高等几何讲义

姚俊凡 编

贵州人民出版社

高等几何讲义

姚 俊 凡编

贵 州 人 民 出 版 社

前　　言

这本讲义是根据师范学院开设高等几何的目的来编写的。师范学院是培养德智体全面发展的中学教师，是向四化建设输送人材的基地。因此，高等几何这一门课程，必须面向中学，面向当前四化建设的需要。从目前中学几何教学的情况来看，培养学生逻辑推理的能力是十分重要的。因为加强学生逻辑推理的训练，不但有助于学好其他课程，还可以增强学生自学能力。有利于将来从事中学教学和科学研究工作。这是编写时考虑的主要一面。另一方面，考虑到几何这一数学分支，怎样才能显示出它的新生活力，不至于重走过去的老路。为此，这本讲义作了如下安排。

首先根据现行中学课本采用的公理系统（希尔伯特 Hilbert 系统）。从第一组结合公理到第五组平行公理，分别由公理推出一些定理，作为第一章内容。在从公理推出定理的过程中，作较为严谨的论证，加强学生对逻辑推理的认识，并强调学生自己去推出讲义中没有列入的定理，作为第一阶段的学习。第二阶段是第二章内容，进入非欧几何定理的证明。从学生来说，非欧几何是新的课题。因此很自然地会发现证题时根据是重要的，公理是必需的。第三阶段是第三章内容，主要是用代数方法推证几何命题，即是引入射影几何定理的证明。虽然在方法上与解析几何相同，但内容不同，因此在新的内容里又一次地使用代数方法来证题，充实代数法推理的内容。

以上三个阶段，仅是最基本的逻辑推理训练．未能达到加深和巩固的目的，但因学时所限，只能如此．为了弥补这样的不足，增设选修内容。这就是讲义中的第二部分教材，头一章是公理法，它指出建立公理系统的基本要求及公理法的主要精神，用以加强学生对公理的认识．第五章是用不同于希尔伯特的公理系统去推证欧几里德几何，巩固和加深第一章中的证明．第六章是用综合方法去推证四维欧几里德几何的定理．又经过这一阶段的学习，对提高逻辑推理的能力是十分有益的．

为了达到第二个目的，在第一部分的第二章中改变非欧几何的叙述方式．把按历史发展的叙述方式改为定理间逻辑关系的叙述方式，并简化罗氏几何的内容．其次，考虑到几何学要有它的生命力，应与实践相结合，在这方面，爱因斯坦已经给我们打下了良好基础．他把非欧几何有效地应用在相对论中．因此，在讲完射影几何之后，接着在第一部分的附录中引进非欧几何的应用．这一部分内容，要用到张量分析，学生接受困难，但很有意义，把它放在附录中，以备参考，或在学生的自学小组中进行讲授．

此外，还用综合方法阐述四维欧几里德几何，开辟新的几何领域．当然，这是C．R．Wylie的贡献，编者仅作翻译整理的工作，并把它放在选修内容里．

以上是编者对高等几何作大胆的尝试，难免有错，希望读者提出宝贵意见，以便修改．

编　者

1981年2月于贵阳师院

目　录

第一部分

第一章　欧几里德几何学……………………………（3）

§1.1.　结合公理和它的推论……………………（4）

§1.2.　顺序公理和它的推论……………………（7）

§1.3.　合同公理和它的推论……………………（11）

§1.4.　连续公理和它的推论……………………（12）

§1.5.　平行公理和它的推论……………………（31）

§1.6.　球面图形……………………………………（37）

第二章　非欧几何………………………………………（42）

一、罗巴切夫斯基几何学…………………………（42）

§2.1.　罗巴切夫斯基平行公理…………………（42）

§2.2.　渐近三角形…………………………………（53）

§2.3.　沙开里四边形………………………………（60）

§2.4.　角和定理……………………………………（66）

二、黎曼几何简介……………………………………（73）

第三章　射影几何………………………………………（78）

§3.1.　仿射几何……………………………………（78）

§3.2. 射影几何公理…………………………(93)
§3.3. 三点形…………………………………(97)
§3.4. 四点形…………………………………(101)
§3.5. 射影坐标系……………………………(110)
§3.6. 射影变换………………………………(124)
§3.7. 变换群…………………………………(134)
§3.8. 对偶原理………………………………(141)
§3.9. 二次曲线的射影理论…………………(148)
§3.10. 二次曲线的仿射性质…………………(170)
§3.11. 二次曲线的度量性质…………………(176)
§3.12. 非欧几何的射影解释…………………(189)

附录 非欧几何的应用 ……………………………(196)
§1. n 维欧氏空间 …………………………(197)
§2. 张量的意义………………………………(200)
§3. 四维伪欧氏空间 …………………………(203)
§4. 事象空间 …………………………………(209)
§5. 洛伦兹公式………………………………(213)

第 二 部 分

第四章 公理法……………………………………(225)
§4.1. 公理系统的和谐性……………………(227)
§4.2. 公理系统的独立性……………………(230)
§4.3. 公理系统的完备性……………………(232)
§4.4. 有限几何学……………………………(235)

第五章　再论欧几里德几何……………………(241)
§5.1.　结合公理和它的推论……………………(242)
§5.2.　距离测量公理与距离测量……………………(246)
§5.3.　顺序关系与平面分离公理……………………(250)
§5.4.　角的测量公理与角的性质……………………(258)
§5.5.　合同公理和它的推论……………………(274)
§5.6.　平行公理与相似形……………………(280)
§5.7.　面积测量公理和圆……………………(298)
§5.8.　空间直线与平面……………………(309)

第六章　四维欧几里德几何……………………(322)
§6.1.　结合公理和它的推论……………………(323)
§6.2.　在 E_4 中的平行关系……………………(339)
§6.3.　在 E_4 中的垂直关系……………………(348)
§6.4.　在 E_4 中垂直与平行的相互关系………(357)

第 一 部 分

原书空白页

第一章　欧几里德几何学

我们已经学习了初等几何和解析几何，现在开始学习高等几何．高等几何的内容很庞杂，大体地说，研究两个方面的内容，一是几何学的理论基础，二是近代几何的内容．前者以建立几何学的公理系统为主，后者以射影几何为主．学习时，先把已学过的初等几何或解析几何的知识当作未知放在一边，然后根据讲义中提出的公理逐步推导．讲义中没有提出的定理，纵然是已知的知识，也不能引用作为证明的依据．这一点应特别注意．

由于现行中学课本，采用希尔伯特公理系统去研究欧几里德（Euclid 公元前约 330—275）几何学．因此，我们先来研究希氏系统的欧几里德几何学．

由三种不定义概念点，直线和平面以及下面五组20个公理确定的几何学，叫做欧几里德几何学．

第一组　　结合公理 1 ～ 8

第二组　　顺序公理 9 ～12

第三组　　合同公理13～17

第四组　　连续公理18～19

第五组　　平行公理20

这里的点、直线、平面是三种不同的任何东西．但它们必须满足上述20个公理的要求．我们常说的“点属于直线”

（或直线通过点），“在两点之间”，“两合同的线段”，“两直线平行”；其中的“属于”、“在……之间”、“合同”、“平行”；就是点、直线、平面之间的一些关系词。

现在首先研究第一组公理。

§1.1 结合公理和它的推论

公理1. 通过任意给定的两点有一直线。

公理2. 通过任意给定的两点至多有一直线。

过A，B两点的直线，记作直线AB。如果A，B，C是不同的三点，它们在同一直线上，我们就说A，B，C三点共线，如果它们不在同一直线上，就说它们不共线。

公理3. 每一直线上至少有两点，至少有三点不共线。

公理4. 通过任意给定不共线的三点有一平面，每一平面上至少有一点。

公理5. 通过任意给定不共线的三点，至多有一平面。

公理6. 若一直线上的两点在一平面上，则这一直线上的每一点都在这平面上。

公理7. 若两平面有一公共点，则至少还有一公共点。

公理8. 至少有四点不同在一平面上。

注：（1）公理1～3只讲点与直线的结合关系，所以是平面几何的结合公理．增加后面5个公理之后，才能研究空间几何（即三维几何）．

（2）公理7指出欧几里德几何维数不能大于3，公理8指出欧几里德几何的维数不能小于3．

（3）公理1～6仅能断定有三点，三直线，一平面。

公理 1 ～ 8 仅能断定有四点，六直线，四平面.

现在来说明这一组公理是没有矛盾的问题. 要检查一组公理是否有矛盾，通常不从公理之间或从它的推论之间去直接的观察，而是用间接的方法去检查. 即是从客观事物中选取一个真实东西作模型，如果这组公理在模型中显示出不协调的现象，就说明这组公理有矛盾. 反之这组公理无矛盾，现在我们作一个模型来检验上述的八个公理.

设有一个四面体的物体，如图1-1,把它的顶看作公理中的点，把它的棱看作公理中的直线，把它的每个面看作公理中的平面. 我们把公理中的叙述与模型里的事实一一核对：公理 1 说，通过给定两点有一直线，在模型中通过任意两顶有一棱，公理 1 满足. 不难看出其余七个公理在模型里一一满足. 这说明八个公理无矛盾.

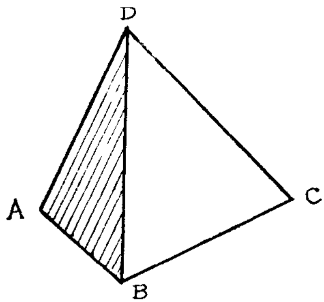


图1-1

下面研究从公理 1 ～ 8 推出的定理：

由公理1. 2及公理4. 5直接推出定理 1

定理1. 两点确定唯一直线，不共线三点确定唯一平面.

定理2. 两条直线最多有一个公共点.

有一公共点的两条直线，叫做相交直线.

定理3. 两条相交直线确定唯一平面

证明：如图 1-2，直线 L_1 与 L_2 相交于点 O，要证明 L_1 与 L_2 确定唯一平面.

（1）根据公理3，在直线 L_1 上除 O 外还有一点 A。在 L_2 上除 O 点外，还有一点 B。

（2）由公理4，不共线三点 O，A，B 确定一平面 M，这平面包含直线 L_1 和 L_2（公理6）。

（3）凡过直线 L_1 和 L_2 的平面都经过 O，A，B 三点，因而都与 M 重合。（证毕）

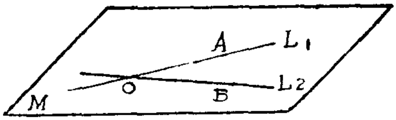


图1-2

定理4. 一直线和不在这直线上的一点确定唯一平面。

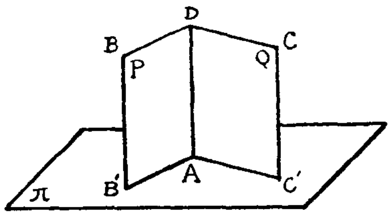
定理5. 空间至少有四个平面和六条直线。

定理6. 空间存在不共面且不相交的二直线。

定理7. 若两平面有一公共点，必公有一直线上的点。有公共直线的两平面，叫做相交平面。

例：每个平面至少有三点不共线。

证明：如图1-3，设有不共线不共面的四点 A、B、C、D。且点 A 在平面 π 上，其余三点在平面 π 外。要证明 π 上至少有三点不共线。



1-3

（1）三点A，D，B确定一平面P（公理4），三点A，D，C确定一平面Q（公理4）

（2）平面P与π有一公共点A，必有一公共直线AB'（定理7）．平面Q与π有一公共点A，必有一公共直线AC'。（定理7）

（3）在直线AB'与AC'上除A点外各任取一点B'，C'它们与A都不共线，否则A、B、C、D四点共面，与假设矛盾，故在平面π上至少有三点不共线。（证毕）

习　　题

1.证明定理1、2、4、5、6、7。

2.用一块三角板作模型，它的顶、边和占有的平面部分，分别看作公理中的点、直线和平面，试检验公理1～6.

3.用结合公理1～8，推出与定理1～7不同的一个定理。

§1.2　顺序公理和它的推论

公理9.若点B在两点A，C之间，则A，B，C是一直线上的不同点，且B也在C，A之间.

公理10．对于任意两点A，B．直线AB上至少有一点C存在，使得B在A，C之间.

公理11．在共线的三点中，一点在其它两点之间的情况不多于一次.

定义1.直线上两点A、B和A、B之间的点在一起所组成的图形叫做线段．记作线段AB或BA．点A和B叫线段的端

点．在A，B之间的点，叫做线段AB的内点．在A，B确定的直线上，除端点、内点之外的点，叫做线段的外点．

定义2．由不共线三点A，B，C确定的三线段AB，BC及CA所组成的图形，叫做三角形．记作$\triangle ABC$．三点A，B，C叫做$\triangle ABC$的顶点．三线段AB，BC与CA叫做$\triangle ABC$的边．

公理12．（巴士Pasch公理）设A，B，C是不共线的三点，L是平面ABC上不通过A，B，C中任何一点的直线．若直线L通过线段AB的一个内点，则直线L一定要通过线段AC或BC的内点．

注：1．点B在A，C之间，记为$A\bar{B}C$，公理9可简记为$A\bar{B}C$或$C\bar{B}A$．

2．公理9、10、11是直线上的顺序公理，它没有确定两个点A，B之间一定存在其它的点，但由公理10和公理11，我们知道每条线段一定有外点．

3．公理12是平面上的顺序公理，由它可以推出空间顺序关系．

应用结合公理与顺序公理可以证明如下定理

定理1．对于任意两点A、C，在直线AC上至少存在一点B，使得B在A、C之间（即$A\bar{B}C$）．

证明：如图1-4

（1）不在直线AC上，有一点E（公理3），使得A，

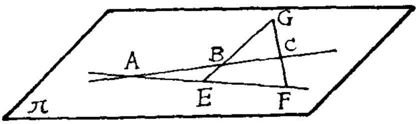


图　1-4

C，E 三点确定一平面 π。

（2）在直线 AE 上有一点 F，使得 E 在 A 与 F 之间（公理10）。

（3）在直线 FC 上有一点 G，使得 C 在 F 与 G 之间（公理10）且 G 在平面 π 上（公理6）。

（4）直线 GE 交三角形 ACF 的一边 AF 于内点 E，则必与边 AC 或 CF 相交（巴士公理）。但 GE 不能与边 CF 相交，否则 GE 与 GF 重合。故必与线段 AC 交于内点 B。这证明线段 AC 有一内点 B。（证毕）

定理2. 在直线 L 上有四点 A，B，C，D。如果 B 在 A，C 之间及点 C 在 A，D 之间，则点 C 在 B，D 之间及点 B 在 A，D 之间。

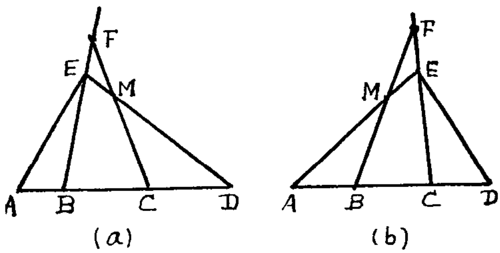


图 1-5

证明：（1）在 L 外任取一点 F（公理3），连结 F，B 与 F，C（公理2），在线段 FB 内取一点 E（定理1），连结 EA 与 ED，如图1-5(a)，因为 $A\bar{B}C$（已知），故直线 FC 与 $\triangle ABE$ 的三边都不相交，（否则 $A\bar{C}B$ 及点 B 与点 C 重合）。但与 $\triangle ADE$ 的边 AD 交于 C（$\because A\bar{C}D$）。由巴士公理

知FC必交边ED于一点，设为M。用巴士公理于$\triangle BED$，知FC交边BD于C，故$B\bar{C}D$。

（2）如果取点E为线段FC的内点，如图1-5(b)，则FB与$\triangle ECD$的每一边不相交（$\because B\bar{C}D$）。又因为$A\bar{B}C$，直线FB与$\triangle AEC$的边AE交于M，用巴士公理于$\triangle AED$，知FB必交边AD于B，故$A\bar{B}D$。（证毕）

定理3.直线上任意两点之间，有无限多个点。

证明：设在直线L上有任意两点A，B。根据定理1在它们之间有一点C，使得$A\bar{C}B$。同理在A与C之间也一定有一点D，使得$A\bar{D}C$。根据定理2就有$A\bar{D}B$，即D是线段AB上与C不同的点，用同样方法，可以证明线段AD上还有点F，且点F也在AB上，且与C，D都不同。这样递推下去，便可以看到线段AB间的点是无限多的。(证毕)

定义3.设L是平面π上的一条直线，A与B是π上不属于L的两个点，如果线段AB不和直线L相交，就说A与B在直线L的同侧，如果线段AB和直线L相交，就说点A与B在直线L的异侧。

定义4.设A，A'，O和B是直线L上的四点，而O在A，B之间，但不在A，A'之间，就说A与A'在L上点O的同侧。而A和B在L上点O的异侧。直线L上点O的同侧上的点的全体，叫做从点O起始的一条射线。

定义5.具有$n-1$个公共端点A_1，A_2，……，A_{n-1}的线段A_0A_1，A_1A_2，……，$A_{n-1}A_n$，叫做连接A_0，A_1，……．A_n的折线，两端的点A_0与A_n叫做折线的端点。若A_0和A_n重合，这折线叫做多边形。点A_0，A_1，A_2，……，A_{n-1}，叫做多边形的顶点，线段A_0A_1，……，$A_{n-1}A_n$。叫做多边形的边。