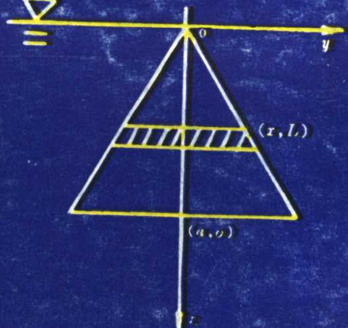
中专教学、大专自学、函授参考书

一元微积分 学习指导书

主　编　陈义政　朱旭华
副主编　王焕芝　汤玉香



石油大学出版社

一元微积分学习指导书

主　编　陈义政　朱旭华

副主编　王焕芝　汤玉香

　　　　施俊英　孔　生

编　委　（按编写章次排列）

　　　　吕　炜　刘德厚

　　　　施俊英　汤玉香

　　　　赵冠珍　孔　生

　　　　张月玲　栗洪莲

　　　　李玉华　徐曰芳

　　　　王焕芝　张　竹

石油大学出版社

鲁新登字10号

内容提要

本书针对中等专业学校学生在学习一元微积分学时缺少深度适中、针对性强的学习参考书的实际编写而成，内容包括函数、极限与连续、导数及其应用、微分及其应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程等。

本书内容编排新颖，阐述深入浅出，贴近读者，引人入胜。除可供全日制中等专业学校各专业学生学习使用外，对职工中专、职业中专、技工学校的学生也有较大的帮助。

本书对参加大、中专自学考试和函授学习的考生学习一元微积分学，具有极大的指导作用。

一元微积分学习指导书
陈义政　朱旭华　主编
王焕芝　汤玉香　施俊英　孔　生　副主编

石油大学出版社出版
（山东省东营市）
新华书店发行
东营市第二印刷厂印刷

开本 787×1092　1/32　10印张　224千字
1993年12月第1版　1993年12月第1次印刷
印数 1—5500册
ISBN 7-5636-0374-3/O_1·25
定价：6.80元

前 言

作为高等数学的基础部分，一元微积分学在工程技术、生产实践等各个领域的应用日趋广泛，已成为自然科学和社会科学各学科的通用工具。因此，无论是在校的各大、中专院校的学生，还是正在从事各类科学技术工作的人员来说，学好一元微积分学是十分重要的。

思维方法的转变，是学好一元微积分学的关键。具体地讲，应逐步掌握由常量到变量、由具体到一般、由直观到抽象的思维方法，尤其是逐步理解并掌握极限的内涵和方法，是学好一元微积分学的关键。针对以上实际，本书确定的编写指导思想是：导学、导用，培养读者良好的数学思维品质。因此，本书在各个章节中都特别注意在定义、概念、原理等基础知识和基本技能上做深入的分析、概括，同时通过典型例题的解答与进一步剖析，总结并提炼出最优的解题方法和技巧，以帮助读者抓住重点和难点，牢固掌握一元微积分学的通性、通法，培养良好的思维品质，提高分析问题和解决问题的能力。

本书立足于国家教委审定的《中等专业学校数学教学大纲》的要求，又力求高于、宽于该大纲和相应教材的要求。因此，本书不仅适用于各类中等专业学校（一般中专、职工中专、职业中专、中技、中师）的教学，而且可供广大知识青年参加各类成人考试之用。

全书由朱旭华高级讲师、陈义政讲师统稿，吕炜同志编写第一章，刘德厚同志编写第二章，施俊英、汤玉香同志编写第

三章，赵冠珍、孔生同志编写第四章，张月玲同志编写第五章，栗洪莲、李玉华同志编写第六章，徐曰芳、王焕芝同志编写第七章，张竹、汤玉香同志编写第八章。王焕芝、汤玉香、施俊英、孔生同志参加了该书的统稿工作。全书由严洪山副教授主审，石油大学数理系教授霍守诚终审。

本书在编辑出版过程中承蒙石油大学、胜利油田师范专科学校、石油大学出版社诸多同志的关怀和支持，在此一并表示感谢。并感谢胜利石油学校领导对全书编写工作的关怀和大力支持。

由于我们水平有限，错误和不妥之处在所难免，恳请读者批评、指正。

编者

1993年11月

目 录

第一章 函 数

函数是一元微积分学研究的核心，初学者应对函数的基本概念和理论体系有一个比较深刻的理解和掌握。因此，本章的基本要求是：

1. 理解函数的定义，掌握函数定义域的求法。

2. 理解函数四种特性的定义，熟练掌握常见的基本初等函数的性质和图象。

3. 掌握复合函数、反函数和初等函数的定义，会画出简单的分段函数的图象。

4. 能建立简单的函数关系式。

5. 掌握充分条件、必要条件和充分必要条件的意义及它们之间的关系。

§1-1 预备知识

一、 基本内容与辅导

1. 充分条件、必要条件：设 A 和 B 分别代表两个条件，如果条件 A 的发生必然导致条件 B 的发生，即 $A\Rightarrow B$，那么条件 A 叫做条件 B 的充分条件。若条件 B 不发生，则条件 A 一定不发生，则称条件 B 为条件 A 的必要条件。

辅导

(1)充分条件、必要条件是我们在推理过程中常用的术

语。每一个推理过程是否正确，就取决于用以判定条件 B(也叫结论)成立的条件 A 是否是 B 的充分条件。如：若 $a=b$，则 $a^2=b^2$。$a=b$ 是 $a^2=b^2$ 的充分条件，但 $a\neq b$ 却不是 $a^2\neq b^2$ 的充分条件。因此，由 $a\neq b\Rightarrow a^2\neq b^2$ 的过程是错误的。

(2)使条件 B 成立的充分条件不一定只有一个。如：条件 $a=b$ 和 $a=-b$ 都是 $a^2=b^2$ 成立的充分条件。推理中我们无论由 $a=b$ 还是 $a=-b$(至少一个成立)；都可由此导出 $a^2=b^2$ 成立。

(3)条件 A 的必要条件也不一定只有一个。例如 $a^2=b^2$ 是 $a=b$ 成立的必要条件；而 $a^3=b^3$ 也是 $a=b$ 成立的必要条件。

(4)我们所学习的定理，都由条件和结论两部分构成。任意一个定理的条件都是其结论的充分条件，而结论通常则是定理条件的必要条件。

(5)充分条件具有正向传递性，即若 A 是 B 的充分条件，B 是 C 的充分条件，那么 A 也是 C 的充分条件。如 $\Delta ABC\cong\Delta A_1B_1C_1$，是 $\angle A_1=\angle A$、$\angle B_1=\angle B$、$\angle C_1=\angle C$ 的充分条件，而后者又是 $\Delta ABC\backsim A_1B_1C_1$ 的充分条件，因此，

$$\Delta ABC\cong\Delta A_1B_1C_1\Rightarrow\Delta ABC\backsim\Delta A_1B_1C_1。$$

(6)必要条件具有逆向传递性，即若 B 是 A 的必要条件，C 是 B 的必要条件，则 C 也是 A 的必要条件。

2. 充分必要条件：设 P 和 Q 分别代表两个条件，若 P 成立能得到 Q 成立，且 Q 成立能得到 P 成立，那么条件 P 叫做条件 Q 的充分必要条件(条件 Q 也叫做条件 P 的充分必要条件)。

辅导

(1)充分必要条件是相互的，因此，习惯上人们把 P 和 Q

互为充分必要条件叫做 P 和 Q 等价，记作 $P \Leftrightarrow Q$。

(2)数学的定义也由条件和结论两部分组成，而且其条件和结论是等价的，即它们互为充分必要条件。

(3)充分必要条件具有正向和逆向传递性，即若 $P \Leftrightarrow Q$，$Q \Leftrightarrow S$，则 $P \Leftrightarrow S$。

二、范　例

(一)　例题：

1. 试指出下列各题中条件 A 的必要条件：

(1) A：两三角形全等；　　(2) A：平行四边形；

(3) A：$a+bi=c+di$（a、b、c、$d \in R$）；

(4) A：x_1 和 x_2 是方程 $x^2+px+q=0$ 的根；

(5) A：$(x-1)(x-2)=0$。

2. 下列各题中，A 是 B 的什么条件？

(1) A：$x=i$，B：$x^2+1=0$；

(2) A：四边相等的四边形，B：正方形；

(3) A：点 $M(x,y)$ 在曲线 $y=f(x)$ 上，

B：x、y 是方程 $y=f(x)$ 的解。

3. 下列推导过程是否正确？为什么？

(1)由于 $\angle A \neq 90°$，所以▱$ABCD$ 不是矩形；

(2)因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以它是矩形。

(3)平面中四边形 $ABCD$ 的四边相等 $\Leftrightarrow$ 四边形 $ABCD$ 为菱形。

二、　解答与评析

1. **解**：(1)“A：两三角形全等”的必要条件有：

1° 对应边相等；　　2° 对应角相等；

3° 对应边上的高相等；4° 对应边的中线相等；

5° 对应角的平分线相等； 6° 面积相等；7° 相似。

(2) “A：平行四边形”的必要条件有：

1°两组对边分别平行且相等； 2° 两组对角分别相等；

3°两个邻角互补； 4° 两条对角线互相平分。

(3) 两个复数相等的必要条件有：

1°实部相等； 2°虚部相等；

3° 模相等； 4°幅角的终边相同。

(4) “A：x_1 和 x_2 是方程 $x^2+px+q=0$ 的根”的必要条件有： 1° $x_1+x_2=-p$； 2° $x_1x_2=q$。

(5) “A：$(x-1)(x-2)=0$”的必要条件有：

1° $x=1$； 2° $x=2$。

评析

通过解答此例，进一步明确：“条件 A 的必要条件不只一个”。学习的目的之一，就在于充分挖掘各条件成立时所具有的必要条件。

2. **解**：(1) A 是 B 的充分条件。

(2) A 是 B 的必要条件。(3) A 是 B 的充分必要条件。

3. **解**：(1) 推理正确。因为如果□$ABCD$ 是矩形，那么有 $\angle A=90°$，这与已知矛盾，这里的“$\angle A=90°$”是“□$ABCD$ 是矩形”的充分条件。

(2) 推理不正确。通常说的□$ABCD$ 并不一定是矩形。这里“四边形 $ABCD$ 是平行四边形”仅是“四边形 $ABCD$ 是矩形”的必要条件，而不是充分条件。

(3) 推理正确。前后互为充分必要条件。

评析

判定一个推理或一个命题“$A \Rightarrow B$”是否正确，常用以下方法：

(1) 若 A 是 B 的充分条件，则“$A\Rightarrow B$”正确。

(2) 若 A 不是 B 的充分条件，则“$A\Rightarrow B$”(即“$A\Rightarrow B$”不成立)；有时判定“$A\Rightarrow B$”时，往往举出“$A\Rightarrow B$”的一个反例即可。

(3) 判定“$A\Rightarrow B$”正确时，常常通过判定“$A\Rightarrow B$”的逆否命题的正确性来判定“$A\Rightarrow B$”正确。因为“$A\Rightarrow B$”与“$\overline{B}\Rightarrow\overline{A}$”是等价的。

(4) 判定“$A\Rightarrow B$”与“$B\Rightarrow A$”正确后，才能判定“$A\Leftrightarrow B$”正确。

§1-2　函数概念

一、　基本内容与辅导

1. 函数的定义

设有两个变量 x 和 y，如果对于变量 x 的取值范围 D 内的每一个确定的值，按照某个对应关系 f，y 都有确定的值和 x 相对应，那么变量 y 叫做变量 x 的函数，记作 $y=f(x)$。x 叫做自变量，数集 D 叫做函数的定义域，当 x 取遍 D 中一切值时，所得到的函数值的集合，叫做函数的值域，记作 M。

辅导

(1) 函数表示的是两个变量之间对应的关系，x 和 y 是两个变量的记号，也可以用其它字母如 t，s 等来记。f 是两个变量之间的对应法则(或关系)的记号，同样也可以用诸如 g，φ 等来表示，f 所代表的是“对于 x 的取值，经过一定的程序才能得到唯一确定的 y 值，即 x 与 y 的单值对应关系”。如函数 $y=x^2$，f 的含义是：将 x 的值平方后，才能和 y 相等，(或才能代替 y)等。

(2) 显然，如果已知函数的定义域 D 和对应关系 f，就可以求出此函数的值域 M，因此把定义域和对应关系叫做确定函数的两要素，据此得“两个函数相同的充分必要条件是定义域和对应关系都相同。”

(3) 判定两个函数的定义域相同，实际上就是判定两个实数集相同，这一点不难做到，判定两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的对应关系相同，就是判定对每一个 $x \in D$，都有 $f(x)=g(x)$ 成立（或 $f(x)-g(x)=0$ 成立）。

(4) 要研究一个函数，首先必须确定它的定义域和对应关系。

(5) 函数分类：定义域不同的函数；对应关系不同的函数；定义域和对应关系都不同的函数。

2. 单值函数

在函数的定义中，若对每一个 $x \in D$，按照对应关系 f，都有唯一确定的 y 值和它相对应，那么函数 $y=f(x)$ 叫做单值函数。否则叫做多值函数。

辅导

(1) 对于单值函数 $y=f(x)$，$y_1=f(x_1)\neq y_2=f(x_2)$ 是 $x_1\neq x_2$ 的充分条件（不一定是充分必要条件）。

(2) 本书所研究的函数，若无特殊说明，都是单值函数。

3. 函数的表示方法

常用的表示函数的方法有：公式法、表格法和图象法。

辅导

本书所讨论的函数，一般都用公式法表示。通常我们用描点法作出函数的图象，会帮助我们加深对函数的理解和掌握，例如：图象相同的两个函数相同。

4. 反函数的定义

设有函数 $y=f(x)$，其定义域为 D，值域为 M，如果对于 M 中的每一个 y 值，都可以通过关系式 $y=f(x)$ 确定唯一的 x 值($x\in D$)与之对应，这样就确定了以 y 为自变量的函数，记作 $x=\varphi(y)$ 或 $x=f^{-1}(y)$，它叫做函数 $y=f(x)$ 的反函数。

辅导

(1) 反函数是相对一个已知函数，如对 $y=f(x)$ 而言的，$y=f(x)$ 是单值函数，如果它的反函数存在时，由定义知，它的反函数也是一个单值函数。

(2) 由单值函数的定义知道，函数 $y=f(x)$(定义域为 D，值域 M)存在反函数的充分必要条件是：对于任意的 x_1、$x_2\in D$，$x_1\neq x_2\Leftrightarrow y_1=f(x_1)\neq f(x_2)=y_2$($y_1,y_2\in M$)，即其对应关系是一一对应的。

(3) 若 $x=f^{-1}(y)$ 是函数 $y=f(x)$ 的反函数，那么 $y=f(x)$ 也是 $x=f^{-1}(y)$ 的反函数，即它们互为反函数，而且 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域为 $y=f(x)$ 的值域，它的值域为 $y=f(x)$ 的定义域。

(4) 有的函数 $y=f(x)$ 在其整个定义域内不存在反函数，但可能在其定义域的某一子集内存在反函数。

(5) 如果要求出函数 $y=f(x)$ 的反函数，那么首先由 $y=f(x)$ 解出 x，即得 $x=\varphi(y)$(或 $x=f^{-1}(y)$)它即为反函数的对应关系。习惯上，我们用 x 表示自变量，因此，$y=f(x)$ 的反函数也可表示为：$y=f^{-1}(x)$ 或 $y=\varphi(x)$
即将 $x=f^{-1}(x)$ 或 $x=\varphi(y)$ 中的 x、y 交换位置即得。

(6) 互为反函数的函数的图象关于直线 $y=x$ 对称，即 $y=f^{-1}(x)$ 的图象和 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称($x=f^{-1}(y)$ 的图象和 $y=f(x)$ 的图象重合)。

5. 基本初等函数

把幂函数 $y=x^{\alpha}(\alpha\in R)$、指数函数 $y=a^{x}(a>0$ 且 $a\neq1)$、对数函数 $y=\log_{a}x(a>0$ 且 $a\neq1)$和三角函数($y=\sin x$、$y=\cos x$、$y=\operatorname{tg}x$、$y=\operatorname{ctg}x$, $y=\sec x$、$y=\csc x$)、反三角函数($y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg}x$, $y=\operatorname{arcctg}x$)统称为基本初等函数。

辅导

(1) 基本初等函数是我们常用到的函数,也是我们进一步学习函数的基础。因此,要充分理解和掌握它们的性质和图象。

(2) 注意基本初等函数的对应关系是固定的,即稍有改变(除 $y=x^{\alpha}$ 中的 α, $y=a^{x}$ 和 $y=\log_{a}x$ 中的 a 之外),就不是基本初等函数了。例如 $y=\frac{1}{2}x^{2}$, $y=\sin2x$, $y=-\cos x$ 和 $y=\log_{a}(x+1)$ 等,都不是基本初等函数。

6. 复合函数的定义

设 $y=f(u)$是数集 B 上的函数,又 $u=\varphi(x)$是由数集 A 到数集 B 的函数,则对于每一个 $x\in A$,通过 u,都有唯一确定的 y 值与 x 值相对应,这时在数集 A 上,y 是 x 的函数,这个函数叫做数集 A 上的由函数 $y=f(u)$和 $u=\varphi(x)$复合而成的函数,简称复合函数,记为 $y=f[\varphi(x)]$。其中 u 叫做中间变量,A 是复合函数的定义域。

辅导

(1) “$u=\varphi(x)$ 是由数集 A 到数集 B 的函数”是指 $u=\varphi(x)$ 的值域是集合 B 的子集,这是函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 能构成复合函数的充分条件。例如函数 $y=\ln u$ 和 $u=x^{3}-1$, $x\in R$ 时,不能复合 而成 $y=\ln(x^{3}-1)$,而 $y=\ln u$ 和 u =

x^3-1，$x\in(1,+\infty)$时，则可以复合而成函数 $y=\ln(x^3-1)$。

（2）在未指明函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域的情况下，求由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数 $y=f[\varphi(x)]$ 时，认为 $u=\varphi(x)$ 的值域包含在 $y=f(u)$ 的定义域内，这也是我们求复合函数定义域的依据。

（3）判定复合函数的复合过程，是学习一元微积分经常遇到的问题，也是一个难点，一定要牢固掌握。

（4）复合函数的定义可以推广到三个或三个以上函数构成的复合函数上去。

7. 初等函数的定义

由基本初等函数和常数经过有限次四则运算和有限次复合步骤所构成的函数叫做初等函数。

辅导

（1）本定义可以用如下框图表示

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{基本初等函数}\\\text{和常数}\end{array}} \xrightarrow[\text{经有限次的复合}]{\text{经有限次的加、减、乘、除}} \boxed{\text{初等函数}}$$

其中的基本初等函数就是指 $y=x^{\alpha}(\alpha\in R)$，$y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$，$y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq1)$，$y=\sin x$、$y=\cos x$、$y=\operatorname{tg}x$、$y=\operatorname{ctg}x$，$y=\arcsin x$、$y=\arccos x$、$y=\operatorname{arctg}x$、$y=\operatorname{arcctg}x$，当然它们也是初等函数，但其它的初等函数都不是基本初等函数。

（2）函数的加、减、乘、除运算，要求参加运算的函数的定义域相同，如不相同，取它们的交集。

8. 分段函数

如果一个函数在其不同的定义区间内的对应关系要用不

同的式子来表示，那么这个函数叫做分段函数。

辅导

(1) 分段函数的定义域是：函数解析式后各区间的并集。

(2) 求分段函数的函数值时，应把自变量的值代入相应取值范围的表示式进行计算。

(3) 有些初等函数也可以表示成分段函数，即有些分段函数也是初等函数，如 $y=\begin{cases} x, x\geqslant 0 \\ -x, x<0 \end{cases}$，可表示 $y=\sqrt{x^2}$，显然这个分段函数是初等函数，因此说："所有分段函数都不是初等函数。"这种说法不对。

9. 函数定义域的求法

分三种情况：

第一，由实际问题所得到的函数，其定义域由实际问题来确定。

第二，由数学式子表示的函数，如果是初等函数且由一个式子来表示，那么其定义域由函数表达式本身来确定，即要使运算有意义。

(1) 在分式中，分母不能为零；

(2) 在根式中，负数不能开偶次方；

(3) 在对数式中，真数要大于零；

(4) 在反三角函数式中，要符合反三角函数的定义域；

(5) 复合函数 $f[\varphi(\psi(x))]$ 中，$\psi(x)$ 的值域应是 $\varphi(v)$ 的定义域的子集，$\varphi(v)$ 的值域应是 $f(u)$ 的定义域的子集。

(6) 如果函数表达式中含有分式，根式和对数式，反三角函数式或复合函数，那么应取各部分定义域的交集。

第三，分段函数的定义域，为解析式后各区间的并集。

辅导