教育部高职高专规划教材

高等数学

吴素敏　刘青桂　敦冬梅　主编

化学工业出版社
教材出版中心

教育部高职高专规划教材

高 等 数 学

吴素敏　刘青桂　敦冬梅　主编

化学工业出版社
教材出版中心
·北京·

（京）新登字039号

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/吴素敏，刘青桂，敦冬梅主编. —北京：化学工业出版社，2004.5

教育部高职高专规划教材

ISBN 7-5025-5587-0

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①吴…②刘…③敦… Ⅲ. 高等数学-高等学校：技术学院-教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第043567号

教育部高职高专规划教材

高 等 数 学

吴素敏 刘青桂 敦冬梅 主编

责任编辑[redacted]钰

文字编辑[redacted]建华 李玉峰

责任校对：李 林

封面设计：郑小红

*

化学工业出版社
教材出版中心 出版发行

（北京市朝阳区惠新里3号 邮政编码100029）

发行电话 （010）64982530

http://www.cip.com.cn

*

新华书店北京发行所经销

聚鑫印刷有限责任公司印刷

三河市延风装订厂装订

开本787mm×1092mm 1/16 印张24¼ 字数602千字

2004年7月第1版 2004年7月北京第1次印刷

ISBN 7-5025-5587-0/G·1450

定 价：36.00元

出版说明

高职高专教材建设工作是整个高职高专教学工作中的重要组成部分。改革开放以来，在各级教育行政部门、有关学校和出版社的共同努力下，各地先后出版了一些高职高专教育教材。但从整体上看，具有高职高专教育特色的教材极其匮乏，不少院校尚在借用本科或中专教材，教材建设落后于高职高专教育的发展需要。为此，1999年教育部组织制定了《高职高专教育专门课课程基本要求》(以下简称《基本要求》)和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》(以下简称《培养规格》)，通过推荐、招标及遴选，组织了一批学术水平高、教学经验丰富、实践能力强的教师，成立了“教育部高职高专规划教材”编写队伍，并在有关出版社的积极配合下，推出一批“教育部高职高专规划教材”。

“教育部高职高专规划教材”计划出版500种，用5年左右时间完成。这500种教材中，专门课（专业基础课、专业理论与专业能力课）教材将占很高的比例。专门课教材建设在很大程度上影响着高职高专教学质量。专门课教材是按照《培养规格》的要求，在对有关专业的人才培养模式和教学内容体系改革进行充分调查研究和论证的基础上，充分吸取高职、高专和成人高等学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验和教学成果编写而成的。这套教材充分体现了高等职业教育的应用特色和能力本位，调整了新世纪人才必须具备的文化基础和技术基础，突出了人才的创新素质和创新能力的培养。在有关课程开发委员会组织下，专门课教材建设得到了举办高职高专教育的广大院校的积极支持。我们计划先用2～3年的时间，在继承原有高职高专和成人高等学校教材建设成果的基础上，充分汲取近几年来各类学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验，解决新形势下高职高专教育教材的有无问题；然后再用2～3年的时间，在《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上，通过研究、改革和建设，推出一大批教育部高职高专规划教材，从而形成优化配套的高职高专教育教材体系。

本套教材适用于各级各类举办高职高专教育的院校使用。希望各用书学校积极选用这批经过系统论证、严格审查、正式出版的规划教材，并组织本校教师以对事业的责任感对教材教学开展研究工作，不断推动规划教材建设工作的发展与提高。

教育部高等教育司

2001年4月3日

前　　言

为适应我国高等职业教育的发展，根据教育部关于加强高职高专人才培养工作的意见，本着“拓宽基础，强化能力，加强应用”和“必需、够用”的原则，石家庄职业技术学院、河北工业职业技术学院、石家庄信息工程技术学院、石家庄师范专科学校等院校的优秀教师和专家，根据自己多年职业教育教学的经验，经过酝酿和研究，编写出面向21世纪适合高职高专院校的《高等数学》教材。

本书的内容包括：一元函数微积分、多元函数微积分、无穷级数、常微分方程、线性代数初步等共13章，教学时数约为130～150学时，选学内容需另加课时。

在编写的过程中，我们吸收了当前高职高专数学教材的优点，结合当前高职高专教学改革实际，本着知识系统化、通俗化的原则，编写内容、例题；注重学生解决实际问题能力的培养，增加了一些应用类内容及题目；选取了难易适中的例题和课后习题及章后复习题；以适应高职高专教学为主，适当照顾基础较弱的学生，增加了初等数学知识（见附录），加强了初等数学与高等数学的衔接；适当照顾专接本学生，增加了部分选学内容。

本书由吴素敏总策划，负责组织实施。本书的副主编为路庆华、王磊、张明虎、王玉苏，本书的主编为吴素敏、刘青桂、敦冬梅。

参加编写的人员有（按章节顺序排列）：吴素敏（第一章）；石宁，刘青桂（第二章）；吴素敏，刘竞（第三章）；许景彦，王磊（第四章）；王玉苏（第五章）；敦冬梅，路庆华（第六章）；牛铭，王磊（第七章）；刘青桂，王凤丽（第八章）；张明虎，侯娟（第九章）；敦冬梅，郝香芝（第十章）；刘绛玉（第十一章）；刘绛玉，路庆华（第十二章）；高惠（第十三章）；陈佩宁（附录）。

编　者

2004.4

内 容 提 要

本书介绍了一元函数微积分、多元函数微积分、空间解析几何与矢量代数、常微分方程、无穷级数、线性代数初步等内容。为了方便学生衔接初等数学知识，本书还简介了初等数学的部分公式和简单性质（见附录Ⅰ）。为了方便专接本学生自学，增加了部分选学内容。

本书吸收了当前高职高专数学教材的优点，结合当前高职高专教学改革实际，本着知识系统化、通俗化的原则，编写内容、例题；注重学生解决实际问题能力的培养，增加了一些应用类内容及题目；选取了难易适中的例题和课后习题及章后复习题。

本书可作为高职高专院校、成人高校和本科院校开办的二级院校工科各专业的高等数学教材，同时适合于经管类各专业人员参考。

目　　录

第一章　函数、极限与连续

函数是高等数学的主要研究对象，极限是始终贯穿于高等数学的一个重要工具，连续是函数的一个重要性态．本章将介绍函数、极限与连续的基本知识，为后续知识的学习奠定基础．

第一节　函　　数

一、函数的概念

1．函数的定义

在自然界和社会现象中，经常遇到变量之间的关系问题，示例如下．

例 1　匀速直线运动中，设物体运动的速度为 v，物体运动的时间为 t，则物体运动的路程 s 与物体运动的速度、时间之间的关系式为

$$s=vt$$

设物体运行时间为 T，如果速度 v 确定，那么当时间 t 在闭区间 $[0, T]$ 上任意取定一个数值时，按上述公式就有一个确定的数值 s 与它对应．

例 2　某商场衬衣零售价为 120 元/件，每件衬衣的利润为零售价的 20%，如果这家商场一年卖出这种衬衣的件数用 x 表示，所获得的利润用 Q 表示，则这种衬衣一年所获得的利润 Q 与所售衬衣件数 x 之间的关系为

$$Q=120\times 20\%x$$

对于 x 所取的每一个确定的数值，利润 Q 都有惟一确定的数值和它对应．

例 1、例 2 中，变量之间都存在着确定的对应关系，这种对应关系正是函数概念的实质．

定义　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集，如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定的法则 f，有惟一确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x), x\in D$$

其中，x 叫做自变量，y 叫做因变量，数集 D 称为函数的定义域．

若对于确定的 $x_0\in D$，通过法则 f，函数 y 有惟一确定的值 y_0 相对应，则称 y_0 为 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值，记作

$$y_0=y\big|_{x=x_0}=f(x_0)$$

所有函数值的集合，称为函数的值域，记作 M．

若函数在某个区间上的每一点都有定义，则称这个函数在该区间上有定义．

表示函数 $y=f(x)$ 的对应关系的符号 f 可以采用其他英文字母或希腊字母表示，如

$$y=F(x),\ y=g(x),\ y=\varphi(x),\ y=\psi(x)$$

如果对于给定的 x 值，对应的 y 值有多个，则称此函数为多值函数；对应的 y 值有一

个，则称此函数为单值函数．以后凡是没有特别说明，函数都是指单值函数．

2．函数的定义域

函数的定义域要满足实际要求．如果抽去函数的实际意义，单纯讨论用算式表示的函数，这时函数的定义域就是使算式有意义的一切实数组成的集合．这种定义域称为自然定义域．例如，$s=vt$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$；$Q=120\times 20\% x$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$．

例 3 求 $y=\sqrt{x^4-16}$ 的定义域．

解 要使 $x^4-16\geqslant 0$，必须 $x^4\geqslant 16$，

即 $x^2\geqslant 4$，所以 $x\geqslant 2$ 或 $x\leqslant -2$．

所以函数 $y=\sqrt{x^4-16}$ 的定义域为 $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$．

例 4 求 $y=\ln\dfrac{x-3}{x-2}$ 的定义域．

解 因为真数 $\dfrac{x-3}{x-2}>0$ 时函数才有意义．

要使
$$\frac{x-3}{x-2}>0$$

则
$$\begin{cases}x-3>0\\x-2>0\end{cases} \text{或} \begin{cases}x-3<0\\x-2<0\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}x>3\\x>2\end{cases} \text{或} \begin{cases}x<3\\x<2\end{cases}$$

其结果为
$$x>3 \text{ 或 } x<2$$

所以函数 $y=\ln\dfrac{x-3}{x-2}$ 的定义域为 $(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$．

3．函数的表示法

通常函数的表达方式有三种：公式法、表格法和图示法．

(1) 公式法　用数学公式表示函数关系的方法，称为公式法．

例如
$$s=vt$$
$$y=\arcsin\sqrt{x-2}$$

都是公式法表示的函数．有些用公式法表示的函数并不都是用一个数学式子表示．用多个数学式子表示的函数称为分段函数．

例如，符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\0, & x=0\\-1, & x<0\end{cases}$$

就是一个分段函数．

(2) 表格法　以表格形式表示函数关系的方法称为表格法．

例 5 某化工厂 4 月份前半月每天生产杀虫剂的产量如表 1-1 所示．

表 1-1

日期 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
产量 w	31	29	28	30	32	27	31	30	29	28	34	32	30	29	30

表 1-1 给出了每天生产的杀虫剂产量随着日期的不同而变化的一种函数关系，它是用表格法来表示的，它的定义域为 $D=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

(3) 图示法　用图像表示两个变量之间的函数关系的方法称为图示法.

例如，图 1-1 表示变量 x 与 y 的函数关系.

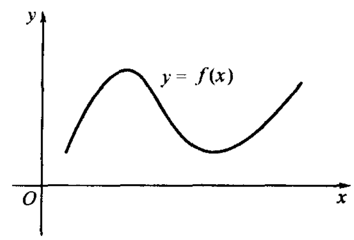


图 1-1

二、函数的几种特性

1. 函数的有界性

定义 1　设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果存在一个正数 M，对于所有的 $x \in I$，对应的函数值 $f(x)$ 恒有

$$|f(x)| \leqslant M$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在 I 内有界，如果这样的正数 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 I 内无界.

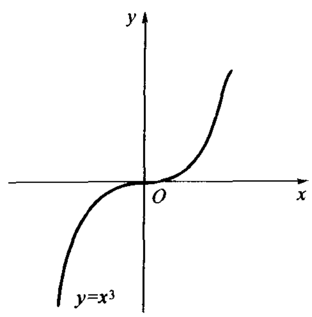


图 1-2

例 6　函数 $f(x)=\cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的，这是因为对于任意 $x \in(-\infty, +\infty)$ 都有 $|\cos x| \leqslant 1$ 成立.

例 7　函数 $f(x)=x^3$.

如图 1-2 所示，它在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界，但是它在 $[1, 2]$ 闭区间上有界. 因为任意 $x \in[1,2]$，$|f(x)|=|x^3| \leqslant 8$.

2. 函数的单调性

定义 2　设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内有定义，对于区间 I 内任意两点 x_1、x_2，当 $x_1<x_2$ 时，函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内单调增加（见图 1-3）. **如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内有定义，对于区间 I 内任意两点 x_1、x_2，当 $x_1<x_2$ 时，函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内单调减少**（见图 1-4）.

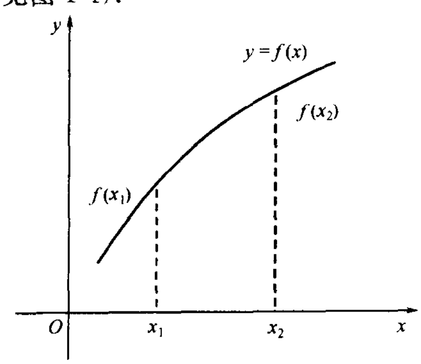


图 1-3

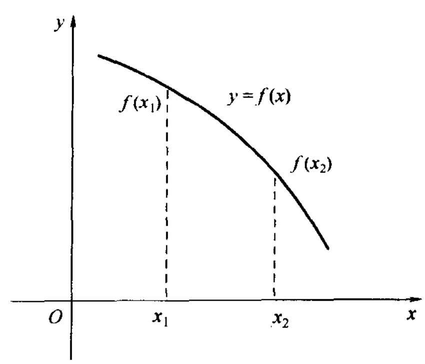


图 1-4

例如，函数 $f(x)=x^2+1$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调增加，在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调减少.

又如函数 $y=e^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内都是单调增加的.

3. 函数的奇偶性

定义 3　设函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称，即当 $x \in D$ 时，$-x \in D$. 如果对于定

义域 D 中的任意 x，均有

$$f(-x)=f(x)$$

则称 $f(x)$ 为偶函数．如果对任意的 $x\in D$，均有

$$f(-x)=-f(x)$$

则称 $f(x)$ 为奇函数．

既不是奇函数也不是偶函数的函数称为非奇非偶函数．

偶函数图形关于 y 轴对称，奇函数图形关于原点对称．

例 8 讨论下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=x-\sin x$；(2) $f(x)=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$；(3) $f(x)=x^{2}+x^{3}$．

解 (1) 因为 $f(x)=x-\sin x$ 的定义域是 $(-\infty，+\infty)$，

对于任意 $x\in(-\infty，+\infty)$ 均有

$$f(-x)=-x-\sin(-x)=-(x-\sin x)=-f(x)$$

所以 $f(x)=x-\sin x$ 是奇函数．

(2) 因为 $f(x)=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ 的定义域是 $(-\infty，+\infty)$，

对于任意 $x\in(-\infty，+\infty)$ 均有

$$f(-x)=\frac{e^{-x}+e^{x}}{2}=f(x)$$

所以 $f(x)=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ 是偶函数．

(3) 因为 $f(x)=x^{2}+x^{3}$ 的定义域是 $(-\infty，+\infty)$，

对于任意 $x\in(-\infty，+\infty)$ 均有

$$f(-x)=(-x)^{2}+(-x)^{3}=x^{2}-x^{3}，\text{而 } f(x)=x^{2}+x^{3}，$$

即 $f(-x)\neq-f(x)$ 且 $f(-x)\neq f(x)$．

所以 $f(x)=x^{2}+x^{3}$ 是非奇非偶函数．

4．函数的周期性

定义 4 **设函数 $y=f(x)$，$x\in D$，如果存在不为零的实数 T，对于每一个 $x\in D$，都有 $x+T\in D$，且总有**

$$f(x+T)=f(x)$$

则称 $y=f(x)$ 为周期函数，称 T 为 $f(x)$ 的周期．若 T 为函数 $f(x)$ 的一个周期，则 kT $(k\in Z)$ 也是 $f(x)$ 的周期．

例如，函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，都是以 2π 为周期的周期函数；$y=\tan x$，$y=\cot x$，都是以 π 为周期的周期函数．通常我们说周期函数的周期指的是函数的最小正周期．

例 9 求 $y=\sin 2x$，$y=\cos\dfrac{x}{3}$ 的周期．

解 对于 $y=\sin 2x$，因为 $\sin x$ 的周期是 2π，

所以 $$\sin 2x=\sin(2x+2\pi)=\sin 2(x+\pi)$$

故 $y=\sin 2x$ 的周期为 π．

对于 $y=\cos\frac{x}{3}$，因为 $\cos x$ 的周期是 2π，所以

$$\cos\frac{x}{3}=\cos\left(\frac{x}{3}+2\pi\right)=\cos\frac{1}{3}(x+6\pi)$$

故 $\cos\frac{x}{3}$的周期是 6π.

一般地，$y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的周期为$\frac{2\pi}{\omega}$.

三、反函数

在研究两个变量之间的关系时，谁是自变量，谁是因变量，并不是绝对的，应根据所研究的具体问题而定.

例如，匀速直线运动的物体，在时间段 T 内路程 s 与时间 t 的函数关系为

$$s=vt$$

其中 t 为自变量，s 是 t 的函数. 反过来，若想从已知的路程 s 来确定运动的时间 t，则有

$$t=\frac{s}{v}$$

这时 s 为自变量，而 t 变为因变量，称函数 $t=\frac{s}{v}$为函数 $s=vt$ 的反函数.

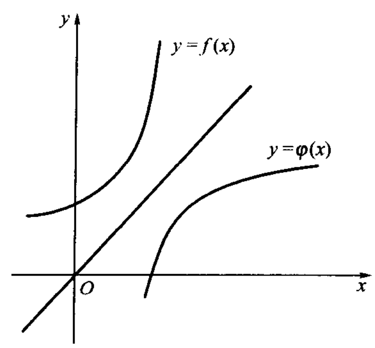


图 1-5

定义　设函数 $y=f(x)$的定义域为 D，值域为 M，如果对于 M 中的每一个数 y，都有惟一确定的数 $x\in D$，使 $f(x)=y$，这时 x 也是 y 的函数，称为 $y=f(x)$的反函数，记为 $x=\varphi(y)$. 其定义域为 M，值域为 D.

由于人们习惯上用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，因此不妨把函数 $y=f(x)$的反函数 $x=\varphi(y)$改写为 $y=\varphi(x)$. 易见，函数 $y=\varphi(x)$与 $y=f(x)$的图形关于直线 $y=x$ 对称（见图 1-5).

例 10　求函数 $y=2^x+1$ 的反函数.

解　由 $y=2^x+1$ 可解得

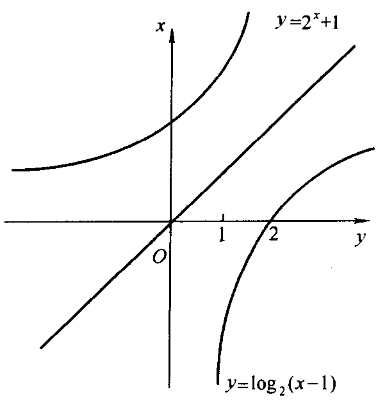


图 1-6

$$x=\log_2(y-1)$$

交换 x、y 的位置，即得所求的反函数为

$$y=\log_2(x-1)$$

其定义域为（1，$+\infty$）（见图 1-6).

四、复合函数

先看一个例子，设函数 $y=\sin u$，而 $u=x+1$，用 $(x+1)$ 代替第一式的 u，得

$$y=\sin(x+1)$$

此时，称函数 $y=\sin(x+1)$是由函数 $y=\sin u$ 与 $u=x+1$ 复合而成的复合函数.

定义 设 y 是 u 的函数，$y=f(u)$，u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，而且 $\varphi(x)$ 的值其全部或部分落在 $f(u)$ 的定义域内，则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为 x 的复合函数，而 u 称为中间变量.

若 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D，复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域为 D_1，则 $D_1\subseteq D$.

例如，函数 $y=\sin^2 x$ 是由函数 $y=u^2$ 及 $u=\sin x$ 复合而成的函数，其定义域 $D_1=(-\infty,+\infty)$ 就是 $u=\sin x$ 的定义域；函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 是由函数 $y=\sqrt{u}$ 及 $u=1-x^2$ 复合而成，其定义域为 $D_1=[-1,1]$，它是 $u=1-x^2$ 的定义域（$-\infty$，$+\infty$）的一部分.

例 11 指出下列各复合函数的复合过程：

（1）$y=\mathrm{e}^{3x-1}$；　　　　（2）$y=\arcsin(\ln x)$；

（3）$y=3\sin\sqrt{1-x^2}$.

解 （1）函数 $y=\mathrm{e}^{3x-1}$ 是由函数 $y=\mathrm{e}^u$ 及 $u=3x-1$ 复合而成的；

（2）函数 $y=\arcsin(\ln x)$ 是由函数 $y=\arcsin u$ 及 $u=\ln x$ 复合而成的；

（3）函数 $y=3\sin\sqrt{1-x^2}$ 是由函数 $y=3\sin u$，$u=\sqrt{v}$ 及 $v=1-x^2$ 复合而成的.

应该指出，不是任何两个函数都可以复合成一个函数. 例如 $y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 就不能复合成一个函数. 因为对于函数 $u=2+x^2$ 的定义域（$-\infty$，$+\infty$）中的任意 x 值所对应的 u 值都大于等于 2，所以 $y=\arcsin(2+x^2)$ 无意义.

五、初等函数

1. 基本初等函数

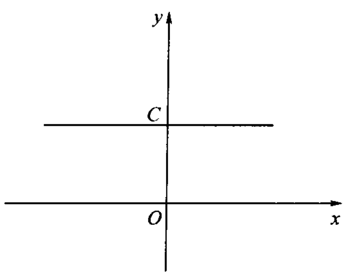
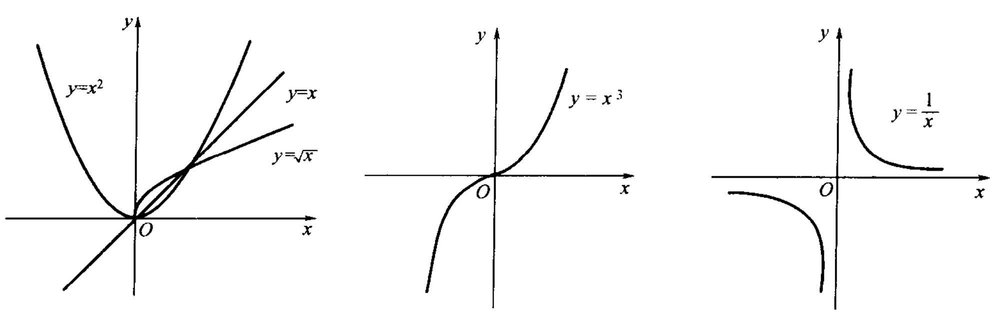


图 1-7

基本初等函数是最基本的一类函数. 基本初等函数包括：常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数. 下面列出这些函数的简单性质和图形.

（1）常数函数　函数 $y=C$（C 为常数）称为常数函数. 常数函数的定义域为一切实数，其图形是一条平行于 x 轴的直线（见图 1-7）.

（2）幂函数　函数 $y=x^\mu$（μ 为常数）称为幂函数. 例如 $y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=\sqrt{x}$，$y=\frac{1}{x}$ 等. 这一类函数的定义域可以因 μ 的不同而不同. 如 $y=x$ 的定义域是（$-\infty$，$+\infty$）；$y=\sqrt{x}$ 的定义域是 $[0,+\infty)$；$y=\frac{1}{x}$ 的定义域是 $x\neq 0$ 等（见图 1-8）.



(a)　　(b)　　(c)

图 1-8

(3) 指数函数　函数 $y=a^x$ （$a>0$，$a\neq 1$，a 为常数）称为指数函数，其定义域为（$-\infty$，$+\infty$），值域为（0，$+\infty$）.

当 $a>1$ 时，它严格单调增加；当 $0<a<1$ 时，它严格单调减少．函数的图形都过(0，1)点，$y=a^x$ 与 $y=a^{-x}$ 的图形关于 y 轴对称，如图 1-9 所示.

$y=e^x$ 是工程上常用的指数函数，常数 e=2.7182818…

(4) 对数函数　指数函数 $y=a^x$ 的反函数

$$y=\log_a x \quad (a>0,\ a\neq 1)$$

称为对数函数，其定义域为（0，$+\infty$），值域为（$-\infty$，$+\infty$）.

当 $a>1$ 时，它严格单调增加；当 $0<a<1$ 时，它严格单调减少．函数图形都过（1，0）点（见图 1-10）.

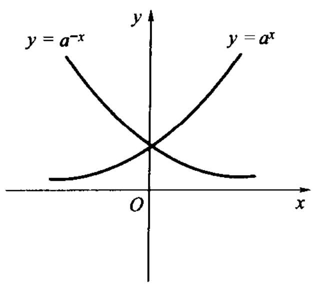


图 1-9

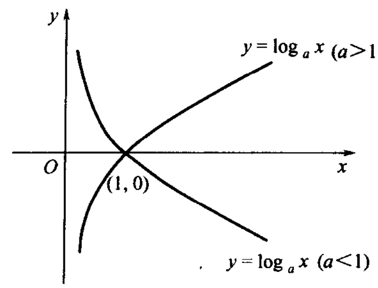


图 1-10

以 e 为底的对数称为自然对数，记作 $\ln x$.

(5) 三角函数　正弦函数：$y=\sin x$，定义域为（$-\infty$，$+\infty$），值域为 [-1，1]，它是以 2π 为周期的有界的奇函数（见图 1-11）.

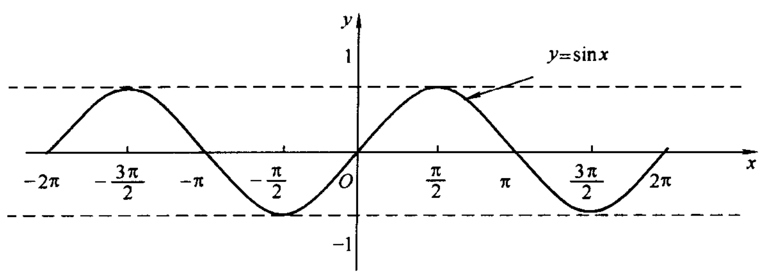


图 1-11

余弦函数：$y=\cos x$，定义域为（$-\infty$，$+\infty$），值域为 [-1，1]，它是以 2π 为周期的有界的偶函数（见图 1-12）.

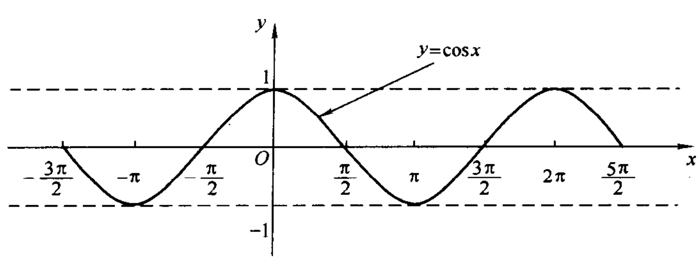


图 1-12