北京五中　蒋佩锦　薛川坪　肖　钰

中学生学习能力培养与训练丛书

高中数学高考总复习

化学工业出版社

中学生学习能力培养与训练丛书

高中数学高考总复习

北　京　五　中

蒋佩锦　薛川坪　肖　钰

化学工业出版社

中学生学习能力培养与训练丛书
高中数学高考总复习
北　京　五　中
蒋佩锦　薛川坪　肖　钰
责任编辑：徐世峰
封面设计：许　立
•
化学工业出版社出版发行
（和平里七区十六号楼）
化学工业出版社印刷厂印刷
一二〇二工厂印刷
新华书店北京发行所经销
•
开本 787×1092 1/32 印张 $11\frac{5}{8}$ 字数268千字
1989年12月第1版　1989年12月北京第2次印刷
印　数5,401—10,690
ISBN 7-5025-0570-9/G・159
定价4.80元

前　言

为适应中学数、理、化三科的教学和中考、高考总复习的需要，进一步提高学生学习和掌握课文重点，以及分析和解答问题的能力，从而促使他们在课堂学习和中考、高考中获得优异成绩，我们北京五中特组织本校数、理、化教研组具有丰富经验的教师，以现行教学大纲和1988年新版教材为依据，并考虑到未来新教材的教学目标和讲授内容，编写了这套《中学生学习能力培养与训练丛书》。

这套丛书共23个分册，分为两个系列．一个系列是配合初中、高中数、理、化日常教学需要的学习指导材料，共14个分册．另一个系列是为配合中考、高考总复习而编写的升学指导读物，共 9 个分册．

我们在编写过程中注意了摒弃过去那种“满堂灌”和“题海战术”的做法，采用了诱导和启发的方式，并对精选的具有代表性的问题和习题进行分析和演示，力求达到明确要求、深化基础、把握重点、突破难点、开阔思路、发展智能的目的．

本书具有如下一些特点

1． 从系统论的观点出发，把每门科目所含知识整理成一目了然的知识系统，以使学生便捷地明确所要学习的目标，掌握问题的要领，同时也帮助读者从知识系统的内在联系和对比关系上去理解基本概念和基本规律，避免理解上的孤立性和片面性．

2． 为了深化学生对基础知识的理解，并将其引向应用，书中对重点概念的内函和外延、主要定律的理解要点、容易混

淆的问题，以及解题中常用的方法和技能，进行了简明的指点和深入的剖析。这部分内容是书中重点，反映了编者教学实践中积累的经验。

3． 为培养和提高学生运用基础知识去分析和解决问题的能力，运用书中“典型例题分析”——交待对习题的分析方法和解题的思路、步骤，排除“就题论题”的做法。

4． 为促使学生实现基础知识向应用能力的转化，按照教学大纲的要求，从国内外中学数理化教材和参考书中精选了各种类型的习题，编列为“单元练习和综合练习”并附有参考答案。习题有基本题，灵活题以及模拟中考、高考题形式的综合题，题型齐全，体现对能力的检查。

5． 对物理和化学两科，为着重训练和培养学生的实验能力，编有“实验指导”和“实验习题”，内容系统全面，难易适当，充分体现教学大纲和中考、高考的要求。

这套丛书最适合初中、高中学生作为日常学习和总复习的辅导读物，也可作为中学教师的参考用书。

由于编写时间比较仓促，并受教学水平之限，书中可能存在错误或不当之处，敬希读者批评指正。

编　者

1988年12月

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

内 容 提 要

为配合中学数学、物理、化学三科的教学和中考、高考总复习，北京五中组织了该校具有丰富教学经验的教师，以现行初中和高中教学大纲和1988年新版《数学》、《物理》和《化学》教材为依据，并考虑到未来新教材的教学目标和讲授内容编写了这套《中学生学习能力培养与训练丛书》。

这套丛书摒弃了过去那种"满堂灌"，和"题海战术"的做法，采用了诱导和启发的方式，并对精选出的具有代表性的问题和习题，进行分析和演示，力求达到知识系统化，加强基础知识，把握重点，突破难点，开阔思路，发展智能的目的，以收在课堂学习和中考、高考中取得优异成绩之效。

这套丛书共23个分册，分为两个系列．一个系列是配合初中、高中数学、物理和化学日常教学需要的学习指导材料，共14个分册；另一个系列为配合中考、高考总复习需要的升学指导读物，共9个分册。《高中数学高考总复习》属于第二个系列．全书共十二章，对高中代数（包括三角）、立体几何、解析几何的内容进行系统整理，明确每单元的基本要求，阐述各单元所涉及的重要数学思想和方法，通过典型例题分析，总结方法，指明规律，并且配有单元练习和练习答案．

本书最适合高中学生进行高考数学总复习之用，也可作为中学有关教师的教学参考书．

目　　录

第一章　集合与函数

一、基 本 要 求

1. 会求给定集合的子集、真子集、交集、并集和补集

理解上述有关集合的概念是正确求出有关集合的基础.

给定集合的子集就是由这个集合的“部分”元素组成的集合. 要求出子集，必须对给定集合的元素是什么，共有多少个元素作出准确的分析.如果认为集合$\{1, 2, \{3, 4\}\}$含有四个元素，那是不可能正确求出其子集的，实际上它只有三个元素：1，2，和$\{3, 4\}$.三个元素可以组成多少个不同的部分呢？又要会对其作出不重不漏的分类. 只要理解这里共分四类：三个中取 0 个；三个中取 1 个；三个中取 2 个；三个中取 3 个，就不难得出所求的子集共有$C_3^0+C_3^1+C_3^2+C_3^3=8$（个），是：$\phi$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{\{3, 4\}\}$，$\{1, 2\}$，$\{1, \{3, 4\}\}$，$\{2, \{3, 4\}\}$，$\{1, 2, \{3, 4\}\}$.至于求真子集只要去掉上结果中最后一个的理由，从真子集概念的理解中也不难得到.

两集合并的概念的认识，主要是对逻辑联词“或”的理解. 这里“或”的理解与自然语言中是不同的，自然语言中“或”是作“不可兼有”理解. 例如，甲去或乙去，理解成甲去且乙不去，乙去且甲不去中两者之一成立、数学上的“或”作“可兼有”理解，即理解成三种可能：甲去乙不去；乙去甲不去；甲乙都去，也就是说理解成甲、乙中至少有一人去. 对两集合A与B的并中的元素的所属，就有三种可能：属于A不属于B；属于B不属于A；既属于A又属于B，在韦恩图（图1-1）上可以清楚地看到这三种可能. 理解了这些，才可能对$\{(x, y)|x=1\}$

$\cup\{(x,\ y)|y=1\}=\{(x,\ y)|x=1$ 或 $y=1\}$的认识从形式认识上提高一步，体会到这个点集的图形是图 1-2 所示的两条互相垂直的直线.

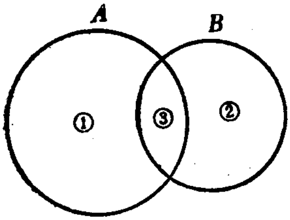

图 1-1

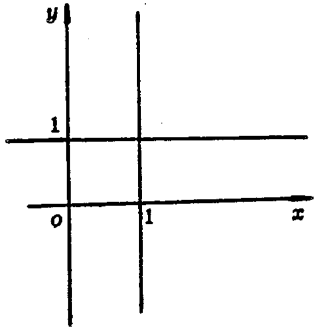

图 1-2

集合的补集是在约定全集的前提下定义的概念。笼统的问除了你还有谁？是无法回答的。因此求补集时，必须仔细注意全集是怎样约定的。例如，已知全集 I 是实数集 R，$A=\{x|\sqrt{x-1}<3\}$，在求A的补集时，常有人误认为$\overline{A}=\{x|\sqrt{x-1}\geqslant 3\}=\{x|x\geqslant 10\}$ 实际上这里致错的原因，是把全集当作$\{x|x\geqslant 1\}$了。正确的结果是：

$$\overline{A}=\{x|\sqrt{x-1}\geqslant 3 \text{ 或 } x<1\}=\{x|x\geqslant 10 \text{ 或 } x<1\}。$$

2. 能进行集合语言和普通数学语言的互相翻译。

广泛使用集合符号和集合思想是近代数学的特点之一。由于集合语言的简明性、准确性和在中学数学中的普遍使用，就要求我们会进行集合语言和普通数学语言的互相翻译

例如，“集合$A=\{(x,\ y)|2x-y=1,\ x,\ y\in R\}$，$B=\{(x,\ y)|ax+3y=9,\ x、y\in R\}$，且 $A\cap B=\phi$，求a。”可以翻译成：关于x，y的方程组：

$$\begin{cases}2x-y=1,\\ ax+3y=9\end{cases}$$

无解时，求a的值；或翻译成：两条直线：$2x-y=1$和$ax+3y=9$平行时，求a的值．很明显，不会进行这种翻译，问题就不可能得到解决（这里a的取值是-6）。

下面给出几个由集合语言表述的命题，请你翻译成普通语言表述：

（1）若集合$A=\{x|x=4k,\ k\in Z\}$，$B=\{$偶数$\}$，求证：$A\subset B$。

（2）若$\{x|x-2=ix\}\subseteq\{x|x^2+px+2=0\}$，求实数$p$的值。（$p=-2$）

（3）求$\{x|y^2=x+1,\ x\in R\}$。（$\{x|x\geqslant-1\}$）

（4）若集合$M=\{(x,y)|y=|x|+1,\ x\in R\}$ $N=\{(x,y)|y=\frac{1}{2}x+a,\ x\in R\}$，且$M\cap N\neq\phi$，求实数$a$的取值范围。（$a\geqslant1$）

（5）集合$A=\{x|(x-1)^2>0\}$，$a=\lg5\lg20+\lg^2 2$，求证：$a\notin A$。

3. 能用映射的观点正确理解函数的概念

映射的定义告诉我们，一个映射必须包含三个要素：原象的集合、象的集合和从原象集到象集内的对应法则，并且这个对应是一个“单值”对应．函数是一类特殊的映射，它的原象集(定义域)和象集(值域)都必须是非空的实数集合（中学数学范围内如此）；它的对应是从定义域到值域上的映射.对函数概念的这种理解，不仅使我们理解$f(x)=3$也是函数不会再发生困难，而且使我们把函数概念的要素概括成定义域、值域和对应法则显得更加自然.一个函数的存在必须其三要素同时齐备.

两个函数是否相同，必须看其三要素是否分别相同，三要素之一不同的两个函数就不能是相同的两个函数。例如，$f(x)=1$ 和 $g(x)=\frac{x}{x}$ 中，由于它们的定义域是不同的，因此这是两个不同的函数。

由于反函数也是函数，不过是和某个函数有着特定关系的函数，因此，我们也应该从三要素的角度上来把握这个特定关系。如果认为求函数 $y=f(x)$ 反函数的方法是：先由 $y=f(x)$ 的解析式，求得用 y 对 x 的反表示式，再按习惯把 x、y 互换，那就很不全面了。必须根据函数的三要素，全面考虑原函数和反函数的定义域，值域、对应法则之间的关系，才是真正理解了反函数的概念，才能正确求出给定函数的反函数。例如，求函数 $f(x)=1-\sqrt{25-x^2}$ $(-5\leqslant x\leqslant 0)$ 的反函数时，由 $f(x)$ 的解析式变形可得：$x^2=24+2y-y^2$，由于 $x\leqslant 0$，因此得 $x=-\sqrt{24+2y-y^2}$。但是如果认为 $f^{-1}(x)=-\sqrt{24+2x-x^2}$ 就是 $f(x)$ 的反函数，就不正确了，因为这里 $f^{-1}(x)$ 的定义域是 $[-4, 6]$，而 $f(x)$ 的值域是 $[-4, 1]$。由此可知，$f(x)$ 的反函数是 $f^{-1}(x)=-\sqrt{24+2x-x^2}$ $(-4\leqslant x\leqslant 1)$。

4. 掌握求函数定义域的方法

求函数定义域的问题有两种类型，一种是求给定解析式的函数的定义域；另一种是求存在于某个实际问题中的函数的定义域。

对于第一种类型，我们把函数的定义域理解成使解析式有意义的自变量的取值集合。求定义域的方法是解由使解析式有意义而得到的不等式或不等式组。这里应该掌握的原则有：(1)分母不为0；(2)偶次方根中，被开方式不小于0；(3)

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

对数式中，真数大于0且底数大于0不等于1；（4）正切函数式中，正切符号后面的式子不等于$\frac{\pi}{2}rk\pi$（$k\in z$）。余切函数式中，余切符号后面的式子不等于$k\pi(k\in Z)$；（5）反正弦或反余弦函数式中，反正弦或反余弦符号后面的式子在$[-1, 1]$上取值.

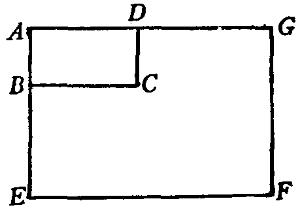

图 1-3

对于第二种类型，我们要以问题中所涉及到的各个量有意义，给自变量的取值带来的限制为据来求出函数的定义域．例如，把小矩形$ABCD$扩充成大矩形$AEFG$，并使$BE+EF+FG+GD=22$(图1-3)，若小矩形的周长是12，$AB=2$，$BE=x$，扩充部分的面积是y,求$y=f(x)$的解析式和定义域．为了看出这里求函数定义域的方法，不妨写出求$y=f(x)$的解析式的过程：因为$BE=x$，所以$AE=FG=x+2$；又$AB=2$，所以$AD=4$；可以求得$EF=12-x$，因此可以得到$y=(x+2)(12-x)-2\times4=-x^2+10x+16$。要求其定义域，应该从上述过程所涉及的各个量都有意义入手，得到$0<x<22$；$0<x+2<22$；$0<12-x<22$，解这三个不等式组成的不等式组可以得到所求函数的定义域是(0，12)。

还要指出的是,有一类求函数定义域的问题要使用换元法．例如，已知$f(x)$的定义域是$(\frac{1}{2}, 3)$,求$f(\lg x)$的定义域。这里只要把$\lg x$看作x，根据条件就可得到$\frac{1}{2}<\lg x<3$，从而求得$f(\lg x)$的定义域是$(\sqrt{10}, 1000)$.

5. 掌握求函数值域的方法

在中学数学中，求函数值域是没有通用方法的。我们不可能对任意函数求出其值域来，只能对一些特殊的函数试求其值域。这里的方法有二种：一种是对存在反函数的函数，用求反函数定义域的方法来确定其值域；另一种是用确定函数最大值和最小值的方法来求其值域；确定函数最值的初等方法本章后面再详细讨论。

6. 掌握画函数图象的三种方法

函数图象不仅是函数关系可以得到直观显示的工具，也是研究函数性质的工具。画函数图象的三种方法是：（1）描点法；（2）平移法；（3）翻折法。

描点法是画函数图象最基本的方法。值得注意的是，应该避免描点前的盲目列表计算，也应该避免描点后，不管具体是什么函数关系，一律用平滑曲线对所有点的连接.这里要注意利用课本中已经研究过的基本初等函数的图象；也要注意由函数解析式的代数讨论，所得函数图象的轮廓了解对列表的指导。由于一次函数的图象是直线，只要确定两个点就可以画出其图象；同样用三个点可画出二次函数的图象；用五点法可画出正（余）弦曲线等等。对于函数图象还不熟知的情况，我们要先研究其定义域、值域，取得对函数图象存在范围的认识；研究其奇偶性，取得对函数图象对称情况的认识；研究其单调性，取得对函数图象变化趋势的认识，并以此为指导，列表、描点。对于连续函数，其图象当然可把这些点用平滑的曲线连接而得到，但这里要特别注意函数定义域、值域的限制作用。函数图象可以是一些点，一些线段或一段曲线。

平移法是利用熟知的函数图象的上下或左右平行移动，而画出所要的函数图象的方法。其具体方法是：函数$y=f(x)+$

$a(a \neq 0)$的图象可以通过把函数 $y=f(x)$的图象向上（当$a>0$时）或向下（当$a<0$时）平行移动$|a|$个单位而得到；函数 $y=f(x+b)(b \neq 0)$的图象可以通过把函数 $y=f(x)$的图象向左（当$b>0$时）或向右（当$b<0$时）平行移动$|b|$个单位而得到。

使用这种方法的困难在于对所给的函数解析式作 $f(x)$是什么的辨认和通过适当变换作出$f(x)+a$或 $f(x+b)$或 $f(x+b)+a$的构成。

例如，要画函数 $g(x)=\dfrac{3-2x}{x-3}$的图象，必须先完成 $\dfrac{3-2x}{x-3}=-\dfrac{3}{x-3}-2$的变形，然后判断出这里 $f(x)=-\dfrac{3}{x}$，要画$f(x-3)-2=-\dfrac{3}{x-3}-2$的图象。至此，就可以用平移法画出 $g(x)$的图象(图1-4)。

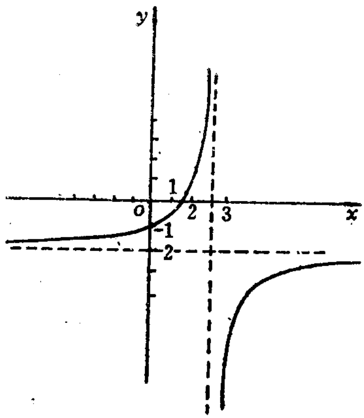

图 1-4

翻折法又称对称法，是一种利用对称原理画函数图象的方法。函数$y=f(x)$的图象与$y=-f(x)$的图象关于x轴对称，我们可以通过画$y=f(x)$图象关于x轴的对称图形的方法得到$y=-f(x)$的图象。函数$y=f(x)$的图象与$y=f(-x)$的图象关于y轴对称，我们可以通过画$y=f(x)$图象关于y轴的对称图形的方法得到 $y=f(-x)$

的图象。函数 $y=f(x)$ 的图象与 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，用上述同样的原理可以由 $y=f(x)$ 的图象得到 $y=f^{-1}(x)$ 的图象。

例如，画函数 $f(x)=|\lg(x+2)|$ 的图象（简图）．由于 $y=\lg(x+2)$ 的图象可由 $y=\lg x$ 的图象用平移法得到，并且

$$f(x)=\begin{cases}\lg(x+2) & x\geqslant -1\text{时．}\\ -\lg(x+2) & -2<x<-1\text{时．}\end{cases}$$

由此用翻折法可以画出 $f(x)$ 的图象（图1-5）．

7． **掌握研究函数性质的基本方法**

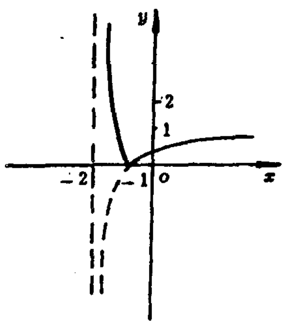

图 1-5

在初中，研究函数性质的方法是数形结合法，即通过对函数图象的直观观察，归纳出函数的性质，到高中，数形结合法仍然是研究函数性质的主要方法，但又要求增加理论研究的成分。即利用函数性质的有关定义，通过对函数解析式的代数讨论来判断、证明函数的性质。这些性质包括定义域、值域、奇偶性、单调性和在平面三角中再介绍的周期性。

利用函数性质的有关概念研究函数的性质，就必须对概念有准确的理解．例如，偶函数定义中要求 $f(-x)=f(x)$ 对函数定义域内任意 x 成立，其含义不仅是 $f(-x)=f(x)$ 是关于 x 的恒等式，而且说明 $f(x)$ 的定义域必须是关于原点的对称区间，不理解这一点，就会误判函数 $f(x)=x^2+1\ (-2\leqslant x\leqslant 1)$ 也是偶函数了．实际上这里的 $f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数．又例如，应该搞清增函数和分段增函数的区别，不要以为 $f(x)$

的递增区间是$[a、b]$，$[c、d]$也是$f(x)$的递增区间，就一定有$[a、b]\cup[c、d]$也是$f(x)$的递增区间，图1-6给出了一个反例。

8. 掌握一次函数、二次函数、幂函数、指数函数、对数函数的概念，图象和性质

由于课本中都用图表作了小结，这里不再列出。值得提出的是，要达到这个要求，应抓住函数图象这个中心，通过图象去理解、记忆有关函数的概念和性质，去比较不同类函数的区别和联系。

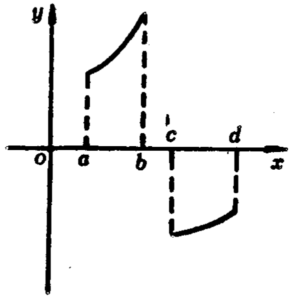

图 1-6

9. 会利用函数的性质解决各种应用问题

函数性质在画函数图象中的应用，前面已经提到。利用函数的增减性作大小比较是又一种应用。同类函数两个不同函数值的大小比较，利用函数的增减性，可以转化成相应自变量取值的大小比较，这是不难的。例如，要比较$\pi^{-0.6}$和$3.14^{-0.6}$的大小，由于幂函数$y=x^{-0.6}$在（0、$+\infty$）内是减函数，只需要比较π和3.14的大小就可以了。由$\pi>3.14>0$，立即得到$\pi^{-0.6}<3.14^{-0.6}$。对于不同类函数两个不同函数值的大小比较，原则上是转化成同类函数的情形。例如，要比较$1.08^{0.3}$和$0.98^{3.1}$的大小，利用幂函数$x^{0.3}$在（0、$+\infty$）内是增函数得：$1.08^{0.3}>0.98^{0.3}$；再利用指数函数0.98^x是减函数，得$0.98^{0.3}>0.98^{3.1}$，可以得到$1.08^{0.3}>0.98^{3.1}$。处理这类问题有时还要用分析法。例如要比较0.3^2和$\log_{0.2}0.3$的大小，只需比较$\frac{9}{100}$和$\log_{0.2}0.3$的大小，只需比较$0.2^{\frac{9}{100}}$和0.3的大

小，只需比较0.2^9和0.3^{100}．由$0.2^9>0.3^{100}$，可得$0.3^2<\log_{0.2}0.3$．

指数函数、对数函数的增减性又是解指数不等式、对数不等式的根据．这里不再举例．

最后还要提出，应注意函数性质的综合运用，请看一例：已知奇函数$f(x)$的定义域是：$(-1,1)$，$f(x)$又是减函数，且$f(1-a)+f(1-a^2)<0$．求实数a的取值范围．求a的取值范围，可以想到应该从寻找关于a的不等式开始．由于$f(x)$的定义域是$(-1,1)$因此不等式：$-1<1-a<1$和$-1<1-a^2<1$是不难得到的．要利用$f(1-a)+f(1-a^2)<0$再得a的不等式，必须变此式为$f(1-a)<-f(1-a^2)$，由奇函数的概念得$-f(1-a^2)=f(a^2-1)$，所以得到：$f(1-a)<f(a^2-1)$，再由$f(x)$是减函数，得到第三个不等式$1-a>a^2-1$．解不等式组得$0<a<1$．

10．掌握求函数最值的几种初等方法

求函数最值限用初等方法是不能解决彻底的，只能解决一些特殊情况．主要方法大致有以下几种．

（1）配方法　它适用于二次函数和可以看作二次函数的函数求最值．

把二次函数$f(x)=ax^2+bx+c$的解析式配方得到：

$$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$．由此可知，当$a>0$时，$f(x)$有最小值$\frac{4ac-b^2}{4a}$；当$a<0$时，$f(x)$有最大值：$\frac{4ac-b^2}{4a}$．利用它求有关函数最值时，要注意这个函数的定义域．例如，求函数$y=-2\sin^2x+5\sin x+1$的最值时，由$y=-2$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.c