学试题与解答

李远聆 梁树培 余华阶 周学良等编 周鸿印审
湖北科学技术出版社出版 新华书店湖北发行所发行
武汉水运工程学院印刷厂印刷
787×1092毫米16开本 16印张 400,000字
1985年6月第1版 1985年6月第1次印刷
印数：1—9,100
统一书号：7304·7 定价：3.00元

前　言

本书汇集了分布在全国各地七十一所大专院校1985年工科硕士学位研究生入学考试高等数学试题及解答。其中有中国科学院、清华大学的试题，有上海交大、华中工学院、华南工学院、西安交大、浙江大学、南京工学院、哈尔滨工大等八院校的联合命题，等等。这些试题基本上反映了各类院校的专业特点和要求，有较大的参考意义和保留价值，可作为教学、学习和研究之用，特别可供准备报考硕士学位研究生的考生作为检验掌握《高等数学》程度的准绳。

考虑到考生的期望，每道试题都给出了评分标准，试题编排上尽量保留了原卷的风格。最后还附有试题索引，考生如果需要对某一内容加强训练，只需查索引，就能找到所对应的试题。

本书大部分解答由李远聆、梁树培、余华阶、周学良给出，全书由李远聆汇编。本书试题及部分解答多承兄弟院校提供，并蒙周鸿印副教授对全部解答作了仔细审校，特谨致谢。限于篇幅，部分资料未排印，敬希鉴谅。

由于时间仓促，纰漏和错误之处，恳请读者批评指正。

编　者

1985.4

目　录

一九八五年试题

上海交大　天津大学　华中工学院　华南工学院
西安交大　浙江大学　南京工学院　哈尔滨工大

（联合命题）

（Ⅰ）

一、（本题14分，每小题7分）

（1）　求 $\int x^{-3}\operatorname{arctg}x\,dx$；

（2）　设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x}, & x\geqslant 0,\\[2mm] \dfrac{1}{1+e^{x}}, & x<0.\end{cases}$$

求　$\int_0^2 f(x-1)dx$ 。

二、（本题8分）设$z=f(x,\ u,\ v)$，$u=2x+y$，$v=xy$，其中f具有二阶连续偏导数，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

三、（本题8分）计算$\iint\limits_D\sqrt{y}\,d\sigma$，其中区域D是由曲线$y=x$，$y=2x-x^2$所围成。

四、（本题8分）已知

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\int_{-\infty}^{c}te^{2t}dt，求c。$$

五、（本题12分）设

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{x^2}, & x\neq 0,\\[2mm] c, & x=0。\end{cases}$$

其中 $f(x)$具有连续导数，且$f'(x)>0$，$f(0)=0$。

（1）试确定c使$F(x)$连续；

（2）在（1）的结果下，问$F'(x)$是否连续？

六、（本题10分）试求在圆锥面$Rz=h\sqrt{x^2+y^2}$与平面$z=h$所围成的锥体内作出底面平行于xoy平面的最大长方体之体积（$R>0$，$h>0$）。

七、（本题10分）求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x-1)^n$的收敛域，并求其和。

八、（本题10分）计算曲线积分$\oint_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$，其中L是以点(1，0)为中心，R为半径的圆周（$R\neq 1$），方向取逆时针方向。

九、（本题12分）设

$$\varphi(x)=e^x-\int_0^x(x-u)\varphi(u)du$$

其中 $\varphi(x)$为连续函数，求$\varphi(x)$。

十、（本题 8 分）设

（1）$f(x)$在区间 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a)=f(b)=0$；

（2）$f(x)$在区间（a，b）内具有一阶导数$f'(x)$，且$f(x)$在点a处右导数

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0;$$

（3）$f(x)$在区间（a，b）内有二阶导数$f''(x)$。

求证：在区间（a，b）内至少存在一点c，使$f''(c)<0$。

（Ⅱ）

（包括线性代数）

一、（本题14分，每小题 7 分）

（1）求 $\int x^{-3}\operatorname{arctg}x\,dx$；

（2）设

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+x}, & x\geqslant 0,\\ \frac{1}{1+e^x}, & x<0.\end{cases}$$

求 $\int_0^2 f(x-1)dx$。

二、（本题 8 分）设$z=f(x,u,v)$，$u=2x+y$，$v=xy$，其中f具有二阶连续偏导数，

求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

三、（本题 8 分）计算$\iint_D \sqrt{y}\,d\sigma$，其中区域D是由曲线$y=x$，$y=2x-x^2$所围成。

四、（本题10分）试求在圆锥面$Rz=h\sqrt{x^2+y^2}$与平面$z=h$所围锥体内作出的底面平行于xoy平面的最大长方体体积（$R>0$，$h>0$）。

五、（本题10分）求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n$的收敛域，并求其和。

六、（本题10分）计算曲线积分$\oint_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$，其中L是以点（1，0）为圆心R为半径的圆周（$R\neq 1$），方向取逆时针方向。

七、（本题12分）设$\varphi(x)=e^x-\int_0^x (x-u)\varphi(u)du$，其中$\varphi(x)$为连续函数，求$\varphi(x)$。

八、（本题 8 分）设

（1）$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(a)=f(b)=0$，

（2）$f(x)$在(a,b)内有一阶导数$f'(x)$，且$f(x)$在点a处右导数

$$f_+'(a)=\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0,$$

（3）$f(x)$在(a,b)内有二阶导数$f''(x)$。

求证：在区间(a,b)内至少存在一点c使$f''(c)<0$。

九、（本题 8 分）设向量组$A(a_1,a_2,a_3)$，$B(b_1,b_2,b_3)$，$C(c_1,c_2,c_3)$线性无关，证明向量组$D(a_1,a_2,a_3,a_4)$，$E(b_1,b_2,b_3,b_4)$，$F(c_1,c_2,c_3,c_4)$也线性无关。

十、（本题12分）设二次型$f(x,y,z)=2x^2+2y^2+3z^2+2xy$，试将其化为标准形，并写出所用的正交变换。

（Ⅲ）

（包括线性代数、复变函数、概率论）

一、（本题14分，每小题 7 分）

（1）$\int x^{-3}\operatorname{arctg}x\,dx$；

（2）设

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+x}, & x\geq 0,\\ \frac{1}{1+e^x}, & x<0.\end{cases}$$

求 $\int_0^2 f(x-1)dx$。

二、（本题 8 分）设$z=f(x, u, v)$，$u=2x+y, v=xy$，其中f具有二阶连续偏导数，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。

三、（本题10分）试求在圆锥面$Rz=h\sqrt{x^2+y^2}$与平面$z=h$所围锥体内作出的底面平行于xoy平面的最大长方体体积（$R>0$，$h>0$）。

四、（本题10分）求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n$的收敛域，并求其和。

五、（本题10分）计算曲线积分$\oint_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$，其中L是以点（1，0）为圆心，R为半径的圆周（$R\neq 1$），方向取逆时针方向。

六、（本题12分）设

$$\varphi(x)=e^x-\int_0^x (x-u)\varphi(u)du$$

其中 $\varphi(x)$ 为连续函数，求 $\varphi(x)$

七、（本题 8 分）设

（1）$f(x)$在区间 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a)=f(b)=0$；

（2）$f(x)$在区间 (a, b) 内具有一阶导数$f'(x)$，且$f(x)$在点a处右导数

$$f_+'(a)=\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0;$$

（3）$f(x)$在区间 (a, b) 内有二阶导数$f''(x)$。

求证：在区间 (a, b) 内至少存在一点c，使$f''(c)<0$。

八、（1）（本小题 4 分）设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

求A^{-1}；

（2）（本小题12分）试用正交变换将二次型

$$f(x, y, z)=2x^2+2y^2+3z^2+2xy$$

化为标准形（法式），并写出所用的正交变换。

注意：在下列第九、第十两题中，由考生任选一题，如两题都做，则只按第九题给分。

九、（1）（本小题 5 分）计算$\oint_C \frac{e^z \sin z}{z^2-4}dz$，其中积分闭路c为圆周$|z|=3$之逆时

针方向。

（2）（本小题7分）计算$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+9)}dx$

十、（1）（本小题4分）现有一批产品是由三家工厂生产的，已知其中一家的废品率是五分之一，另两家的废品率都是十分之一，今从这批产品中任取一件（假定这一件来自哪个工厂是等可能的）进行检验，问取到的是废品的概率。

（2）（本小题8分）测量某一目标的距离时，测量误差服从$\mu=-50$，$\sigma=100$的正态分布（单位：米），试求测量距离的误差按其绝对值不超过150米的概率。

附表：标准正态分布表$\Phi(z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\mu^2}{2}}d\mu$

z	0	1	2
0.8	0.7881	0.7910	0.7939
1.0	0.8413	0.8438	0.8461
1.5	0.9332	0.9345	0.9357
2.0	0.9772	0.9778	0.9783
2.5	0.9938	0.9940	0.9941

同济大学　华东化工学院　华东纺织工学院　上海科学技术大学
上海工业大学　上海机械学院　上海铁道学院　上海海运学院

（联合命题）

（A）

一、填充题（每小题3分）

（1）$d(x\operatorname{tg}x)=$……………… dx；d……………… $=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$；

（2）设$f(x)$可微，则$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x-h)}{h}=$………………；

（3）设$\overrightarrow{OA}=\{1,2,1\}$，$\overrightarrow{OB}=\{-2,-1,1\}$，则$\cos\angle AOB=$………；

（4）设$f(x)$在$[0,l]$上连续，在$(0,l)$内有$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x$，

其中b_n的计算公式为$b_n=$………………。

二、选择题（把正确结论的代号写在括号内，每小题选对得3分，不选得0分，选错得负1分）

（1）当$x\to 0$时，$x^2-\sin x$是x的（　　）

（A）高阶无穷小；　　（B）同阶无穷小；

（C）低阶无穷小；　　（D）等价无穷小。

（2）函数$z=f(x,y)$在点$(x_0,\ y_0)$处具有偏导数，$f_x(x_0,y_0)$、$f_y(x_0,y_0)$是函数在该点可微分的（　　）

（A）必要条件但非充分条件；　　（B）充分条件但非必要条件；

（C）充分必要条件；　　（D）既非充分条件也非必要条件。

（3）设$u=f(x+y,\ xz)$有二阶连续偏导数，则$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}$是（　　）

（A）$f'_2+xf''_{11}+(x+z)f''_{12}+xzf''_{22}$；　　（B）$xf''_{12}+xzf''_{22}$；

（C）$f'_2+xf''_{12}+xzf''_{22}$；　　（D）$xzf''_{22}$。

（4）若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$都发散，则（　　）

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$必发散；　　（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n$必发散；

（C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|u_n|+|v_n|)$必发散；　　（D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n^2+v_n^2)$必发散。

三、（6分）求$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x}{x+1}\right)^{\frac{2x}{x-1}}$。

四、（6分）求$\int\frac{x^2}{1+x^2}\operatorname{arc\,tg}x\,dx$。

五、（7分）求曲线$\begin{cases}x=t\\ y=-t^2\\ z=t^3\end{cases}$与平面$x+2y+z=4$平行的切线方程。

六、（7分）求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}$的收敛区域及和函数。

七、（10分）用铁锤将一铁钉击入木板，设木板对铁钉的阻力与铁钉击入木板的深度成正比。在铁锤击第一次时，能将铁钉击入木板内1厘米，如果铁锤每次打击铁钉所做的功相等，问铁锤击第二次时能把铁钉又击入若干？

八、（8分）求三重积分$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv$的值，其中$\Omega$是由曲线$\begin{cases}y^2=2z\\ x=0\end{cases}$绕z轴旋转

一周而成的曲面与两平面$z=2$、$z=8$所围成的立体。

九、（7分）求曲线积分$\oint_L |y|dx+|x|dy$，其中L为以A(1,0)、B(0,1)及C(−1,0)为顶点的三角形的正向边界曲线。

十、（7分）求$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x|\sin t|dt}{x}$。

十一、（10分）求微分方程

$$y''+y=x,\quad 当\ x<\frac{\pi}{2},$$

$$y''+4y=0,\quad 当\ x>\frac{\pi}{2}$$

满足初始条件$y|_{x=0}=0$，$y'|_{x=0}=0$并在$x=\frac{\pi}{2}$处连续且可微的解。

十二、（8分）设$f(0)=0$，$f'(x)$在$[0,+\infty)$内是单调增加的，试证函数$g(x)=\frac{f(x)}{x}$在区间$(0,+\infty)$内是单调增加的。

(B)

一、填充题（每小题3分）

（1）$d(x\operatorname{tg}x)=$……………………dx；d……………………$=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$；

（2）设$f(x)$可微，则$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+2h)-f(x-h)}{h}=$……………………；

（3）$\int_{-\pi}^{\pi}x\sin^2\frac{x}{2}dx=$……………………；

（4）微分方程$\dfrac{d^2y}{dx^2}+4\dfrac{dy}{dx}+5y=0$的通解是……………………。

二、选择题（把正确结论的代号写在括号内，每小题选对得3分，不选得0分，选错得负1分）

（1）当$x\to0$时，$x^2-\sin x$是x的（　　）

(A) 高阶无穷小；　　(B) 同阶无穷小；

(C) 低阶无穷小；　　(D) 等价无穷小。

（2）设$0<a<b$，则$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}$是（　　）

(A) a;　　　　(B) b;

(C) 1;　　　　(D) $a+b$。

(3) 函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处具有偏导数$f_x(x_0,y_0)$、$f_y(x_0,y_0)$是函数在该点可微分的(　　)

(A) 必要条件但非充分条件;　　(B) 充分条件但非必要条件;

(C) 充分必要条件;　　(D) 既非充分条件也非必要条件.

(4) $\frac{d}{dx}\int_a^x \cos t^2\,dt$是(　　)

(A) $-2x\sin x^2$;　　(B) $-2x\sin x^2+2a\sin a^2$;

(C) $\cos x^2$;　　(D) $\cos x^2-\cos a^2$。

三、(6分)求 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x}{x+1}\right)^{\frac{2x}{x-1}}$。

四、(6分)设$\begin{cases}x=\ln(1+t^2),\\ y=t-\mathrm{arctg}t,\end{cases}$ 求$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=2}$。

五、(7分)求$\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{arctg}x\,dx$。

六、(6分)设$z=y^x$,求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

七、(7分)求$\iint\limits_D(y-x^2)dxdy$,其中区域D由三条直线$y=x$、$x=1$及$y=0$所围成。

八、(12分)过坐标原点作曲线$y=e^x$的切线,求由这条切线、y轴及曲线$y=e^x$所围图形的面积。

九、(12分)一质量为m的质点,以初速v_0铅直上抛,设空气的阻力与质点运动速度的平方成正比(比例系数为$k,k>0$),求该质点从抛出至达到最高点的时间。

十、(10分)求$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x|\sin t|dt}{x}$。

十一、(10分)设$f(0)=0$,$f'(x)$在$[0,+\infty)$内是单调增加的,试证函数$g(x)=\frac{f(x)}{x}$在区间$(0,+\infty)$内是单调增加的。

北京农业大学　南京农业大学　华南农业大学

浙江农业大学　华中农学院

（联合命题）

一、计算下列各题：（每小题5分，共15分）

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{8\cos^2x-2\cos x-1}{2\cos^2x+\cos x-1}$。

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{2x+1}}$。

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+\mathrm{tg}x}-\sqrt{2+\sin x}}{x^3}$。

二、计算下列各题：（每小题5分，共20分）

1. $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$，求y'；

2. 已知$f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots\cdots(x-50)$，求$f'(0)$；

3. $(\cos y)^x=(\sin x)^y$，求y'_x；

4. 已知$z=x\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)+\psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$，求$\dfrac{\partial^2z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2z}{\partial y^2}$及$\dfrac{\partial^2z}{\partial x\partial y}$。

三、设$0<x_1<x_2<\dfrac{\pi}{2}$，试证$\dfrac{\mathrm{tg}x_1}{x_1}<\dfrac{\mathrm{tg}x_2}{x_2}$。（10分）

四、已知

$$\begin{cases}\varphi(x)+\displaystyle\int_2^x f(t)dt=-(x^2+x);\\ f(x)\varphi'(x)=x^2+x-2,\end{cases}$$

求　$f(x)$及$\varphi(x)$。（10分）

五、证明：如果函数$y=f(x)$在区间(a,b)上每一点的导数都等于零，即$f'(x)\equiv 0$则$y=f(x)$在区间(a,b)上是一个常数。（5分）

六、计算下列各题：（每小题5分，共20分）

1. $\displaystyle\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$；　2. $\displaystyle\int_0^{2\pi}x|\sin x|dx$；

3. $\displaystyle\int\cos(\ln x)dx$；　4. 解微分方程$xy'+y=1$。

七、灌溉涵洞的断面为抛物线拱形，拱高1米，拱底宽2米，在水面高出涵洞顶点1米时，求涵洞闸门上所受的水压力ξ（水的比重$\gamma=1$吨/米^3）。（10分）

八、已知随机变量X的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} ke^{-3|x|/2}, & -2<x<+\infty, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

求（1）常数 k；（2）$P\{-1<x<2\}$；（3）数学期望 $E(e^{\frac{x}{2}})$。(10分)

铁道部科学研究院

水利电力经济管理学院

（联合命题）

(A)

一、（10分）求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$。

二、（10分）求 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{2\sin^2 x+tg^2 x}$。

三、（10分）求曲面 $az=x^2+y^2$（$a>0$）与曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的均匀物体的重心坐标。

四、（10分）设 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上有界，$g(x)=f(x)\sin x^2$，求 $g'(0)$，并写出主要步骤的根据。

五、（10分）求函数 $f(x, y)=1-x^2-y^2$ （$x^2+y^2<1$）在条件 $\varphi(x, y)=x^2+y^2-2(x+y)+1=0$ 下的极值，并用图形说明它是极大值还是极小值。

六、（10分）设 $x=f(\theta, \varphi)$，$y=g(\theta,\varphi)$，$z=h(\theta,\varphi)$，其中 f，g，h 均为可微函数，$\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial g}{\partial \varphi}-\frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial g}{\partial \theta}\neq 0$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$。

七、（15分）将函数 $f(x)=x+|x|$ 在 $[-l, l]$ 上展成富里哀级数，并作出和函数的图形。

八、（15分）设 $f(x)$ 在 (a, b) 内有二阶导数，$f''(x)\geqslant 0$。试证：

（1）对于 $a<x<x_0<y<b$，存在 λ（$0<\lambda<1$），使 $x_0=\lambda x+(1-\lambda)y$；

（2）对任何满足 $0<\lambda<1$ 的 λ，有 $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$。

九、（10分）证明：若有方程 $f'(x)=f(1-x)$，则必有 $f''(x)+f(x)=0$；并求解原方程。

华北电力学院北京研究生部

水电部南京自动化研究所

（联合命题）

一、（1）试求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]$；（6分）

（2） 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n}$ 的收敛区间，并求其在收敛区间内的和；（10分）

（3） 计算 $\iint\limits_{D}\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$，其中D为圆形区域 $x^2+y^2\leqslant 1$；（8分）

（4）已知 $\varphi(\pi)=1$，试确定 $\varphi(x)$，使由线积分 $\int_A^B\left[\sin x-\varphi(x)\right]\frac{y}{x}dx+\varphi(x)dy$ 与路径无关，并求当A、B两点分别为(1,0)，(π,π) 时，这曲线积分的值。（10分）

二、设 α,β,γ 为平面三角形的内角，试求 $y=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ 的极大值。（12分）

三、求一平面曲线，使其上任意的切线与平面直角坐标轴所围成的三角形面积都等于2。（18分）

四、试证：

（1）设A是n阶非退化矩阵，则A的伴随矩阵 $\widetilde{A}$ 的行列式等于A的行列式的 $n-1$ 次幂。（5分）

（2）设A、B为对称矩阵，试证：

(i) $AB+BA$ 为对称矩阵；（3分）

(ii) $AB-BA$ 为反对称矩阵。（3分）

（3）设可逆的n阶矩阵A有n个非零的特征值 λ_1、λ_2、$\lambda_3\cdots$、λ_n。试证A的伴随矩阵 $\widetilde{A}$ 的特征值为 $\lambda_1^{-1}|A|,\lambda_2^{-2}|A|,\cdots\lambda,\ {}_n^{-1}|A|$。（7分）

五、（1）设 $P=\Phi\left(\frac{y}{x}\right)$（$\Phi$ 为调和函数），求解析函数 $f(z)=P+iQ$ $(z=x++iy)$；（10分）

（2）$f(z)=\frac{e^z}{\sin mz}$（$m\neq 0$，m为实数）在 $z_k=-\frac{k\pi}{m}$ $(h=0,1,2,\cdots,s)$ 的留数之和。（8分）