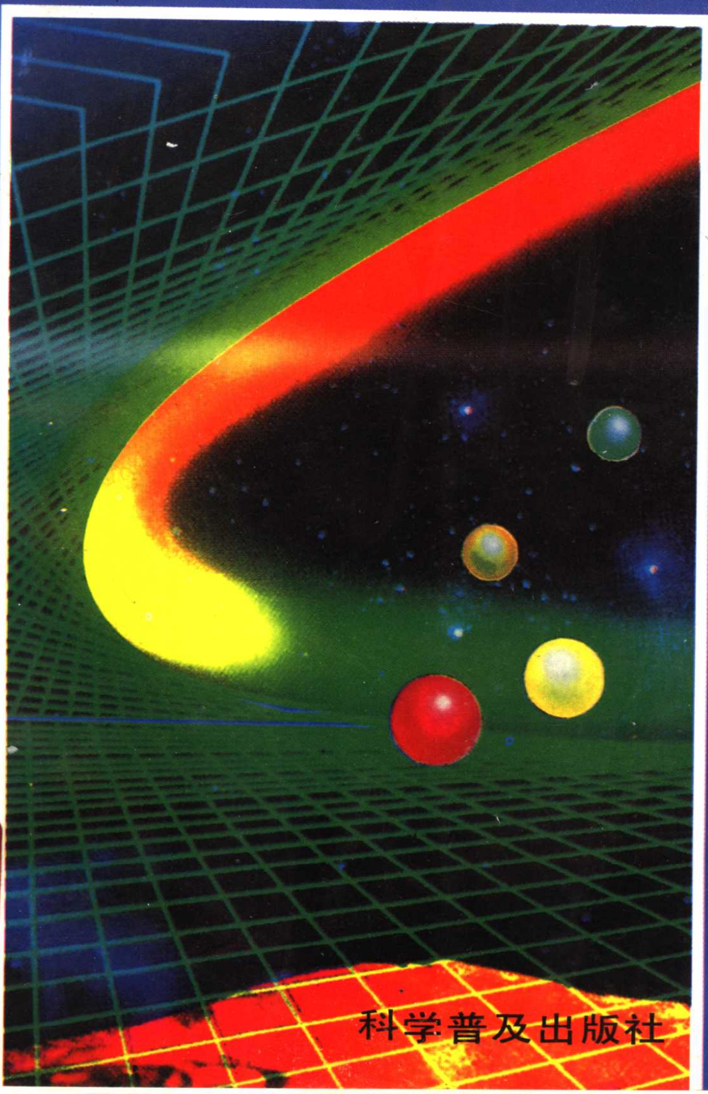
黄 家 礼 编著

几何明珠



科学普及出版社

几 何 明 珠

黄家礼　编著

科学普及出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

几何明珠/黄家礼编著. —北京：科学普及出版社，
1997.6

ISBN 7-110-03511-5

Ⅰ.几… Ⅱ.黄… Ⅲ.几何—普及读物Ⅳ.018-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字（97）第 17555 号

科学普及出版社出版
北京海淀区白石桥路 32 号　邮政编码：100081
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
北京市迪鑫印刷厂印刷
*
开本：787 毫米×1092 毫米　1/32　印张：7 字数：160 千字
1997 年 9 月第 1 版　1997 年 9 月第 1 次印刷
印数：10000 册　定价：9.50 元

序

自《周髀》、《九章》、《墨经》及《原本》问世以来，经历数千年的风霜雨雪，几何学形成了宏大、严谨的逻辑体系，支系繁多、变幻莫测的几何大千世界，占据着数学王国的半壁河山。

在几何学发展的历史长河中，自不乏洪涛大浪，激流险滩，然而也曾溅起无数朵晶莹的浪花，像颗颗明珠，闪烁着真理的光辉，把几何学点缀得更加美妙，更加富于情趣。

由于种种原因，我们“正规的”几何教学没有能够给学生接触这些内容创造必要的机会，致使青少年在这些宝贵的数学遗产面前，显得那样贫乏、陌生，更无法汲取这些几何明珠发现过程中的思维经验和难得的启示。

欣喜的是我们有远见的数学家和数学普及工作者为了弥补这一缺陷，为青少年和数学爱好者撰写了大批趣味数学、数学游戏和普及读物，涉及到有关内容的如史丹因豪斯(波兰)的《数学万花镜》、《100个数学问题》，别来利曼(前苏联)的《趣味几何学》、德里(德国)的《100个著名的初等数学问题》、高希尧(中国)的《数海钩沉》、考克塞特与格雷策(美国)的《几何学的新探索》及矢野健太郎(日本)的《几何的有名定理》，但这些书籍有的是一鳞半爪，难窥全豹；有的仅是简略介绍，缺乏“数学味”；有的则是用复数、变换等“统一”处理方法，既失去了这些“明珠”发现的历史本来面目，又难于为只熟悉“综合几何”方法的广大青少年所接受。而我们面前的这本《几何明珠》正好弥补了这种“不足”，它注意了选材的丰富、全面；叙述的生动和深入浅出，又不失数学的严谨性；既不脱离课本，又不局限于课本；既开阔视野，又锻炼思维；既可作为正课学习

的参考书，从中汲取对“双基”的启迪和解题方法，又提供了深入探索研究的题材。当然，如果本书若能注意更多一点收集我国古今几何方面发现的珍品，将会更加全面、丰富。

本书著作者知识渊博，思想活跃，文笔简炼清新。特别难能可贵的是他运用波利亚倡导的类比、归纳、推广、检验等一套合情推理的方法，按照几何明珠发现的本来历史过程在现行几何课本中寻找她们的“近亲”，然后再“推广”开去，使我们在阅读时总有似曾相识的感触，甚至不禁要问自己：为什么我在学到这里时没有发现她呢？面对一个又一个思路别致、风格迥异的证明，我们自然会问自己：我能找出一个新证法吗？归纳、类比、实验、观察、推广、猜测是攻克数学难关，发现数学真理的有力武器。几何学的奥妙及所研究的课题是无穷无尽的，我们几何课本中许多内容的深处都埋藏着璀璨的明珠，善读者、乐思者必会有所发现。而本书正好为我们提供了乐思善读的丰富经验和模仿练习的众多良机。

孔子曰：学而时习之，其乐无穷。祝君成功！

杨　之

1988年夏于天津宝坻

前　言

在几何学发展的历史长河中，许多经久不衰的几何名题，犹如一颗颗闪烁的明珠，璀璨夺目，光彩耀人，推动着几何学乃至整个数学的发展。它们中有的从一发现就吸引着人们的关注，有的经过几代甚至几十代数学家的努力，得出许多耐人寻味、发人深省的结论。

本书集之翡翠，汇其精华，从中挑选出20余件珍品，通过证明解法的探求，得出许多有趣的引伸和推广，挖掘出它们在解题中的各种巧妙应用。相信它对激发读者的数学兴趣、丰富数学素养、培养数学能力将大有裨益。

在编写过程中，笔者回避了复数、向量、变换等方法和技巧，这样处理虽然不一定简捷，但我们认为似乎更符合这些名题产生的历史事实。同时也为中学生，特别是初中学生阅读本书铺平了道路，让他们领略到这些数学精品的极妙意境。

天津的杨之老师和湖北大学《中学数学》编辑部的汪江松主任在书稿的审理过程中，提出了许多宝贵意见，令本书增色不少。湖北省数学特级老师江志和荆州市教研室郭章华老师对本书的出版极为关心。本书还凝集着许多师长、同事、好友的真知灼见和情谊，在此一并表示感谢。

因水平有限，谬误之处难免，敬请指正。

作　者

1997年7月

目　录

第一章　勾股定理

§1.1　定　理

勾股定理　直角三角形的两条直角边的平方和等于斜边的平方.

若设 a、b、c 为直角三角形的三边，c 为斜边，则

$$a^2+b^2=c^2.$$

我国古代称直角三角形为勾股形，并且直角边中较小者为勾，另一直角边为股，斜边为弦，所以称这个定理为勾股定理，也有人称商高定理. 这条定理不仅在几何学中是一颗光彩夺目的明珠，被誉为“几何学的基石”，而且在高等数学和其他科学领域也有着广泛的应用.

勾股定理从被发现至今已有 5000 多年的历史，5000 多年来，世界上几个文明古国都相继发现和研究过这个定理. 古埃及人在建筑金字塔和测量尼罗河泛滥后的土地时，就应用过勾股定理. 我国也是最早了解勾股定理的国家之一，在 4000 多年前，我国人民就应用了这一定理. 据我国一部古老的算书《周髀算经》(约西汉时代，公元前 100 多年的作品)记载，商高(约公元前 1120 年)答周公曰:“勾广三，股修四，径隅五”. 这句话的意思就是:在直角三角形中，若勾长为 3，股长为 4，则弦长为 5. 这就是人们常说的“勾三、股四、弦五”，这当然是勾股定理的特殊情形. 但这本书中同时还记载有另一位中国学者陈子(公元前 7～前 6 世纪)与荣方在讨论测量问题

时说的一段话："若求邪(斜)至日者，以日下为勾，日高为股，勾股各自乘，并而开方除之，得邪至日"(图 1-1).

即　$邪至日=\sqrt{勾^2+股^2}$.

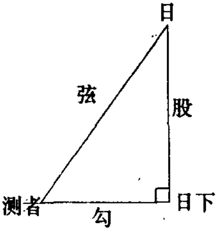


图 1-1

这里给出的是任意直角三角形三边间的关系. 因此，也有人主张把勾股定理称为"陈子定理".

2000 多年前，由于希腊的毕达哥拉斯(Pythagoras，约公元前 585 ～ 前 497 年) 学派也发现了这条定理，所以希腊人把它叫毕达哥拉斯定理. 相传当时的毕达哥拉斯学派发现，若 m 为大于 1 的奇数，则 m、$\frac{m^2-1}{2}$、$\frac{m^2+1}{2}$ 便是一个可构成直角三角形三边的三元数组. 果真如此，可见这个学派当时是通晓勾股定理的. 但这一学派内部有一规定，就是把一切发明都归功于学派的头领，而且常常秘而不宣. 据传说，发现这个定理的时候，他们还杀了 100 头牛酬谢供奉神灵，表示庆贺. 因此，这个定理也叫"百牛定理". 至于毕达哥拉斯学派是否证明了这一定理，数学史界有两种不同的观点，一种意见认为证明过，理由如前所述. 另一种意见则认为证明勾股定理要用到相似形理论，而当时毕达哥拉斯学派没有建立完整的相似理论，因此他们没有证明这一定理.

勾股定理在法国和比利时又叫"驴桥定理"，这自然也有它的来历.

人类对勾股定理的认识经历了一个从特殊到一般的过程，而且在世界上很多地区的现存文献中都有记载，所以很难区分这个定理是谁最先发现的. 国外一般认为这个定理是毕达哥拉斯学派首先发现的，因此，国外称它为毕达哥拉斯定

理.历史文献确凿地证明,商高知道特殊情况下的勾股定理比毕达哥拉斯学派至少要早五六个世纪,而陈子掌握普遍性的勾股定理的时间要比毕达哥拉斯早一二百年,是我们的祖先最早发现这一定理的,这就是我们把它称为"勾股定理"、"商高定理"或"陈子定理"的理由.

§1.2 定理的证明

几千年来,人们给出了勾股定理的各种不同的证明,有人统计,现在世界上已找到它的证明方法有400多种.仅1940年,由鲁米斯(E. S. Loomis)搜集整理的《毕达哥拉斯定理》一书就给出了370种不同的证明.

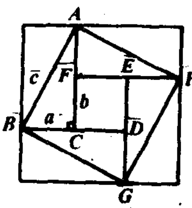


图 1-2

我们的祖先对勾股定理作过较深入的研究.我国对勾股定理的最早证明,载于《勾股圆方图注》里,它是由后汉人赵爽(字君卿,公元3世纪)给出的,里面附有一张"弦图"(图1-2).方法是:"按弦图,又可以勾股相乘为朱实二,倍之为朱实四,以勾股之差相乘之为中黄实,加差实,亦成弦实."这里的"实"指面积,把图中($\triangle ABC$等)四个直角三角形涂上朱色,其面积叫做"朱实",中间的正方形($CDEF$)涂上黄色,其面积叫做"中黄实".于是上文用算式表示就是

$ab = 2S_{\triangle ABC}$, (勾股相乘为朱实二)

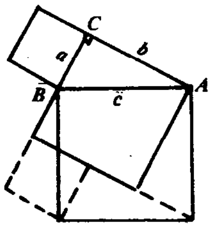
$2ab = 4S_{\triangle ABC}$, (倍之为朱实四)

$(b-a)^2 = S_{CDEF}$, (勾股之差相乘之为中黄实)

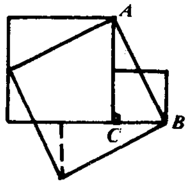
$2ab + (b-a)^2 = c^2 (= S_{ABGH})$, (加差实,亦成弦实)

即 $a^2 + b^2 = c^2$.

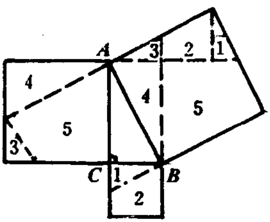
这种证明方法巧妙而又简便，开了面积出入相补证法的先河，至今还被采用. 还有三国时期的刘徽、清代的梅文鼎、李锐、华蘅芳等，创造了许多不同的面积证法，下面将他们研究的图形录绘若干幅，如图 1-3，从中我们可领会他们研究的神妙.



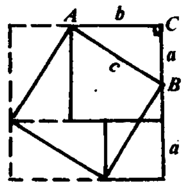
梅文鼎图



李锐图



华蘅芳图



何梦瑶图

图 1-3

现存勾股定理最早的证明出自欧几里得(Euclid，约公元前 330 ～ 前 275 年）的《几何原本》命题 47. 他把勾股定理换成了另一种形式：“直角三角形斜边上的正方形面积等于两直角边上的正方形面积之和”. 其证法是(如图 1-4)

先证 $\triangle ABD \cong \triangle FBC$.

$S_{\text{矩形}BDLM} = 2S_{\triangle ABD}$,

$S_{\text{正方形}ABFG} = 2S_{\triangle FBC}$.

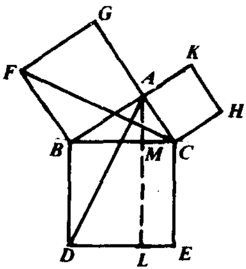


图 1-4

从而 $S_{矩形BDLM}=S_{正方形ABFG}$；

同理 $S_{矩形CELM}=S_{正方形ACHK}$.

上述两式相加即得

$$S_{正方形BCED}=S_{正方形ABFG}+S_{正方形ACHK}.$$

但上述证法不是最简的，最简的证法是利用相似三角形的理论证明.

如图 1-5，作直角三角形 ABC 斜边 AB 上的高 CD，则 $\triangle ABC \backsim \triangle ACD \backsim \triangle CBD$，

有 $a^2=qc, b^2=pc$，

所以 $a^2+b^2=qc+pc$

$$=(q+p)c=c^2.$$

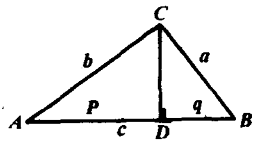


图 1-5

值得一提的是在多达 400 多种的证法之中，居然有两种证法一个出自美国第二十届总统加菲尔德(Garfield，1831～1881 年)之手，另一个是由身为国王的印度数学家跋斯迦罗给出.

1876 年 4 月，加菲尔德在波士顿周刊《新英格兰教育杂志》上发表了勾股定理的一个别开生面的证法. 1881 年他当选为总统，于是他的证明也就成为人们津津乐道的一段轶事了.

加菲尔德的证法确实十分干净利落. 如图 1-6，在直角 $\triangle ABC$ 的斜边上作等腰直角 $\triangle BCE$，过 E 作 $ED \perp AC$ 交于 D，则有 $\triangle ABC \cong \triangle DCE$.

设梯形 $ABED$ 面积为 S，则

$$S=\frac{1}{2}(a+b)^2$$

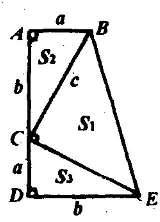


图 1-6

$$= \frac{1}{2}(a^2 + 2ab + b^2),$$

又 $S = S_1 + S_2 + S_3$

$$= \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab$$

$$= \frac{1}{2}(c^2 + 2ab).$$

两式比较即得 $a^2 + b^2 = c^2$.

跋斯迦罗的证明也很奇妙:

如图 1-7(a) 是由四个直角三角形和一个正方形构成的一个边长为 c 的大正方形,因而其面积为 c^2,中间的小正方形的边长是 $b-a$. 把(a) 中的四个直角三角形拼成两个长方形,再与小正方形拼在一起,得到图(b),在该图中引一铅垂虚线,标上各边的长,适当简化后恰好成为图(c) 所示的由边长分别为 a、b 的两个正方形组成。因此有 $c^2 = a^2 + b^2$,勾股定理得证.

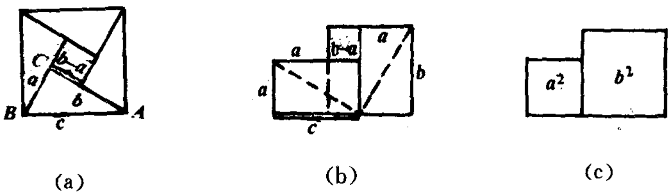


图 1-7

勾股定理的逆命题成立,而且应用也很广泛.

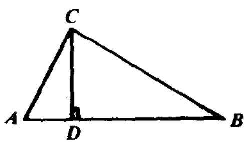


图 1-8

勾股逆定理 在 $\triangle ABC$ 中,若 $AC^2 + BC^2 = AB^2$,则 $\angle C$ 为直角.

证明 如图 1-8,过 C 作 AB 的垂线,垂足为 D.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle CDB$ 中,由勾股定理有

$$AC^2 = CD^2 + AD^2,\ BC^2 = CD^2 + BD^2,$$

所以 $\quad AC^2 + BC^2 = 2CD^2 + AD^2 + BD^2,$

已知 $\quad AC^2 + BC^2 = AB^2,$

所以 $\quad AB^2 = (AD + DB)^2 = 2CD^2 + AD^2 + BD^2$

故得 $\quad CD^2 = AD \cdot BD \Rightarrow \dfrac{BD}{CD} = \dfrac{CD}{AD}.$

所以 $\quad \mathrm{Rt}\triangle BCD \backsim \mathrm{Rt}\triangle CAD \Rightarrow \angle BCD = \angle CAD,$

$$\angle BCA = \angle BCD + \angle DCA = \angle CAD + \angle ACD$$
$$= 90°.$$

即 $\quad \triangle ABC$ 的 $\angle C$ 为直角.

§1.3 定理的变形与推广

1. 定理的变形

若 a、b、c 为直角三角形的三边,c 为斜边,则

(1) $a^2 = c^2 - b^2$;

(2) $c^2 = (a+b)^2 - 2ab$;

(3) $2ab = (a+b+c)(a+b-c)$ 或 $\frac{1}{2}ab = p(p-c)$;

(4) $2ab = (b+c-a)(a+c-b)$ 或 $\frac{1}{2}ab$

$$= (p-a)(p-b)$$

其中 $\quad p = \dfrac{1}{2}(a+b+c).$

2. 定理的推广

(1) 将边上图形一般化,可得

定理 1.1 在直角三角形的勾股弦上分别向外作任意相似的图形,则弦上图形的面积等于勾和股上图形的面积之和(图 1-9).

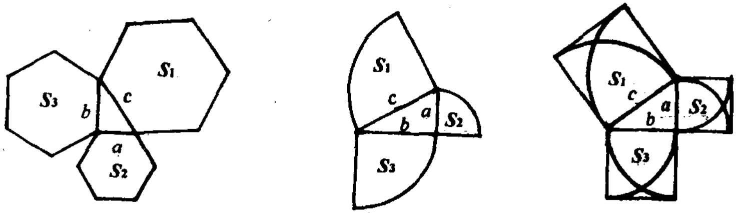


图 1-9

证明　设弦上图形的面积为 S_1，勾股上图形面积分别为 S_2、S_3，则

$$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{a}{c}\right)^2,\quad \frac{S_3}{S_1} = \left(\frac{b}{c}\right)^2,$$

$$S_2 + S_3 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} S_1 = S_1.$$

在欧几里得《几何原本》第六篇就有上述推广的记载.

(2) 将直角三角形向任意三角形推广，可得

定理 1.2　若 a、b、c 分别表示 $\triangle ABC$ 的三条边长，$\angle C$ 为边 c 的对角，则

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

此即余弦定理，当 $\angle C = 90°$ 时，即为勾股定理.

定理 1.3　在任意三角形的大边上向内侧作平行四边形，使它的另两个顶点位于三角形外，再在三角形的另两边上分别作平行四边形，使与三角形两边分别平行的边过大边上所作平行四边形的另两个顶点. 则大边上平行四边形的面积等于另两边上平行四边形面

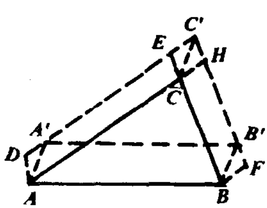


图 1-10

积之和.

证明 如图 1-10 所示，依题设，则有

$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle A'B'C'}, S_{ACC'A'}=S_{ACED}$

$S_{BB'C'C}=S_{BFHC}$.

若从五边形 $ABB'C'A'$ 减去 $\triangle A'B'C'$ 的面积，则得 $S_{ABB'A'}$；若从五边形 $ABB'C'A'$ 减去 $\triangle ABC$ 的面积，则得

$S_{ACC'A'}+S_{BB'C'C}$. 故有

$S_{ABB'A'}=S_{ACC'A'}+S_{BB'C'C}=S_{ACED}+S_{BFHC}$,

命题得证.

定理 1.3 是希腊数学家帕普斯(Pappus，约公元 300 年)发现的，并载于他的《数学汇编》第四卷.

(3) 把三角形向多边形推广，可得

定理 1.4 点 P 是凸多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 所在平面上任意一点，从点 P 分别向各边作垂线，垂足为 B_1、B_2、…、B_n，则 $A_1B_1^2+A_2B_2^2+\cdots+A_nB_n^2=B_1A_2^2+B_2A_3^2+\cdots+B_{n-1}A_n^2+B_nA_1^2$(图 1-11).

证明

$$\begin{aligned}
&A_1B_1^2+A_2B_2^2+\cdots+A_nB_n^2\\
&=(PA_1^2-PB_1^2)+(PA_2^2-PB_2^2)\\
&\quad+\cdots+(PA_n^2-PB_n^2)\\
&=(PA_2^2-PB_1^2)+(PA_3^2-PB_2^2)\\
&\quad+\cdots+(PA_1^2-PB_n^2)\\
&=B_1A_2^2+B_2A_3^2+\cdots+B_nA_1^2.
\end{aligned}$$

特别地，对于三角形当点 P 在 A 点时(图 1-12)，有

$$AB^2+CD^2=AC^2+BD^2.$$

当 C、D 重合时即为勾股定理.

(4) 把三角形向平行四边形推广，可得

定理 1.5 (广义勾股定理) 平行四边形对角线的平方和