

丁玖 周爱辉 编著

确定性系统的 统计性质

清华大学出版社

<http://www.tup.com.cn>

确定性系统的统计性质

丁玖 周爱辉 编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书介绍的是确定性离散动力系统统计性质的基本理论与计算方法。首先介绍了遍历理论的一些经典结果;然后着重研究了对应于混沌映射的绝对连续不变测度的存在性与计算问题,这归结于相应的 Frobenius-Perron 算子的泛函分析与数值分析;最后本书介绍了 Shannon 熵、Kolmogorov 熵、拓扑熵以及 Boltzmann 熵,并给出了不变测度的一些最新应用。本书可作为数学、计算科学与工程专业的研究生教材或参考书。

版权所有,翻印必究。举报电话:010-62782989 13501256678 13801310933

图书在版编目(CIP)数据

确定性系统的统计性质/丁玖,周爱辉编著. —北京:清华大学出版社,2006.1

ISBN 7-302-12067-6

I. 确… II. ①丁… ②周… III. 确定系统:离散系统-动力系统(数学)-研究生-教材 IV. O175

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第127506号

出 版 者:清华大学出版社 地 址:北京清华大学学研大厦

<http://www.tup.com.cn> 邮 编:100084

社 总 机:010-62770175 客户服务:010-62776969

组稿编辑:佟丽霞

文稿编辑:王海燕

印 刷 者:清华大学印刷厂

装 订 者:三河市化甲屯小学装订二厂

发 行 者:新华书店总店北京发行所

开 本:185×230 印张:12.75 字数:264千字

版 次:2006年1月第1版 2006年1月第1次印刷

书 号:ISBN 7-302-12067-6/O·501

印 数:1~3000

定 价:25.00元

序 言

遍历理论是研究确定性动力系统统计性质的一门综合性学科, 它集测度论、泛函分析、拓扑、几何等基础学科于一身, 其本身也是用途广泛的应用数学的典型范例. 特别是近二三十年来, 混沌动力系统的遍历理论在数学、物理、工程、生物以及其他领域中的应用正日益拓广. 譬如, 在过去的十年中, 它的理论和方法正在计算分子动力学、药物设计及第三代无线通信技术等与经济发展密切相关的新兴交叉学科中大显身手.

科学和工程中的许多问题, 常常归结于研究离散动力系统的渐近性质. 我们知道, 神经网络、凝聚态物理、流体中的湍流、大规模激光阵列、反应扩散系统、相变中的耦合映射格以及分子动力学中的复杂动力系统的渐近性态常表现为混沌现象, 无法预测. 然而, 如果用统计的观点来研究混沌动力系统, 就会发现确定性意义下的混沌在统计意义下常具有正规性. 在这本适合于高年级本科生或研究生的教科书中, 我们就用统计的观点看混沌. 在此观点下, 由给定的离散动力系统所支配的密度函数的演化过程是我们重点研究的, 这就不可避免地用到概率密度的概念来研究映射迭代序列的统计性质. 这些统计性质常常依赖于在给定的映射下不随时间改变的关于 Lebesgue 测度绝对连续的那些概率测度的存在性及其性质. 而这类概率测度的存在性等价于被波兰裔杰出数学家和美国氢弹之父 Stanislaw Ulam 命名为 Frobenius-Perron 算子的一类随机算子 (或 Markov 算子) 的非平凡不动点的存在性.

在本书中, 我们着重研究两类问题, 一类是关于 Frobenius-Perron 算子非平凡不动点的存在性, 另一类则是关于这些不动点的计算. 它们可分别视为关于 Frobenius-Perron 算子的泛函分析和数值分析. 对于前者, A. Lasota 和 M.C. Mackey 所著的 *Probabilistic Properties of Deterministic Systems* 和 *Chaos, Fractals, and Noise: Stochastic Aspects of Dynamics* 以及 A. Boyarsky 和 P. Góra 所著的 *Laws of Chaos: Invariant Measures and Dynamical Systems in One Dimension* 均给出很好的叙述. 而对于后者, 本书可能是第一本教科书. 这是本书与众不同之处, 因为它集必要的数学理论与实用的计算方法于一体, 这是为试图缩小目前普遍存在的数学理论与实际应用之间的鸿沟所做的努力.

历史上关于 Frobenius-Perron 算子非平凡不动点存在性的早期著名工作包括 Krzyzewski 与 Szlenk 1969 年关于光滑 Riemann 流形上扩张映射的光滑不变测度的存在性的证明以及 1973 年 Lasota 和 Yorke 关于区间逐片单调映射的绝对连续不变测度存在性的先驱性论文. 后一篇论文也回答了 Ulam 在其 1960 年出版的名著 *A Collection of Mathematical Problems* 中所提出的一个相关问题. 在同一本书中, Ulam 提出的逐片常数数值逼近法则

开 Frobenius-Perron 算子数值分析之先河. 而华人数学家李天岩 1976 年对 Ulam 猜想的一个解答, 则成了数值遍历理论这一新领域的奠基之作.

本书分为 9 章. 第 1 章绪论通过对带参数二次多项式映射族参数变化时的迭代分析来经历一次从有序到混沌的数学之旅, 并将读者引入“用统计的观点看混沌”的新天地. 本书用到的数学基础知识——测度论和泛函分析, 则构成第 2 章的内容. 在第 3 章我们将学习遍历理论的一些基本概念和经典结果. 本书所讨论的主要算子——Frobenius-Perron 算子, 将在第 4 章中引进, 一些在其他书中从未出现过的基本结果也将在这里介绍. 第 5 章完全用于绝对连续不变测度的存在性问题的探讨, 对几类混沌一维或高维映射族我们将证明其存在性定理. 而第 6 章则是关于这些不变测度的计算问题. 我们将给出有限维逼近 Frobenius-Perron 算子的两种方法. 其一是 Ulam 方法, 另一种方法则是 Ulam 方法的改进, 即主要由本书作者所发展的逐片线性 Markov 逼近法. 在第 7 章介绍 G. Keller 关于 Markov 算子的随机稳定性的结果及其在 Ulam 方法 L^1 -范数收敛阶估计中的应用以及 R. Murray 关于 Ulam 方法 L^1 -范数误差上界的显式表示. 我们也给出 Markov 逼近法在变差范数下的误差估计. 第 8 章给出几种相互关联的熵的简单描述以及经典的 Boltzmann 熵与 Frobenius-Perron 算子之间的关系. 最后一章给出不变测度的几个应用例子.

本书既可作为基础数学、应用数学、计算数学、概率统计等专业的教材使用, 以引导学生们进入相关的前沿交叉学科领域, 也可作为计算科学中不同领域, 如计算物理、计算化学、计算生物等专业作为动力系统专门化课程的教材或参考书. 对于电子工程系等工程学科中从事应用混沌学或应用遍历理论学习和研究的学生或学者, 本书可起到登堂入室的作用. 具有高等微积分基础的读者对本书的内容不会感到太困难, 也许关于多变量函数变差的概念 (2.4 节) 以及多维变换绝对连续不变测度存在性定理的证明 (5.4 节) 对某些读者困难大些, 在初学时可以略去. 本书每章末尾的习题有许多是对正文部分的补充, 读者应能有选择性地做一些, 或至少能浏览一番, 并参考有关文献. 遍历理论中的每个论题均可写成洋洋大著, 但本书目的是将读者引入一个引人入胜且应用潜力无穷的新领域, 并以尽可能多的读者群为其对象. 这样, 我们必定要省略若干重要的论题和结果, 而这些内容可在其他优秀的著作中找到.

作为教科书, 本书的另一特点是包含了我们十余年来合作研究的一些成果. 在此意义上, 它也像一本研究专著. 我们的合作始于 1992 年夏季在中国科学院应用数学研究所举办的学术研讨会上的初次相识. 我们的合作先后得到中国 973 项目“大规模科学计算研究”和“高性能科学计算研究”、中国国家自然科学基金委员会、中国科学院基础局、中国科学院王宽诚科研奖金委员会、美国“中国之桥”基金委员会、中国科学院数学与系统科学研究院及美国南密西西比大学 A.K. Lucas 基金会的资助. 在此, 丁玖特别感谢他的博士论文导师, 美国密执安州立大学杰出教授李天岩先生. 是李天岩教授在 1988—1989 学

年中开设的基于参考文献 [85] 极具魅力的研究生课程“ $[0, 1]$ 上的遍历理论”将他带进一个从未接触过的领域并撰写与其有关的博士论文. 周爱辉也在此非常感谢导师林群院士, 是林群老师的关怀与鼓励使他有幸涉足另一片广阔的研究天地.

同时, 我们还十分感谢作者之一周爱辉的五位博士研究生: 阳莺、沈丽华、刘芳、靳聪明、戴小英, 是他们无私地将书稿输入电脑并不辞劳苦地一遍遍校对、改错, 保证了本书能尽早与读者见面. 此外, 作者还要感谢佟丽霞、刘晓艳、王海燕几位编辑, 她们为本书的出版付出了辛勤的劳动.

最后, 作者之一丁玖将这本书献给他亲爱的女儿丁易之. 他负笈海外三年后才第一次父女相会, 可以想像, 女儿为父亲所作的巨大牺牲. 作者之一周爱辉将此书献给他的家人, 是他们的支持与理解使他潜心从事研究和教学.

限于作者学识, 书中纰漏与错误一定不少, 敬请读者指正.

丁玖 周爱辉

2005 年 11 月

目 录

第 1 章	绪论	1
1.1	确定性系统——从有序到混沌	1
1.2	混沌的统计研究	8
	习题	12
第 2 章	测度论基础	13
2.1	测度与积分	13
2.2	积分基本理论	17
2.3	单变量有界变差函数	20
2.4	多变量有界变差函数	23
2.5	紧性与拟紧性	26
	习题	29
第 3 章	遍历理论初步	31
3.1	保测变换	31
3.2	遍历性、混合性与正合性	33
3.3	遍历定理	36
3.4	拓扑动力系统	39
	习题	49
第 4 章	Frobenius-Perron 算子	53
4.1	Markov 算子	53
4.2	Frobenius-Perron 算子	58
4.3	Koopman 算子	66
4.4	Frobenius-Perron 算子的分解定理	69
	习题	73
第 5 章	绝对连续不变测度的存在性	77
5.1	一般存在性定理	77
5.2	逐片伸长映射	81
5.3	逐片凸映射	84
5.4	逐片扩张变换	86

习题	94
第 6 章 绝对连续不变测度的计算	96
6.1 一维映射的 Ulam 方法	96
6.2 多维变换的 Ulam 方法	103
6.3 一维映射的 Markov 方法	106
6.4 多维变换的 Markov 方法	112
习题	118
第 7 章 收敛速度分析	121
7.1 Ulam 方法的误差估计	121
7.2 更精细的误差估计	128
7.3 Markov 方法的误差估计	137
习题	145
第 8 章 熵	146
8.1 Shannon 熵	146
8.2 Kolmogorov 熵	150
8.3 拓扑熵	155
8.4 Boltzmann 熵	157
8.5 Boltzmann 熵与 Frobenius-Perron 算子	160
习题	164
第 9 章 不变测度的应用	167
9.1 耦合衰减	167
9.2 随机数产生	169
9.3 生物分子构象动力学中的转移算子	173
9.4 无线通信中的直接序列码分多址联接	183
习题	187
参考文献	188
索引	194

第1章 绪 论

在确定性动力系统的现代统计研究及其在物理科学中的应用上, 有两类重要且相关的问题. 第一类问题是理论方面的, 即关于绝对连续不变测度的存在性问题. 这个测度给出了像几乎所有初始点的轨道的概率分布或耦合递减的速度等诸如此类的动力系统的统计性质. 第二类问题更为实用, 即关于描绘许多物理系统复杂性的混沌行为的这些不变测度的计算. 这种计算应有效并能达到任意给定的精度. 在本书中我们试图学习和研究这两类问题. 为此目的, 我们要引进称之为 Frobenius-Perron 算子的一类线性正算子. 该算子描述了密度函数在动力系统演化中的过程. Frobenius-Perron 算子的不变密度函数恰恰给出了绝对连续不变测度. 通过保结构的数值方法, 我们可以有效地数值逼近这样的不变密度函数.

作为引导我们研究离散动力系统统计性质的序曲, 在本章中我们首先来介绍一维映射的一些简单的确定性性质. 在 1.1 节, 我们将以确定性观点来详细探讨对于混沌概念在自然科学与数学中逐步演化的历史中起到过重要作用的有名的“逻辑斯蒂模型”, 然后在 1.2 节我们将用直观的方式来引进 Frobenius-Perron 算子的概念. 这自然地引导我们用统计观点看混沌, 这就是本书的主要论题.

1.1 确定性系统——从有序到混沌

在最一般性的意义上, 动力系统给出在数学王国或物理世界中现象 (或状态) 关于时间的演化规则. 微分方程在物理科学的许多领域中被大量用来描述不同物理量的演化规律, 在统计物理、神经网络、动力学及电子工程等应用学科, 某个相空间上定义的变换或映射不仅给出了关于离散时间的动力系统, 而且通过像 Poincaré 映射这样的数学工具, 它们构成研究由微分方程所刻画连续动力系统的基础.

如果要考察离散动力系统的迭代过程, 即使是最简单的非线性映射也可能展示出复杂的拟随机性或不可预测的行为. 这些行为构成混沌现象的本质特征. 甚至在电子计算机出现前 50 年, 或在李天岩和 James A. Yorke 在他们的著名论文“周期三则混沌”^[86] 中第一次引入混沌的定义前 80 年, 伟大的法国数学家 Henri Poincaré 对于天体力学中的三体问题已经推演出这种混沌运动的存在性.

在 N 维欧几里得空间 $\mathbb{R}^N$ 中的一个动力系统关于离散时间的演化过程通常由一个

一阶差分方程给定, 常常写成一个递推关系式

$$x_{n+1} = S(x_n), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (1.1)$$

其中, S 是 $\mathbb{R}^N$ 的一个子集 X 到其自身的一个变换. 例如, 考虑某类有机体的总体分布与时间的关系. 假定该有机体具有稳定的食物供给和有限的空间, 并且没有捕食者. 为了建立相邻两代有机体总体之间的关系模型, 对 $n = 1, 2, \dots$, 令 x_n 代表相对于环境所容许的最大数目的该有机体第 n 代的相对数量, 即相对于最大容量 1, $0 \leq x_n \leq 1$. 在大约 160 年前比利时数学家 P. F. Verhulst 用微分方程来研究人口动力学开始后在此领域最广为人知的一个迭代公式就是所谓的“逻辑斯蒂模型”^[94]

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.2)$$

在下面我们将研究当参数 r 在 0 和 4 之间取值时这个逻辑斯蒂模型的确定性性质, 并将看到当 r 由 0 增加到 4 时其迭代点序列怎样由正规性态转移到混沌性态.

首先我们引入离散动力系统中的一些标准术语. 若 $S(x) = x$, 点 x 称为映射 $S: X \rightarrow X$ 的一个不动点. 若存在一个正整数 n 使得 x 的第 n 次迭代点 $S^n(x)$ 是 S 的一个不动点, 则称 x 为 S 的一个终结不动点. 这里 S 的第 n 次迭代映射 S^n 是由 S 复合 $n-1$ 次而成的, 即 $S^n = \underbrace{S \circ S \circ \dots \circ S}_n$. 点 x_0 称为 S 的一个具有周期 n 的周期点或一个周期 $-n$ 点, 如果 $S^n(x_0) = x_0$ 且点 $x_0, S(x_0), \dots, S^{n-1}(x_0)$ 互不相同. 若 x_0 具有周期 n , 则 x_0 的轨道

$$x_0, S(x_0), \dots, S^{n-1}(x_0), x_0, S(x_0), \dots$$

是一个周期轨道并称为一个 n -循环. 一般来说, 对于 S 的定义域 X 中的任一点 x_0 , 无穷序列

$$x_0, S(x_0), S^2(x_0), \dots, S^n(x_0), \dots$$

称为初始点 x_0 的一个轨道.

现在我们考察逻辑斯蒂模型的迭代. 记

$$S_r(x) = rx(1 - x), \quad x \in [0, 1]. \quad (1.3)$$

很显然, 当 $0 < r \leq 1$ 时, S_r 有一个不动点 0, 而当 $r > 1$ 时 S_r 有两个不动点 0 和 $1 - \frac{1}{r}$. 我们将更仔细地探讨这些不动点及可能出现的周期点的性质. 我们将知道, 当参数 r 经过数 $1, 2, 3, 1 + \sqrt{6}, \dots$ 中的任何一个时, S_r 的动力系统性质为之变, 这些特殊点称为这一族带参数的动力系统的分歧点, 即当 r 越过这些点时, 不动点或周期点的数目和性

态将会改变. 因而, 在如下的讨论中, 我们由易到难地分成 4 种情形分别仔细研究. 它们是: $0 < r \leq 1$, $1 < r \leq 2$, $2 < r \leq 3$, $3 < r \leq 4$. 在许多场合, 我们常不加说明地用到这样一个初等事实: 若 $x_n = S^n(x_0)$ 是一个连续映射 $S: X \rightarrow X$ 的收敛迭代序列且收敛到 $x^* \in X$, 则极限 x^* 必为 S 的一个不动点.

情形 1: $0 < r \leq 1$ (见图 1.1).

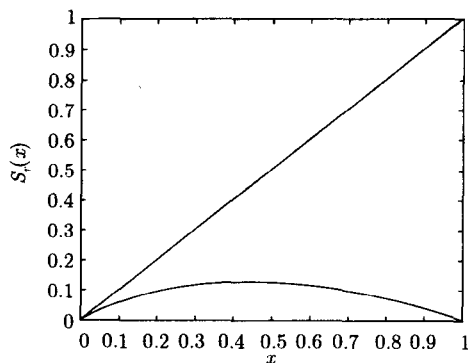


图 1.1 $r = 0.5$ 时 S_r 的图像

因为当 $0 < x < 1$ 时, $0 < S_r(x) = rx(1-x) < x$, 易知迭代序列 $S_r^n(x)$ 为正项单调递减序列. 故当 n 趋于无穷大时, $S_r^n(x)$ 收敛到 S_r 的惟一不动点 0. 因而, 不动点 0 的吸引区域 (由定义, 所有其轨道收敛到该不动点的那些初始点的集合) 为闭区间 $[0, 1]$. 由此推出 S_r 除不动点 0 外没有其他周期点.

情形 2: $1 < r \leq 2$ (见图 1.2).

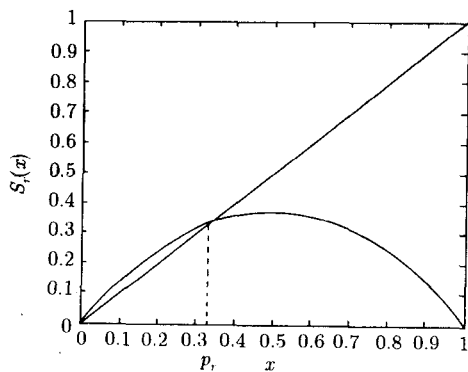


图 1.2 $r = 1.5$ 时 S_r 的图像

现在, S_r 有两个不动点, 0 和 $p_r \equiv 1 - \frac{1}{r}$. 由于 $S'_r(0) = r$ 及 $S'_r(p_r) = 2 - r$, 不动点 0 为排斥的, 即 $|S'_r(0)| > 1$, 而不动点 p_r 为吸引的, 即 $|S'_r(p_r)| < 1$. 首先令 $0 < x < p_r$, 则 $\frac{1}{r} < 1 - x$, 故 $x < rx(1 - x) = S_r(x)$. 因为 S_r 在 $[0, p_r]$ 上为递增函数, 故由 $0 < x < p_r$ 推出

$$x < S_r(x) < S_r(p_r) = p_r.$$

这样, 序列 $S_r^n(x)$ 单调递增且以 p_r 为一上界, 故收敛到不动点 p_r . 类似可证, 若 $p_r < x < \frac{1}{2}$, 则 $S_r^n(x)$ 为一单调递减且以 p_r 为一下界的序列, 故也收敛到 p_r . 最后, 若 $\frac{1}{2} < x < 1$, 则 $0 < S_r(x) < \frac{1}{2}$. 故由上面所证, $S_r^n(x)$ 收敛到 p_r . 综上所述, 当 $1 < r \leq 2$ 时, 不动点 p_r 的吸引区域是开区间 $(0, 1)$, 而不动点 0 的吸引区域是双点集 $\{0, 1\}$. 因此, S_r 除这两个不动点外没有其他周期点.

情形 3: $2 < r \leq 3$ (见图 1.3).

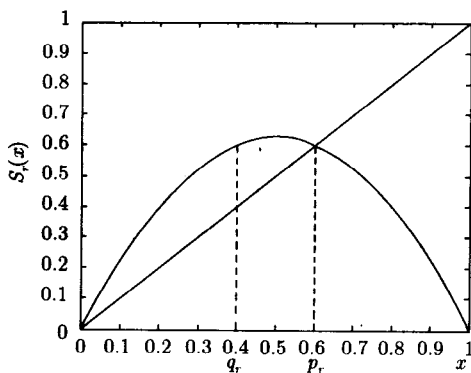


图 1.3 $r = 2.5$ 时 S_r 的图像

当 $r > 2$ 时, 不动点 $p_r = 1 - \frac{1}{r} > \frac{1}{2}$. 在这里我们只考虑 $r < 3$. 令 q_r 为 $(0, \frac{1}{2})$ 中和 p_r 关于 $\frac{1}{2}$ 对称且满足 $S_r(q_r) = S_r(p_r) = p_r$ 的那个惟一点. 然后, 利用 S_r 函数图像的任何性质和 $q_r \leq S_r(\frac{r}{4})$ 的事实, 可证下面结论:

- (1) 若 $x \in (0, q_r)$, 则 x 有一个迭代点大于 q_r ;
- (2) 若 $q_r < x \leq p_r$, 则 $p_r \leq S_r(x) \leq \frac{r}{4}$;
- (3) 若 $p_r < x \leq \frac{r}{4}$, 则 $q_r \leq S_r(x) < p_r$;
- (4) 若 $\frac{r}{4} < x < 1$, 则 $0 < S_r(x) < p_r$.

由 (1)~(4) 推出, 若 $0 < x < 1$, 则 x 有一迭代点落在区间 $(q_r, p_r]$ 中. 更进一步, (2) 和 (3) 隐含着 x 的迭代点在区间 $(q_r, p_r]$ 和区间 $[p_r, \frac{r}{4}]$ 之间振动. 这样, 又有下面两个结论:

(5) 若 $x \in (q_r, p_r]$, 则对所有的 n , $S_r^{2n}(x) \in (q_r, p_r]$;

(6) 若 $x \in [p_r, \frac{r}{4}]$, 则对所有的 n , $S_r^n(x) \in [p_r, \frac{r}{4}]$.

现在, 因为 0 和 p_r 为 S_r 的不动点, 简单计算可给出

$$S_r^2(x) - x = rx(x - p_r)[-r^2x^2 + (r^2 + r)x - r - 1]. \quad (1.4)$$

当 $2 < r < 3$, (1.4) 式方括号内的二次多项式没有实根. 这意味着, 如果 $2 < r < 3$, 则 S_r^2 的仅有的不动点为 0 和 p_r . 因为 $S_r^2(x) - x$ 在 (q_r, p_r) 中无根, 所以它和数 $S_r^2(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}$ 同号. 由于 $S_r^2(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2} > 0$, 于是 $S_r^2(x) - x$ 在 (q_r, p_r) 上处处为正. 由此可知, 当 $x \in (q_r, p_r)$ 时, $x < S_r^2(x)$, 且 (5) 推出序列 $S_r^{2n}(x)$ 位于 $(q_r, p_r]$ 中且单调递增, 因而收敛到 S_r^2 的唯一的正不动点 p_r . 利用 S_r 的连续性, 可知当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$S_r^{2n+1}(x) = S_r(S_r^{2n}(x)) \rightarrow S_r(p_r) = p_r.$$

因而, 只要 $x \in (q_r, p_r]$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_r^n(x) = p_r$. 既然 $(0, 1)$ 中的每一个 x 都有一个迭代点落在 $(q_r, p_r]$ 当中, 由上述可知, 对所有的 $x \in (0, 1)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_r^n(x) = p_r$. 换言之, p_r 的吸引区域依然是 $(0, 1)$. 其结果是, S_r 除不动点外没有其他的周期点. 同样的结论对 $r = 3$ 也成立, 不过其证明更费笔墨.

情形 4: $3 < r \leq 4$ (见图 1.4).

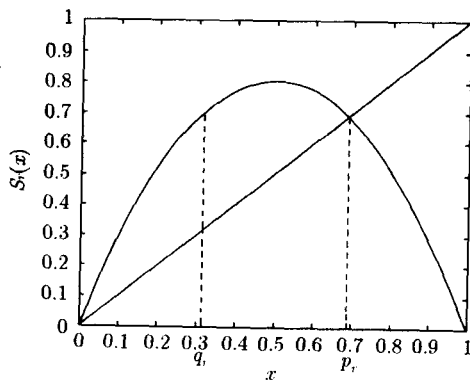


图 1.4 $r = 3.2$ 时 S_r 的图像

我们已知当 $0 < r \leq 3$ 时, S_r 的动力学状态是正规的. 特别是, 每个 $x \in (0, 1)$ 的轨道均趋向于吸引不动点 0 ($0 < r \leq 1$) 或 $p_r = 1 - \frac{1}{r}$ ($1 < r \leq 3$), 因而仅有的周期点为不动点. 当 $3 < r \leq 4$ 时, 不动点 0 依然是排斥的, 而不动点 p_r 则由吸引变成排斥. $(0, 1)$ 中的其他点的迭代序列是收敛、振荡? 或是全无规律可循? 除了 0 和 p_r 外还有其他周期点吗? 当 r 由 3 向 4 增加时, S_r 的动力系统确定性性质的分析将变得愈来愈复杂. 我们仅仅详细研究 $3 < r < 1 + \sqrt{6}$ 时的情形, 而对其他情形仅列出一些重要的结果.

现在我们需要探讨 S_r 的二次迭代映射 S_r^2 . 当 $r = 3$ 时, S_r^2 的函数图像在点 (p_r, p_r) 与直线 $y = x$ 相切. 当 $r > 3$ 时, 由 (1.4) 式知, S_r^2 除 0 和 p_r 之外的另两个不动点是二次多项式方程

$$-r^2x^2 + (r^2 + r)x - r - 1 = 0$$

的实根. 它们是

$$s_r = \frac{1}{2} + \frac{1}{2r} - \frac{1}{2r} \sqrt{(r-3)(r+1)}$$

和

$$t_r = \frac{1}{2} + \frac{1}{2r} + \frac{1}{2r} \sqrt{(r-3)(r+1)}.$$

既然 0 和 p_r 为当 $r > 1$ 时 S_r 仅有的不动点, 显见 $\{s_r, t_r\}$ 是当 $r > 3$ 时 S_r 的一个 2-循环. 经过简单计算, 我们发现

$$(S_r^2)'(s_r) = S_r'(s_r)S_r'(t_r) = (r - 2rs_r)(r - 2rt_r) = -r^2 + 2r + 4.$$

因为 $|-r^2 + 2r + 4| < 1$ 当且仅当 $3 < r < 1 + \sqrt{6}$, 故当 $3 < r < 1 + \sqrt{6}$ 时, 2-循环 $\{s_r, t_r\}$ 是吸引的. 进一步可证, 2-循环 $\{s_r, t_r\}$ 的吸引区域由 $(0, 1)$ 中除了不动点 p_r 和终结不动点以外的所有点组成.

当 $r > 1 + \sqrt{6}$ 时, 这个 2-循环 $\{s_r, t_r\}$ 由吸引变成排斥. 也许我们能猜测, 一个吸引的 4-循环由此而生. 事实上, 精细的分析告诉我们, 存在参数 r 的所谓的周期加倍分歧值序列 $\{r_n\}$, 其中 $r_0 = 3, r_1 = 1 + \sqrt{6}$, 使下列性质成立:

- (1) 若 $r_0 < r \leq r_1$, 则 S_r 有两个排斥不动点和一个吸引 2-循环;
- (2) 若 $r_1 < r \leq r_2$, 则 S_r 有两个排斥不动点, 一个排斥 2-循环和一个吸引 2^2 -循环;
- (3) 若 $r_2 < r \leq r_3$, 则 S_r 有两个排斥不动点, 一个排斥 2-循环, 一个排斥 2^2 -循环和一个吸引 2^3 -循环;

(4) 更一般地, 对 $n = 1, 2, \dots$, 若 $r_{n-1} < r \leq r_n$, 则 S_r 有两个排斥不动点, 对每一个 $k = 1, 2, \dots, n-1$, 有一个排斥 2^k -循环和一个吸引 2^n -循环.

已经证明, $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r_\infty = 3.61547 \dots$, 这个极限值称为二次多项式映射族 $\{S_r\}$ 所对应的 Feigenbaum 数. 更进一步地, 比值序列

$$d_n = \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时收敛于 $d_\infty = 4.669202 \dots$, 这个数称为通用常数. 这是因为对于许多像逻辑斯蒂模型那样的单峰映射族, 其分歧点列以如此正规的方式出现使得相邻分歧点距离之比值序列都趋于这个同样的常数 d_∞ . 通用常数 d_∞ 也称为 Feigenbaum 常数, 因为物理学家 Mitchell Feigenbaum 在 1978 年第一次发现了它以及它的普适性.

迄今为止, 对于 $0 < r < r_\infty$, 因为每个点 $x \in [0, 1]$ 不是周期点, 就是终结周期点, 即某个迭代点成为周期点, 或其轨道 $\{S_r^n(x)\}$ 被吸引到一个周期轨道, S_r 的动力系统的确定性性质依然为正规的. 这样, 每个初始点的轨道的最终状态是可预测的. 当 $r > r_\infty$ 时, 情况就不那么简单了. 事实上, 对 r 的某些值, 存在非常复杂的不规则或混沌行为. 譬如说, 当 $3.829 \leq r \leq 3.840$ 时, S_r 有周期为 3 的点. 著名的李-Yorke 定理^[86]说如果一个将区间 I 映射到本身的连续映射 S 有一个周期-3 点, 则对每一个自然数 k , S 有一个周期- k 点. 更进一步地, 存在一个不可列集合 $A \subset I$, 此集合不包含任何周期点且满足如下条件:

(1) 对 A 中任何两个相异点 $x \neq y$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |S^n(x) - S^n(y)| > 0 \quad \text{且} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} |S^n(x) - S^n(y)| = 0;$$

(2) 对每一个 $x \in A$ 及每一个周期点 $p \in I$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |S^n(x) - S^n(p)| > 0.$$

这样, 由李-Yorke 定理可知, S_r 的迭代点序列当 $3.829 \leq r \leq 3.840$ 时是混沌的, 即其最终状态是不可预测的.

逻辑斯蒂模型当 $r = 4$ 时值得特别注意. 此时, 它将区间 $[0, 1]$ 满射之上. 注意到 S_4 与帐篷映射

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ 2(1-x), & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \quad (1.5)$$

是拓扑共轭的^[7], 即存在 $[0, 1]$ 到 $[0, 1]$ 上的同胚映射 h 使得 $S_4 \circ h = h \circ T$, 故由 T 有一周期-3 轨道 $\left\{\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}\right\}$ 以及李-Yorke 定理推出 $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 为混沌映射. 由拓扑共轭的性质推知, S_4 也是混沌的. 作为一个重要推论, 如果我们随机地选取一个初始点

$x_0 \in [0, 1]$, 则 x_0 的轨道序列 $\{x_n\} (x_n = S_4^n(x_0))$ 的极限集以概率为 1 的可能性是整个区间 $[0, 1]$. 换言之, 任给 $x \in [0, 1]$, 存在子序列 $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x.$$

混沌动力系统的研究在科学和工程界愈来愈有用. 除了李天岩和 James Yorke 关于混沌的最初定义^[86]外, 文献中有关于混沌的各种各样的定义, 但最常用到的定义是由 Devaney 在参考文献 [27] 中给出的. 到目前为止还没有关于混沌的通用定义, 混沌的本质特性是关于初始条件的敏感依赖性, 以至于动力系统迭代轨道的最终走向无法预测. 混沌动力学的理论和方法不仅在数学中具有基本重要性^[22, 27, 96], 在物理、生物、工程, 甚至经济学科中也应用广泛^[7, 18, 91, 95].

我们已经从确定性观点浏览了离散动力系统并观察到当映射族的参数变化时动力系统的行为怎样由有序走向混沌. 然而, 在 1.2 节我们将以另一种观点来看混沌, 即从概率的观点来研究混沌动力系统.

1.2 混沌的统计研究

虽然混沌动力系统起始于一般点的轨道的最终性态显示出不可预测性, 但就其统计性质而言, 该动力系统常常具有正规性. 换句话说, 在确定性意义下的一个混沌动力系统在概率的意义下可能并非如此. 事实上, 在物理测量中, 我们常常考虑某个物理量的概率分布. 令 $S: X \rightarrow X$ 为相空间 X 上的一个动力系统. 任给 X 的一个子集 A , 我们不再观察个别轨道的确定性性质, 而是通过观察这些轨道中的点落入 A 中的频率来考虑它们的概率性质. 为此目的, 让 χ_A 表示集合 A 的特征函数, 即

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases} \quad (1.6)$$

则起始于点 $x \in X$ 的轨道落入 A 的时间平均或频率由式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_A(S^k(x)) \quad (1.7)$$

给出, 倘若这个极限存在的话. 这个数度量了此轨道怎样频繁地进入 A . 经典的遍历理论处理关于这个时间平均的存在性、与其他量的关系以及其他方面的问题. 它肇始于统计力学中的 Boltzmann 遍历假设. 此假设断言, 若相空间 X 上的一个有限正测度 μ 在 S 下

不变并且是遍历的, 即对 X 的所有可测子集 A , $\mu(S^{-1}(A)) = \mu(A)$, 且 $S^{-1}(A) = A$ 隐含 A 为空集或整个空间, 则对几乎所有的初始点 $x \in X$, 时间平均 (1.7) 与空间平均

$$\frac{\mu(A)}{\mu(X)} = \frac{1}{\mu(X)} \int_X \chi_A d\mu \quad (1.8)$$

一致. Boltzmann 遍历假设在数学上被 Birkhoff^[119] 于 1931 年第一次严格地建立.

定理 1.2.1 (Birkhoff 逐点遍历定理) 设 μ 为在 $S: X \rightarrow X$ 下不变的一个概率测度. 则对 X 上的任意一个 μ -可积函数 f 以及对 μ 而言几乎每一个 $x \in X$, 时间平均

$$\bar{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(S^k(x))$$

存在且有

$$\bar{f}(S(x)) = \bar{f}(x).$$

并且, 若 S 关于 μ 是遍历的, 则 $\bar{f}$ 是常数 $\int_X f d\mu$.

现在一个问题自然出现: 给定 S , 什么样的测度在 S 下不变? 如果我们不对 μ 提出更多的要求, 答案也许是平凡的或缺乏物理上的重要性. 例如, 对于逻辑斯蒂模型 $S(x) = 4x(1-x)$, 因为 0 是 S 的一个不动点, 显而易见集中在点 0 上的 Dirac 测度 δ_0 关于 S 不变. 按照定义, 若 $0 \in A$, 则 $\delta_0(A) = 1$, 反之则 $\delta_0(A) = 0$. 一般来说, $S: X \rightarrow X$ 的任何一个不动点 a 给出一个 S -不变的概率测度, 即集中在点 a 上的 Dirac 测度 δ_a . 注意, $[0, 1]$ 上的 Dirac 测度 δ_a 关于 $[0, 1]$ 上的 Lebesgue 测度不是绝对连续的.

关于定义在紧空间上的连续变换的不变测度的存在性已由下列定理所建立^[118]. 我们将在 3.4 节中给出它的证明 (见定理 3.4.8).

定理 1.2.2 令 X 为一个紧致的距离空间且 $S: X \rightarrow X$ 为连续变换. 则存在 S 下不变的概率测度.

在许多应用中, 我们对某个给定测度绝对连续的有限不变测度的存在性与计算问题更感兴趣. 换言之, 我们想要找到这样的不变测度, 此测度可表示成某一密度函数关于给定测度的积分. 本书中我们着重于这个问题的探讨. 在这里 Frobenius-Perron 算子起着重要的作用. 这个算子告诉我们对于给定的动力系统, 密度函数怎样变化. 考虑 Frobenius-Perron 算子的迭代将我们引导到如下结论: 确定性意义下的混沌并非在概率意义下也如此.

令 (X, Σ, μ) 为一个 σ -有限测度空间, $S: X \rightarrow X$ 为非奇异变换, 即由 $\mu(A) = 0$, 可推出 $\mu(S^{-1}(A)) = 0$, 以及 $P: L^1(X) \rightarrow L^1(X)$ 为由式

$$\int_A P f d\mu = \int_{S^{-1}(A)} f d\mu, \quad \forall A \in \Sigma \quad (1.9)$$