GAOZHONG

高中

数学

SHUXUE

三年级

TONGBU
XUEXI
ZHIDAO

同步学习指导

上海教育出版社 SHANGHAI JIAOYU CHUBANSHE

高中数学同步学习指导

三 年 级

戴 再 平 主编

上 海 教 育 出 版 社

高中数学同步学习指导

三 年 级

戴 再 平 主编

上海教育出版社出版发行

（上海永福路 123 号）

（邮政编码：200031）

各地新华书店 经销　　上海商务联西印刷厂 印刷

开本 787×1092 1/16 印张 23.75 字数 404,000

1997 年 9 月第 1 版　1998 年 1 月第 2 次印刷

印数 5,151--9,170 本

ISBN 7-5320-5406-3/G·5648　　定价：21.70 元

高中数学同步学习指导

编写人员名单

主　编：戴再平

第一册

主　编：夏国良

编撰者：夏国良　许兴铭

第二册

主　编：陈守礼

编撰者：陈守礼　钮因赟　沈宗浐　许克用　江一鸣　王晓明　柳岫云
胡建军　高　炜

第三册

主　编：黄维龙　马茂年

编撰者：黄维龙　马茂年　万成荣　严根林

前　　言

为迎接21世纪的挑战，我国基础教育的根本任务是为提高全民族的素质奠定基础．作为义务教育后的高中阶段，在教学和复习迎考中，如何体现素质教育的要求，已成为广大师生所关心的重大问题．

对于高中数学教学，我们认为，适当减轻负担，避免陷入"题海战术"的盲区，重视数学思想和方法，提高分析问题和解决问题的能力，是形成学生良好的数学素质的关键所在．为了这个目的，我们感到有必要向大家提供一套比较合适的课外读物．为此，我们将《高中数学同步学习指导》奉献给广大读者．

本书依据《全日制数学教学大纲（修订本）》，章目与全国统编高中数学教材相同．本书共分三册，分别与高中各年级配套同步使用．

本书的内容分为三个层次．

第一层次紧扣基本要求，按单元编写，设有以下栏目：

"学习目标"，根据教学大纲的要求，将学习目标划分为了解、理解、掌握和运用四个等级，使读者明确本单元的教学要求．

"要点分析"，对本单元知识的重点、难点以及学生易犯的错误进行分析，用典型的例题加以说明．

第二层次按章编写，设有以下栏目：

"回顾与提高"，总结本章知识的框架、重点、难点以及在学习中应注意的问题，回顾与本章有关的数学思想和方法，并精选了部分例题．

第三层次是练习与评估，设有以下栏目：

"基本练习"，按单元设置，分(A)、(B)两组，(A)为基本题，题型多样；(B)为稍难题，有利于加深知识的理解和方法的掌握．

"综合练习"，按章设置，题型多样，难度适中，较为灵活，有一部分与其他章节的知识相综合的题目．

"单元评估"，按章设置，为读者提供评估学习效果的依据．这些试题均经过浙江省部分重点高中测试．

书末附有题目的答案或提示，以备读者自检．

本书由戴再平教授主编，执笔者为六所浙江省一级重点高中的教师，具有长期的丰富的教学和命题经验．

本书的不足之处恳请读者批评指正．

本书编写组

1997年7月

目　　录

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

函数是高中数学的一个重要内容，它是学好高中数学的基础之一. 同时，函数思想是解决数学问题的重要数学思想之一，它的应用广泛，贯穿于高中数学之中. 在高考数学试题中，函数所占比例要高于它在课时中的比例. 其中集合，函数的三要素，函数图象、函数性质、反函数，二次函数，幂函数、指数函数和对数函数，指数方程和对数方程等在高考试题中是经常出现的.

一　集合的概念及其基本理论

【学习目标】

理解集合、子集、交集、并集、补集的概念，了解空集和全集的意义，了解属于、包含、相等关系的意义，能掌握有关的术语和符号，能正确地表示一些较简单的集合.

【要点分析】

1. 要正确理解集合的概念，同时必须掌握集合的基本性质，即其元素的任意性、确定性、互异性和无序性.

例 1　已知 $M=\{2,a,b\}$，$N=\{2a,2,b^2\}$，且 $M=N$，求 a，b 的值.

解　$\because$ $M=N$，集合中元素具有无序性，

$$\therefore \begin{cases}a=2a,\\ b=b^2;\end{cases} \text{或} \begin{cases}a=b^2,\\ b=2a.\end{cases}$$

解上述两方程组，得

$$\begin{cases}a=0,\\ b=0;\end{cases} \text{或} \begin{cases}a=0,\\ b=1;\end{cases} \text{或} \begin{cases}a=0,\\ b=0;\end{cases} \text{或} \begin{cases}a=\dfrac{1}{4},\\ b=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

又$\because$ 集合中元素具有互异性，

$$\therefore \begin{cases}a=0,\\ b=1;\end{cases} \text{或} \begin{cases}a=\dfrac{1}{4},\\ b=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

2. 要正确理解子集与真子集的概念，空集与全集的概念，必须掌握元素与集合、集合与集合之间的关系，掌握集合相等的概念及空集的概念在简化叙述和集的运算中的作用.

例 2　已知 $A=\{a,b,c,d,e\}$，$B=\{a,c,e,f\}$，$C\subseteq A$，$C\subseteq B$，求满足上述条件的集

合 C.

解 $\because C\subseteq A$ 且 $C\subseteq B$, $\therefore C\subseteq A\cap B$.

又 $\because A\cap B=\{a,c,e\}$, $\therefore$ 集合 C 的可能情况有 $2^3=8$ 种,即 $\varnothing$, $\{a\}$, $\{c\}$, $\{e\}$, $\{a,c\}$, $\{a,e\}$, $\{c,e\}$, $\{a,c,e\}$.

例 3 若 $x,y\in R$, $M=\{t\mid t=x^2-3x+1\}$, $N=\{s\mid s=y^2+3y+1\}$,试判断 M 与 N 的关系.

解 $\because t=x^2-3x+1=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}\geqslant-\dfrac{5}{4}$;

$$s=y^2+3y+1=\left(y+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\geqslant-\frac{5}{4};$$

$$\therefore M=N=\left\{x\,\middle|\,x\geqslant-\frac{5}{4}\right\}.$$

3. 必须掌握集合的交、并、补的运算.注意利用德·摩根律 $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$, $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$,使集合运算简捷.若不给出集合中的元素,只给出若干抽象的集合及其某些关系时,还需掌握运用文氏图来解决有关问题.

例 4 方程 $x^2-px+q=0$ 的解集为 A,方程 $x^2+qx-p=0$ 的解集为 B,若 $A\cap B=\{1\}$,求 $A\cup B$.

解 $\because A\cap B=\{1\}$, $\therefore 1\in A$ 且 $1\in B$,于是有 $\begin{cases}p+q=1\\p-q=1\end{cases}$,解得 $\begin{cases}p=1\\q=0\end{cases}$,从而 $A=\{0,1\}$, $B=\{-1,1\}$. $\therefore A\cup B=\{-1,0,1\}$.

例 5 已知 $A=\{x\mid x^2+3x-10<0\}$, $B=\{x\mid |x|=y+1, y\in A\}$,求 $A\cap B$, $A\cup B$.

解 $A=\{x\mid x^2+3x-10<0\}=\{x\mid -5<x<2\}$,

$\because y\in A$, $\therefore -5<y<2$, $-4<y+1<3$.

又 $\because |x|=y+1$, $\therefore -4<|x|<3$, $B=\{x\mid -3<x<3\}$.

$\therefore A\cap B=\{x\mid -3<x<2\}$, $A\cup B=\{x\mid -5<x<3\}$.

例 6 已知 $I=\{x\mid x$ 是不大于 30 的质数$\}$, A、B 是 I 的两个子集,且满足 $A\cap\overline{B}=\{5,13,23\}$, $\overline{A}\cap B=\{11,19,29\}$, $\overline{A}\cap\overline{B}=\{3,7\}$,求集合 A, B.

解 $\because I=\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29\}$,作图 1-1 可知 $A\cap B=\{2,17\}$.

$\therefore A=\{2,5,13,17,23\}$, $B=\{2,11,17,19,29\}$.

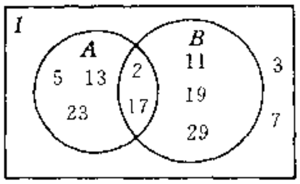


图 1-1

4. 处理集合问题时,要注意化简集合的表达式,如果集合中含有字母,要注意对字母的讨论.对于集合中有限集的元素个数的计算,可以掌握以下两个公式:

(1) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$;

(2) $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$.

其中 $n(M)$ 表示有限集 M 的元素个数.

例 7 已知 $A=\{x|x^2+(p+2)x+1=0,x\in R\}$，若 $A\cap R^+=\varnothing$，求 p 的取值范围.

解 $\because A\cap R^+=\varnothing$，$\therefore$ 集合 A 有下列三种情况：

(1) $A=\varnothing$，即 $\Delta=(p+2)^2-4<0$，解得 $-4<p<0$；

(2) 集合 A 有一个元素，且这个元素不属于 R^+，即有

$$\begin{cases}\Delta=(p+2)^2-4=0,\\ -\dfrac{p+2}{2}\leqslant 0.\end{cases}\quad \text{解得 } p=0；$$

(3) 集合 A 有两个元素，且这两个元素都不属于 R^+，

$$\because \frac{c}{a}=1>0,\therefore \begin{cases}\Delta=(p+2)^2-4>0,\\ -(p+2)<0,\end{cases}\text{解得 } p>0.$$

综上(1)、(2)、(3)得 $p>-4$.

例 8 已知集合 $A=\{x|x^2-ax\leqslant x-a\}$，$B=\{x|1\leqslant\log_2(x+1)\leqslant 2\}$，$c=\{x|x^2+bx+c>0\}$.

(1) 若 $A\cap B=A$，求 a 的取值范围；

(2) 若 $B\cap C=\varnothing$，且 $B\cup C=R$，求 b,c 的值.

解 $A=\{x|(x-1)(x-a)\leqslant 0\}$，$B=\{x|1\leqslant x\leqslant 3\}$.

(1) $\because A\cap B=A$，$\therefore A\subseteq B$. 欲使 $A\subseteq B$，则可得 $1\leqslant a\leqslant 3$.

(2) 根据 $A\cup\overline{A}=I$，$A\cap\overline{A}=\varnothing$ 可得 $C=\overline{B}=\{x|x>3$ 或 $x<1\}=\{x|x^2-4x+3>0\}=$
$\{x|x^2+bx+c>0\}$，$\therefore b=-4,c=3$.

例 9 某班 48 人中，爱好数学的 28 人，爱好化学的 22 人，求数学与化学都爱好的可能人数的最大值和最小值.

解 设 $M=\{$某班学生$\}$，$A=\{$爱好数学者$\}$，$B=\{$爱好化学者$\}$，则 $n(M)=48$，$n(A)=28$，$n(B)=22$.

(1) 若 $B\subset A$，则 $A\cap B=B$，$n(A\cap B)=n(B)=22$(人)；

(2) 若 $A\cup B=M$，则 $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(M)=2$(人).

故所求数学与化学都爱好的可能人数最小值为 2 人，最大值为 22 人.

5. 数学中有些问题(我们不妨记为 A)，从正面入手或正面入手考虑较繁，即“正向”思维受阻时，我们可转而考查其反面($\overline{A}$)，当“整体”(或称“全集”)I($I=A\cup\overline{A}$)与$\overline{A}$为简单易求(证)时，通过 I 与$\overline{A}$求(证)A 就是一条简单易行的路子，我们称这种解决问题的方法为“补集法”.“补集法”体现了正难则反的化归思想，从思维形式来看，它是一种逆向思维，数学中凡正难反易的问题均可考虑用此法来解.

例 10 若关于 x 的三个方程

$$x^2+4ax-4a+3=0; \qquad ①$$

$$x^2+(a-1)x+a^2=0; \qquad ②$$

$$x^2+2ax-2a=0 \qquad ③$$

中至少有一个方程有实根，求实数 a 的范围.

解　$I=\{a\mid a\in R\}$. 该问题的反面，方程①、②、③均无实根，其充要条件是

$$\left.\begin{array}{l}\Delta_1=(4a)^2-4(-4a+3)<0,\\ \Delta_2=(a-1)^2-4a^2<0,\\ \Delta_3=(2a)^2-4(-2a)<0.\end{array}\right\}\Rightarrow -\frac{3}{2}<a<-1,\text{即}\overline{A}=\left\{a\,\middle|\,-\frac{3}{2}<a<-1\right\},$$

$$\therefore\ a\in A=\left\{a\,\middle|\,a\leqslant-\frac{3}{2}\text{或 }a\geqslant-1\right\}.$$

【基本练习】

练　习　一

(A)

一、选择题：

1. 集合$\varnothing$与$\{0\}$的关系是　　　　(　)

(A) $\{0\}=\varnothing$；　(B) $\varnothing\in\{0\}$；　(C) $\{0\}\subset\varnothing$；　(D) $\varnothing\subset\{0\}$.

2. 集合$A=\{x\mid -x<0\}$、$B=\{x\mid -x^2<0\}$，则$\overline{A}\cap\overline{B}$等于　　　　(　)

(A) $\{x\mid x>0\}$；(B) $\{x\mid x\geqslant0\}$；(C) $\{x\mid x\leqslant0\}$；(D) $\{x\mid x<0\}$.

3. 设S、T是两个非空集合，且$S\not\subseteq T$，$T\not\subseteq S$，令$X=S\cap T$，那么$S\cup X$等于　(　)

(A) X；　(B) T；　(C) $\varnothing$；　(D) S.

4. 已知$M=\{x\mid x\leqslant1\}$，$N=\{x\mid x>p\}$，要使$M\cap N\neq\varnothing$，则p所满足的条件是

(　)

(A) $p>1$；　(B) $p\geqslant1$；　(C) $p<1$；　(D) $p\leqslant1$.

二、填空题：

5. 集合$\{1,2,3\}$的子集总共有______个.

6. 设集合E满足：$\{0,1\}\subseteq E\subset\{0,1,2,3,4\}$，写出所有的集合$E$为______.

7. 如果$I=\{a,b,c,d,e\}$，$M=\{a,c,d\}$，$N=\{b,d,e\}$，其中I是全集，那么$\overline{M}\cap\overline{N}=$______.

8. 设全集$I=\{(x,y)\mid x、y\in R\}$，集合$M=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{y-3}{x-2}=1\right\}$，$N=\{(x,y)\mid y\neq x+1\}$，那么$\overline{M\cup N}=$______.

三、解答题：

9. 已知$a\in R$，集合$A=\{-3,a^2,a+1\}$，$B=\{a-3,2a-1,a^2+1\}$，如果$A\cap B=\{-3\}$. 求$A\cup B$.

10. 已知$I=\{x\mid x^2<50,x\in N\}$，$\overline{M}\cap N=\{1,6\}$，$M\cap\overline{N}=\{2,3\}$，$\overline{M}\cap\overline{N}=\{5\}$. 求$M$和$N$.

11. 已知$x\in R$，$y\in N$且$A=\{y\mid y=x^2-4x+12\}$，$B=\{y\mid y=-x^2-2x+14\}$. 求①$A\cap B$；②$A\cup B$；③$A\cap\overline{B}$.

12. 某中学高一(1)班有学生52人，参加数学兴趣小组的有26人，参加物理兴趣小组

的有 34 人,若数学、物理兴趣小组都参加的有 x 人,求 x 的范围.

(B)

一、选择题:

1. 设集合 $M=\{x \mid x<\sqrt{10}\}$, $a=3$, 则下列各式正确的是 ( )

(A) $a\notin M$; (B) $a\subset M$; (C) $\{a\}\in M$; (D) $\{a\}\subseteq M$.

2. 若 $A=\{x \mid x<3, x\in Z\}$, $B=\{y \mid y\leqslant 2, y\in Z\}$, 全集 $I=Z$, 则 $A\cap\overline{B}$ 等于 ( )

(A) $\{0\}$; (B) $\{2,3\}$; (C) $\varnothing$; (D) Z.

3. 由实数 $x, -x, |x|, \sqrt{x^2}, -\sqrt[3]{x^3}$ 所组成的集合,最多含有元素的个数为 ( )

(A) 1个; (B) 2个; (C) 3个; (D) 4个.

4. 若 $A\subset B\subset C$, 并且 $\overline{A_B}$ 为 A 在 B 中的补集, $\overline{A_C}$ 为 A 在 C 中的补集, 则 ( )

(A) $\overline{A_B}=\overline{A_C}$; (B) $\overline{A_B}\subset\overline{A_C}$; (C) $\overline{A_B}\supset\overline{A_C}$; (D) $\overline{A_B}\supseteq\overline{A_C}$.

5. 已知 $A=\{x \mid x^2-2x-8<0\}$, $B=\{x \mid x-a<0\}$, 若 $A\cap B=\varnothing$, 则 a 的取值范围是 ( )

(A) $(-\infty,-2]$; (B) $(-2,4)$; (C) $[-2,4]$; (D) $[4,+\infty)$.

6. 已知 $M=\{x \mid x=t^2+1\}$, $N=\{x \mid x=4-|t|\}$, 其中 $t\in R$, 则 $M\cap N$ 等于 ( )

(A) $\{x \mid <x<4\}$; (B) $\{x \mid 0\leqslant x\leqslant 4\}$;

(C) $\{x \mid 1<x<4\}$; (D) $\{x \mid 1\leqslant x\leqslant 4\}$.

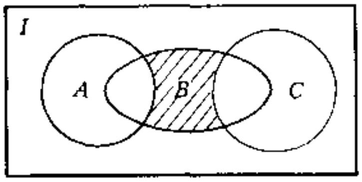
7. 图中阴影部分,下列表示中正确的式子个数为 ( )

① $\overline{(A\cup C)}\cap B$; ② $(\overline{A}\cap B)\cap(\overline{C}\cap B)$;

③ $(\overline{A}\cap\overline{C})\cap B$; ④ $\overline{(A\cup\overline{B})}\cap\overline{(C\cup\overline{B})}$.

(A) 1个; (B) 2个;

(C) 3个; (D) 4个.



(第7题)

8. 设全集为 R, $f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$, $M=\{x \mid f(x)\neq 0\}$, $N=\{x \mid g(x)\neq 0\}$, 那么集合 $\{x \mid f(x)g(x)=0\}$ 等于 ( )

(A) $\overline{M}\cap\overline{N}$; (B) $\overline{M}\cup N$; (C) $M\cup\overline{N}$; (D) $\overline{M}\cup\overline{N}$.

二、填空题:

9. 设集合 $A=\{a^2, a+1, -3\}$, $B=\{a-3, 2a-1\}$, $A\cap B=\{-3\}$, 则实数 a 等于 ______.

10. 已知 $s(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0;\\ -1, & x<0,\end{cases}$ 则 $g(x)=s(|x|)+|s(x)|$ 的值构成的集合为 ______.

11. 集合 $A=\{a,b,c,d,e,f\}$, 集合 $B\subset A$, 并且 $a\in A\cap B$, $e\notin A\cap B$, 则集合 B 的个数为 ______.

12. 已知 A、B、C、D 为非空集合, $A\cap B=\varnothing$, $C=\{A$ 的真子集$\}$, $D=\{B$ 的真子集$\}$, 那么 $C\cap D=$ ______.

13. 若 $A=\{x \mid x^3-ax^2+\pi x=0\}$, $B=\{x \mid x^3-(e+i)x^2+bx=0\}$, 且 $A\cup B=$

$\{0,1,i,\pi,e\}$,则 $A=$ ______;$B=$ ______.

三、解答题:

14. 若 $A=\{a\mid$二次方程$x^2-ax+1=0$有实根,$a\in R\}$,$B=\{a\mid$二次方程$ax^2-x+1=0$无实根,$a\in R\}$.求 $A\cap B$,$A\cup B$.

15. 已知 $M=\{(x,y)\mid |\sin\pi y|+\mathrm{tg}^2\pi x=0\}$,$N=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$,若 $P\subseteq M\cap N$,求集合 P 的个数.

16. 已知集合 $M=\{x\mid |x-a|<1\}$,$N=\{x\mid x^2-(a+3)x+3a>0\}$,若 $M\cup N=R$,求实数 a 的取值范围.

17. 已知集合 A 和集合 B 各含有 12 个元素,$A\cap B$ 含有 4 个元素.试求同时满足下面两个条件的集合 C 的个数:

(1) $C\subset(A\cup B)$且 C 中含有 3 个元素;(2) $C\cap A\neq\varnothing$.

二　函数的定义、图象和性质

【学习目标】

1. 了解映射的概念,在此基础上理解函数及其有关的概念,掌握互为反函数的函数图象间的关系.

2. 理解函数的单调性和奇偶性的概念,并能判断一些简单函数的单调性和奇偶性,能利用函数的奇偶性与图象的对称性的关系描绘函数图象.

【要点分析】

1. 要理解函数的概念,能根据函数三要素判断两个函数是否为同一个函数;要理解函数的符号(对应法则),能掌握函数的三种表示法,会求函数的定义域与某些函数的值域.

例 1　下列函数中,哪些是相同的函数,哪些是不同的函数?

(1) $f(x)=\lg x^3, g(x)=3\lg x$;　　(2) $f(x)=x-3, g(x)=\sqrt{x^2-6x+9}$;

(3) $f(x)=x, g(x)=\arccos(\cos x)$;　　(4) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}, g(x)=x-1$.

解　在(1)中,$f(x)$与 $g(x)$的定义域都是 R^+,对应法则也相同,所以 $f(x)$与 $g(x)$是相同的函数;

在(2)中,$g(x)=|x-3|$,$f(x)$与 $g(x)$的定义域都是 R,对应法则不同,所以 $f(x)$与 $g(x)$不是相同的函数;

在(3)和(4)中,$f(x)$与 $g(x)$定义域不同,所以,$f(x)$与 $g(x)$都不是相同的函数.

说明:两个函数当且仅当其定义域与对应法则都相同时才是相同的函数.

例 2　已知 $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$,求 $f(x)$,$f(x+1)$与 $f(x^2)$.

解　设$u=\sqrt{x}+1\geqslant 1$,则$\sqrt{x}=u-1$,$x=(u-1)^2$ 于是

$$f(u)=(u-1)^2+2(u-1)=u^2-1\ (u\geqslant 1).$$

$\therefore$ $f(x)=x^2-1\ (x\geqslant 1)$;$f(x+1)=(x+1)^2-1=x^2+2x\ (x\geqslant 0)$;

$f(x^2)=(x^2)^2-1=x^4-1(x\leqslant-1$ 或 $x\geqslant1)$.

说明：通过换元，把 $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$ 化为 $f(u)=u^2-1$ 时，要注意 $f(u)$ 的定义域是 $\{u\mid u\geqslant1\}$，这样才能保证转化的等价性.

例 3 设函数 $f(x)=\lg(x^2-x-2)$ 的定义域为 A，函数 $g(x)=\sqrt{\frac{x+2}{1-x}}$ 的定义域为 B，求 $A\cap B$.

解 $\because A=\{x\mid x^2-x-2>0\}=\{x\mid x<-1$ 或 $x>2\}$,

$$B=\left\{x\,\middle|\,\frac{x+2}{1-x}\geqslant0\right\}=\{x\mid-2\leqslant x<1\},$$

$\therefore A\cap B=\{x\mid-2\leqslant x<-1\}$（或 $[-2,-1)$）.

例 4 AB 是单位半圆的直径（水平放置），动点 P 从 A 点出发先过半圆弧再沿直径 BA 回到 A 点，试把动点 P 到定点 A 的水平距离表示为路程 x 的函数.

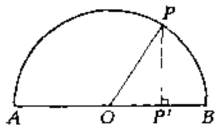


图 1-2

解 (1) 当 P 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上运动时，设 $\overset{\frown}{AP}=x$，则 $\angle AOP=x(0\leqslant x<\pi)$，过 P 作 AB 的垂线，垂足为 P'，设 $AP'=s$，则 $s=1-\cos x(0\leqslant x<\pi)$.

(2) 当 P 在直径 BA 上运动时，$s=2+\pi-x(\pi\leqslant x\leqslant2+\pi)$.

由(1)、(2)得 $$s=\begin{cases}1-\cos x & \text{当 } 0\leqslant x<\pi \text{ 时},\\ 2+\pi-x & \text{当 } \pi\leqslant x\leqslant2+\pi \text{ 时}.\end{cases}$$

说明：函数关系一般有三种表示方法，即解析法、图象法与列表法. 本例所用的是解析法，其优点是形式简明，在求函数值域或讨论函数的性质时特别方便.

例 5 用长为 l 的铁丝弯成下部为矩形，上部为半圆形的框架. 若矩形底边长为 $2x$，求此框架围成的面积 y 与 x 的函数式，并写出它的定义域.

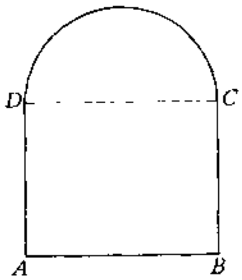


图 1-3

解 设 $AB=2x$，则 $\overset{\frown}{CD}=\pi x$，于是 $AD=\frac{l-2x-\pi x}{2}$，因此 $y=2x\cdot\frac{l-2x-\pi x}{2}+\frac{\pi x^2}{2}=-\frac{\pi+4}{2}x^2+lx$.

由 $\begin{cases}2x>0,\\ \frac{l-2x-\pi x}{2}>0\end{cases}$ 得 $0<x<\frac{l}{2+\pi}$.

$\therefore$ 函数式是 $y=-\frac{\pi+4}{2}x^2+lx$，定义域是 $\left(0,\frac{l}{2+\pi}\right)$.

说明：实际问题或几何问题的函数定义域，除要考虑函数解析式有意义外，还应考虑使实际问题或几何问题有意义.

例 6 求下列函数的值域.

(1) $y=\frac{3}{x^2}\ (1\leqslant x\leqslant2)$； (2) $y=-x^4+x^2+\frac{1}{4}\ (x\in R)$；

(3) $y=\sqrt{4x-3}+\sqrt{4x^2+4x-3}+3$； (4) $y=x+\frac{1}{x}+1\ (x\neq0)$.

解 (1) 因为在$[1,2]$上$y=\frac{3}{x^2}$是单调减函数,所以函数的值域是$\left[\frac{3}{4},3\right]$.

(2) $y=-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$, $\because$ $-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant 0$, $\therefore$ $y\leqslant\frac{1}{2}$. 当$x^2-\frac{1}{2}=0$即$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$时$-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2=0$,此时$y=\frac{1}{2}$. $\therefore$ $y=-x^4+x^2+\frac{1}{4}$的值域是$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$.

(3) 由$\begin{cases}4x-3\geqslant 0,\\ 4x^2+4x-3\geqslant 0.\end{cases}$ 得 $x\geqslant\frac{3}{4}$, 而 $\sqrt{4x^2+4x-3}=\sqrt{(2x+1)^2-4}\geqslant\sqrt{\left(2\times\frac{3}{4}+1\right)^2-4}=\frac{3}{2}$,于是$y\geqslant 0+\frac{3}{2}+3=\frac{9}{2}$. 故所求函数的值域为$\left[4\frac{1}{2},+\infty\right)$.

(4) $\because$ $y=x+\frac{1}{x}+1$, $\therefore$ $x^2+(1-y)x+1=0$. $\because$ 方程有实根, $\therefore$ $\Delta=(1-y)^2-4\geqslant 0$即$(y-1)^2\geqslant 4$, $\therefore$ $y-1\leqslant -2$或$y-1\geqslant 2$于是$y\leqslant -1$或$y\geqslant 3$. 当$x=-1$时$y=-1$;当$x=1$时$y=3$,所以$y=x+\frac{1}{x}+1$的值域是$(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$.

2. 要理解反函数的概念,掌握给出函数$y=f(x)$的解析式(其反函数存在,不必论证),求其反函数$y=f^{-1}(x)$的解题步骤:

(1) 由$y=f(x)$反解出$x=f^{-1}(y)$;

(2) 将x、y互换,改写为$y=f^{-1}(x)$;

(3) 由$y=f(x)$的值域确定反函数的定义域.

能利用"函数$y=f(x)$与反函数$y=f^{-1}(x)$的图象关于直线$y=x$对称"解决有关问题.

例7 求下列函数的反函数.

(1) $y=-\sqrt{x-1}$ $(x\geqslant 1)$;(2) $y=\log_2(1-x)$ $(x\geqslant 0)$.

解 (1) 由$y=-\sqrt{x-1}$得$y^2=x-1$, $\therefore$ $x=y^2+1$, $\because$ $x\geqslant 1$, $y\leqslant 0$. 于是有$x=y^2+1(y\leqslant 0)$. $\therefore$ $y=-\sqrt{x-1}(x\geqslant 1)$的反函数是$y=x^2+1$ $(x\leqslant 0)$.

(2) 由$y=\log_2(1-x)$得$x=1-2^y$. 由于$y=\log_2(1-x)(x\geqslant 0)$的定义域是$[0,1)$,所以它的值域是$(-\infty,0]$,于是$x=1-2^y$ $(y\leqslant 0)$.

$\therefore$ $y=\log_2(1-x)(x\geqslant 0)$的反函数是$y=1-2^x$ $(x\leqslant 0)$.

说明:在求反函数时,要注意所给函数的值域(由其定义域确定),从而确定反函数的定义域.

例8 (1) 求函数$f(x)=\frac{2x^2+4x+3}{x^2+2x+3}(x>-1)$和$f(x)=\frac{3x+1}{2x-3}$ $\left(x\neq\frac{3}{2}\right)$的反函数;(2) 已知$f(x)=\frac{1+2x}{3+4x}$,求$f^{-1}[f(x)]$及$f[f^{-1}(x)]$.

解 (1) 设$y=\frac{2x^2+4x+3}{x^2+2x+3}=\frac{2(x+1)^2+1}{(x+1)^2+2}$,则有$(x+1)^2=\frac{1-2y}{y-2}\geqslant 0$得$y\in\left[\frac{1}{2},2\right)$,又$x>-1$,所以$x=\sqrt{\frac{1-2y}{y-2}}-1$. 故$f(x)=\frac{2x^2+4x+3}{x^2+2x+3}$ $(x>-1)$的反函数为

$$y=f^{-1}(x)=\sqrt{\frac{1-2x}{x-2}}-1, x\in\left[\frac{1}{2},2\right).$$

设 $y=\dfrac{3x+1}{2x-3}$，则有 $2xy-3y=3x+1$，$x=\dfrac{3y+1}{2y-3}$，所以 $f(x)=\dfrac{3x+1}{2x-3}\left(x\neq\dfrac{3}{2}\right)$的反函数为 $y=f^{-1}(x)=\dfrac{3x+1}{2x-3}\left(x\neq\dfrac{3}{2}\right)$即 $f(x)=f^{-1}(x)$.

(2) $f(x)=\dfrac{1+2x}{3+4x}$的反函数是 $f^{-1}(x)=\dfrac{3x-1}{2-4x}\ \left(x\neq\dfrac{1}{2}\right)$.

$\therefore\ f^{-1}[f(x)]=\dfrac{3f(x)-1}{2-4f(x)}=x\ \left(x\neq-\dfrac{3}{4}\right)$；$f[f^{-1}(x)]=\dfrac{1+2f^{-1}(x)}{3+4f^{-1}(x)}=x\ \left(x\neq\dfrac{1}{2}\right)$.

说明：(1) 当函数型 $y=\dfrac{Ax+B}{Cx-A}(A^2+BC\neq0)$时，$f(x)=f^{-1}(x)$，其中 A、B、C 为常数，特征是分式中分子的一次项系数与分母中的常数项必须互为相反数，而与 B、C 取值无关.

(2) 本例(2)中，函数 $f^{-1}[f(x)]$与 $f[f^{-1}(x)]$有相同的表达式，但定义域不同，因此它们是不同的函数.

3. 要掌握函数的图象和性质的有关问题，函数的图象是函数关系的一种表示，它是从“形”的方面刻划函数的变化规律，通过函数图象，可以形象地反映函数的性质. 利用函数的图象既有助于记忆各类初等函数的性质，又可以运用数形结合的方法去解决某些问题. 在高考中，有关函数的图象主要考查：

(1) 几类初等函数(一次与二次函数、幂函数、指数函数和对数函数、三角函数)的图象特征.

(2) 函数的图象变换，主要是指：

平移变换——函数 $y=f(x)$与 $y=f(x+a)+b$ 的图象之间的关系；

伸缩变换——函数 $y=f(x)$与 $y=Af(wx)(A>0,w>0)$的图象之间的关系；

对称变换——例如，图象关于 x 轴对称、关于 y 轴对称、关于原点对称.

函数性质主要是指函数的单调性、奇偶性与周期性，要求掌握这些性质的意义(定义)，要求会用定义判断函数的奇偶性与单调性，并能运用这些性质解题.

例 9 画出下列函数的图象，并指出(2)中函数的单调区间. (1) $y=\dfrac{x}{|x|}(x\neq0)$；(2) $y=x^2-3|x|+\dfrac{1}{4}$ $(x\in R)$.

解 (1) $y=\begin{cases}1\ (x>0)\\-1\ (x<0).\end{cases}$

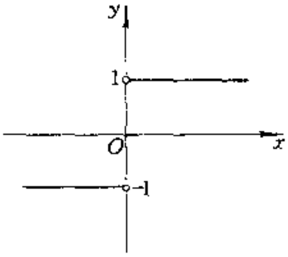


图 1-4

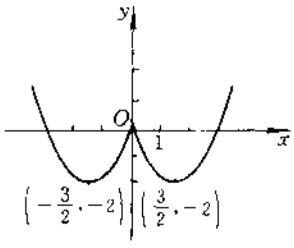


图 1-5

(2) $y=\begin{cases}\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-2\ (x\geqslant0)\\\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-2\ (x<0).\end{cases}$

增区间$\left[-\frac{3}{2},0\right]$与$\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$；

减区间$\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]$与$\left[0,\frac{3}{2}\right]$.

说明：(1)函数(1)是奇函数；函数(2)是偶函数.画图时可利用对称性.(2)单调区间写开区间或者闭区间，都是可以的.

例 10 指出下列各小题中的两个函数图象之间的关系.

(1) $y=\frac{1}{3}(x-1)^2$ 与 $y=\frac{1}{3}(x+1)^2+\frac{1}{2}$；(2) $y=\log_2 x$ 与 $y=\log_{\frac{1}{2}}[4(x-1)]$.

解 (1) 将 $y=\frac{1}{3}(x-1)^2$ 的图象向左平移 2 个单位，得到 $y=\frac{1}{3}(x+1)^2$ 的图象，再把后者向上平移$\frac{1}{2}$单位，就得到 $y=\frac{1}{3}(x+1)^2+\frac{1}{2}$的图象.

(2) $\because$ $y=\log_{\frac{1}{2}}[4(x-1)]=-\log_2(x-1)-2$，$\therefore$ 把曲线 $y=\log_2 x$ 向右平移 1 个单位，得到曲线 $C:y=\log_2(x-1)$，再以 x 轴为对称轴，得到曲线 $C':y=-\log_2(x-1)$(即曲线 C' 与 C 是关于 x 轴对称的).最后，将曲线 C' 向下平移 2 个单位，就得曲线 $y=-\log_2(x-1)-2$，即得到 $y=\log_{\frac{1}{2}}[4(x-1)]$的图象.

例 11 用定义判断下列函数的奇偶性.

(1) $f_1(x)=x^{-\frac{2n}{2n+1}}$ $(n\in N,x\neq 0)$；

(2) $f_2(x)=\log_2(x+\sqrt{x^2+1})$ $(x\in R)$；

(3) $f_3(x)=\lg x^2+\lg\frac{1}{x^2}$ $(x\neq 0)$；

(4) $f_4(x)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^x-1}\right)\mathrm{tg}x$.

解 (1) $\because$ $n\in N$，$\therefore$ $2n$ 是偶数，$2n+1$ 是奇数.于是 $f_1(-x)=(-x)^{-\frac{2n}{2n+1}}=x^{-\frac{2n}{2n+1}}=f_1(x)$，$\therefore$ $f_1(x)$是偶函数.

(2) $\because$ $f_2(-x)=\log_2(-x+\sqrt{(-x)^2+1})=\log_2(\sqrt{x^2+1}-x)=\log_2\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$
$=-\log_2(x+\sqrt{x^2+1})=-f_2(x)$，$\therefore$ $f_2(x)$是奇函数.

(3) $\because$ $f_3(x)=\lg x^2+\lg\frac{1}{x^2}=0$，$\therefore$ $f_3(-x)=f_3(x)$且 $f_3(-x)=-f_3(x)$.$f_3(x)$的定义域关于原点对称，所以 $f_3(x)$既是奇函数又是偶函数.

(4) 函数 $f_4(x)$ 的定义域是 $\left\{x\,\middle|\,x\in R\text{ 且 }x\neq\frac{1}{2}k\pi,\ k\in Z\right\}$，关于原点对称.$\because$
$f_4(-x)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{-x}-1}\right)\mathrm{tg}(-x)=-\left(\frac{1}{2}+\frac{2^x}{1-2^x}\right)\mathrm{tg}x=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^x-1}\right)\mathrm{tg}x=f_4(x)$，$\therefore$ $f_4(x)$为偶函数.

说明：判断函数 $f(x)$的奇偶性就是判断 $f(-x)$是否等于 $\pm f(x)$，它等价于判断$f(x)\mp f(-x)$是否为零且还须考虑其定义域是否关于原点对称.

例 12 已知 $f(x)=x^2+c$，且 $f[f(x)]=f(x^2+1)$.