

高等学校教学参考书

材料力学

问题、例题与分析方法

单辉祖 编著



高等教育出版社

高等学校教学参考书

材料力学问题、例题与分析方法

单辉祖 编著

高等教育出版社

内容简介

本书是高等教育出版社“高等教育百门精品课程教材建设计划”中的立项项目。

全书精编了材料力学中具有典型性、概念性、思考性、综合性问题与例题 300 个,包括计算与理论分析题,以及一些实验题,并有少量利用计算机求解的例题。本书通过大量的问题与实例分析,着重阐述材料力学的分析与求解方法,引导学生深入理解与掌握材料力学的基本概念与理论。

本书包括:绪论;轴向拉压应力;轴向拉压变形;轴向拉压问题进一步研究;扭转;扭转问题进一步研究;弯曲内力;弯曲应力;弯曲应力进一步研究;非对称弯曲与特殊梁;弯曲变形;弯曲变形进一步研究;应力应变状态分析;复杂应力状态强度问题;压杆稳定问题;稳定问题进一步研究;能量法;能量法进一步研究;静不定问题分析与疲劳问题等。全书共 20 章。

本书也是“北京高等教育精品教材”的立项项目。

本书可供学习材料力学的学生、考研人员以及参加材料力学竞赛的学生参考,也可供相关教师与工程技术人员参考。

本书也可作为“材料力学方法”等类课程的基本教材。

图书在版编目(CIP)数据

材料力学问题、例题与分析方法/单辉祖编著.

—北京:高等教育出版社,2006.1

ISBN 7-04-017768-4

I. 材... II. 单... III. 材料力学-高等学校-
教学参考资料 IV. TB301

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 145493 号

策划编辑 黄毅 责任编辑 姜凤 封面设计 李卫青 责任绘图 吴文信
版式设计 王艳红 责任校对 尤静 责任印制 朱学忠

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100011
总 机 010-58581000

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 北京京科印刷有限公司印刷

开 本 787×960 1/16
印 张 26.5
字 数 570 000

购书热线 010-58581118
免费咨询 800-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
畅想教育 <http://www.widedu.com>

版 次 2006 年 1 月第 1 版
印 次 2006 年 1 月第 1 次印刷
定 价 32.90 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 17768-00

前 言

本书是高等教育出版社“高等教育百门精品课程教材建设计划”的立项项目,也是“北京高等教育精品教材”的立项项目。

本书通过大量的问题与实例分析,着重阐述材料力学的分析与求解方法,引导学生深入理解与掌握材料力学的基本概念与理论,开阔学生思路,培养学生分析问题与解决问题的能力。

本书分为“基本”与“进一步研究”两大部分。“基本”部分的内容与教学体系一致,紧密结合本科材料力学教学;“进一步研究”部分,则涉及材料力学中一些较深、较难与某些扩展性问题,以满足学生进一步提高的要求,在书中用*号标示。

本书虽然以问题与例题的形式编写(统一按问题的形式排序),但力求保持较强的系统性,所编选的问题与例题,既有层次,又有一定内在联系。在编排上,与材料力学基本教材相一致,采取章内设节的架构,以便于学生学习。

全书精心编写材料力学问题与例题300个。对于一些学生难于理解与需要深入探讨的重要问题,提供了既简明又深入的论述。在例题编写方面,注意典型性、多样性、概念性、思考性、实用性与综合性,既包括计算与理论分析题,也包括一些实验题,还包括少量利用计算机求解的例题。对于每个例题,不仅给出完整的求解过程,还特别注重解题思路分析与结果讨论,起到举一反三的作用,提高学生分析与解题的能力。

在1986至1995年,本书作者曾以“材料力学方法”为课程名称,先后三次为本科学生开课,学生普遍反映收获很大,“是在材料力学学习方面的一次升华”。在1996,2000与2004年,北京航空航天大学材料力学教研室的有关教师,又主要以上述教学内容,培训参加全国基础力学(材料力学与理论力学)竞赛的北京航空航天大学学生,竞赛结果,在第三届(1996年)、第四届(2000年)与第五届(2004年)全国基础力学竞赛中,北京航空航天大学学生一直名列前茅。本书即是在上述“材料力学方法”课程讲稿的基础上,经整理、修改与扩展而成,特别是大量增加了反映材料力学教学基本要求的内容,即上述“基本”部分。

本书由单辉祖编著。北京航空航天大学吴鹤华、崔德瑜与蒋持平教授参加校订。

本书是一本学习材料力学的教学参考书,给正在学习材料力学的学生、考研

II 前言

人员以及参加材料力学竞赛的学生,提供了全面、系统与详细的指导,而对相关教师与工程技术人员,相信也会有所裨益。

本书也可作为“材料力学方法”等类课程的基本教材。

本书承大连交通大学陶学文教授审阅,提出了许多精辟而中肯的意见。在编写过程中,还得到了北京航空航天大学的相关领导与同志的支持与帮助。谨此一并致谢。

由于编者水平有限,加之编写时间仓促,书中难免存在一些不足之处,欢迎读者批评指正。

编者

2005年9月

郑 重 声 明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010) 58581897/58581896/58581879

传 真：(010) 82086060

E - mail: dd@hep.com.cn

通信地址：北京市西城区德外大街 4 号

高等教育出版社打击盗版办公室

邮 编：100011

购书请拨打电话：(010)58581118

目 录

第 1 章 绪论	1
§ 1-1 内容提要	1
§ 1-2 内力与截面法	3
§ 1-3 正应力与切应力	5
§ 1-4 正应变与切应变	7
§ 1-5 胡克定律	10
第 2 章 轴向拉压应力	12
§ 2-1 内容提要	12
§ 2-2 轴力与轴力图	15
§ 2-3 拉压杆的应力	16
§ 2-4 材料拉压力学性能	19
§ 2-5 拉压强度计算	22
§ 2-6 连接部分的强度计算	27
第 3 章 轴向拉压变形	31
§ 3-1 内容提要	31
§ 3-2 拉压杆的变形	33
§ 3-3 桁架的节点位移	35
§ 3-4 拉压应变能与功能原理	39
§ 3-5 简单拉压静不定问题	41
§ 3-6 热应力与初应力	48
§ 3-7 综合应用	53
* 第 4 章 轴向拉压问题进一步研究	56
§ 4-1 载荷集度、轴力与轴向位移间的微分关系	56
§ 4-2 拉压问题弹塑性分析	59
§ 4-3 位移法解拉压静不定问题	62
§ 4-4 轴向拉压连接问题	65
§ 4-5 柔带与柔索问题	68
第 5 章 扭转	72
§ 5-1 内容提要	72
§ 5-2 圆轴扭转应力与强度计算	76
§ 5-3 圆轴扭转变形与应变能	79

§ 5-4 圆轴扭转静不定问题	86
§ 5-5 薄壁杆扭转	91
§ 5-6 综合应用	94
* 第 6 章 扭转问题进一步研究	96
§ 6-1 扭力偶矩集度、扭矩与扭转位移的微分关系	96
§ 6-2 圆轴扭转弹塑性分析	98
§ 6-3 力偶作用下铆钉群受力分析	101
§ 6-4 轴间连接分析	104
第 7 章 弯曲内力	107
§ 7-1 内容提要	107
§ 7-2 剪力、弯矩方程与图	110
§ 7-3 剪力、弯矩与横向分布载荷集度间的关系	113
§ 7-4 剪力、弯矩与分布力偶集度等之间的关系	119
§ 7-5 刚架与曲杆的内力	121
§ 7-6 叠加法画弯矩图	125
第 8 章 弯曲应力	129
§ 8-1 内容提要	129
§ 8-2 对称弯曲正应力	133
§ 8-3 对称弯曲切应力	137
§ 8-4 梁的强度计算	144
§ 8-5 双对称截面梁的非对称弯曲	148
§ 8-6 弯拉(压)组合	151
* 第 9 章 弯曲应力进一步研究	157
§ 9-1 双模量材料梁的弯曲正应力	157
§ 9-2 直梁纵向截面上的正应力分析	158
§ 9-3 切向承载梁的弯曲应力分析	162
§ 9-4 弯拉组合应力分析	165
§ 9-5 梁的弹塑性分析	167
第 10 章 非对称弯曲与特殊梁	171
§ 10-1 内容提要	171
§ 10-2 主轴与主惯性矩	174
§ 10-3 非对称弯曲正应力	177
§ 10-4 薄壁梁的弯曲切应力与截面剪心	181
§ 10-5 复合梁的弯曲正应力与切应力	186
§ 10-6 曲梁应力	189
第 11 章 弯曲变形	192
§ 11-1 内容提要	192

§ 11-2	挠曲轴的绘制	195
§ 11-3	计算梁位移的积分法	197
§ 11-4	计算梁位移的奇异函数法	201
§ 11-5	计算梁位移的叠加法	203
§ 11-6	静不定梁分析	208
§ 11-7	直梁接触问题分析	214
§ 11-8	直梁弯曲变形计算机分析	220
§ 11-9	综合应用	222
* 第 12 章	弯曲变形进一步研究	227
§ 12-1	剪切挠度与梁端轴向位移	227
§ 12-2	直梁温度变形问题	229
§ 12-3	初曲梁的弯曲变形	232
§ 12-4	计及剪力影响的直梁接触问题分析	236
§ 12-5	组合梁与梁间接触问题	240
§ 12-6	挠曲轴四阶微分方程与弹性基础梁	243
第 13 章	应力应变状态分析	247
§ 13-1	内容提要	247
§ 13-2	平面应力状态应力分析	250
§ 13-3	空间应力状态应力分析	254
§ 13-4	平面应变状态应变分析	258
§ 13-5	应力应变关系	260
第 14 章	复杂应力状态强度问题	264
§ 14-1	内容提要	264
§ 14-2	强度理论	267
§ 14-3	弯扭组合与弯拉(压)扭组合	270
§ 14-4	矩形截面杆组合变形一般情况	279
§ 14-5	承压薄壁圆筒	282
第 15 章	压杆稳定问题	289
§ 15-1	内容提要	289
§ 15-2	弹性支持刚性杆的临界载荷	292
§ 15-3	弹性支持刚性杆系的临界载荷	295
§ 15-4	细长弹性压杆的临界载荷	298
§ 15-5	弹性支持细长弹性压杆的临界载荷	302
§ 15-6	压杆稳定问题计算机分析	304
§ 15-7	综合应用	305
* 第 16 章	稳定问题进一步研究	308
§ 16-1	稳定概念进一步研究	308

§ 16-2	弹性与刚性混合杆系的临界载荷	309
§ 16-3	弹性支持弹性杆的临界载荷	313
§ 16-4	弹性基础支持弹性杆的临界载荷	319
§ 16-5	偏心与初曲承压杆分析	321
§ 16-6	其他形式的稳定问题	323
第 17 章	能量法	327
§ 17-1	内容提要	327
§ 17-2	外力功与应变能	331
§ 17-3	互等定理	334
§ 17-4	卡氏定理	337
§ 17-5	单位载荷法	341
§ 17-6	图形互乘法	349
§ 17-7	冲击应力	351
* 第 18 章	能量法进一步研究	360
§ 18-1	剪心、扭心与连接分析	360
§ 18-2	余能与克罗第-恩格塞定理	363
§ 18-3	弹性体冲击刚性体时的应力分析	366
§ 18-4	弹性体冲击弹性体时的应力分析	369
§ 18-5	梁的横向剪切效应与夹层梁的弯曲变形	372
§ 18-6	利用能量法确定压杆的临界载荷	376
第 19 章	静不定问题分析	379
§ 19-1	内容提要	379
§ 19-2	用力法分析外力静不定问题	380
§ 19-3	用力法分析内力静不定问题	386
§ 19-4	对称与反对称静不定问题分析	392
§ 19-5	静不定刚架空间受力分析	398
第 20 章	疲劳问题	403
§ 20-1	内容提要	403
§ 20-2	循环应力	406
§ 20-3	对称循环应力下的疲劳强度计算	407
§ 20-4	非对称与弯扭组合循环应力下的疲劳强度计算	409
参考文献		414
作者简介		415

第1章 绪 论

§1-1 内 容 提 要

构件的承载能力与安全工作的基本要求

强度 构件抵抗破坏(断裂或显著塑性变形)的能力

刚度 构件抵抗变形的能力

稳定性 构件保持原有平衡形式的能力

构件应具备足够的强度、刚度与稳定性,以保证在规定的使用条件下,不破坏、不过分变形与不失稳。

材料力学的研究对象与基本假设

一个方向的尺寸远大于其他两个方向的尺寸的构件,称为杆件。一个方向的尺寸远小于其他两个方向的尺寸的构件,称为板件。平分板件厚度的几何面,称为中面。中面为平面的板件称为板;中面为曲面的板件称为壳。

材料力学的主要研究对象是杆,以及由若干杆组成的简单杆系,同时也研究一些形状与受力均比较简单的板与壳。

材料力学的基本假设:

1. 连续性假设 在构件所占有的空间内毫无空隙地充满了物质,即认为是密实的。
2. 均匀性假设 材料的力学性能与其在构件中的位置无关,即认为是均匀的。
3. 各向同性假设 材料沿各个方向具有相同的力学性能,即认为是各向同性的。

外力、内力与截面法

作用在研究对象上的载荷与约束力,称为外力。

连续分布作用在构件表面某一范围的力,称为分布力。当分布力的作用范围远小于构件的表面面积或杆长时,可简化为作用于一点处的力,称为集中力。

随时间变化极缓慢或不变化的载荷,称为静载荷;随时间显著变化或使构件各质点产生明显加速度的载荷,称为动载荷。

由于外力作用,构件内部相连部分之间的相互作用力,称为内力,它是一种连续分布力。

作用在杆件横截面的内力可用三个内力分量与三个内力偶矩分量表示。沿轴线的内力分量,称为轴力;作用线位于所切横截面的内力分量,称为剪力;矢量沿轴线的内力偶矩分量,称为扭矩;矢量位于所切横截面的内力偶矩分量,称为弯矩。

将杆件假想地切开以显示内力,并由平衡条件建立内力与外力间的关系或由外力确定内力的方法,称为截面法。

正应力、切应力与切应力互等定理

在截面 $m-m$ 上任一点 k 的周围取一微小面积 ΔA ,并设作用于其上的内力为 ΔF ,则

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

称为截面 $m-m$ 上 k 点处的应力。应力是内力分布的集度。

应力 p 沿截面法向的分量,称为正应力,并用 σ 表示;应力 p 沿截面切向的分量,称为切应力,并用 τ 表示。

微体受力最基本与最简单的形式有两种:单向应力与纯剪切。在单向应力状态下,微体仅在一对互相平行的截面上承受正应力;在纯剪切状态下,微体仅承受切应力。

在微体的互垂截面上,垂直于截面交线的切应力数值相等,而方向则均指向或离开该交线,称为切应力互等定理。

正应变与切应变

在构件内任一点 k 沿任一方位 ka 取一微小线段 Δs ,变形后该线段的长度变为 $\Delta s + \Delta u$,则

$$\varepsilon = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta s}$$

称为 k 点处沿 ka 方位的正应变。

过构件内任一点 k 取任意两互垂微线段,变形后该二微线段所夹直角的改变量,称为 k 点处沿该二微线段方位的切应变,并用 γ 表示,其单位为 rad。

胡克定律与剪切胡克定律

单向应力试验表明:在正应力 σ 作用下,材料沿正应力作用方位发生正应

变 ε , 如果正应力不超过一定限度, 则正应力与正应变成正比, 写成等式, 即

$$\sigma = E\varepsilon$$

上述关系称为胡克定律, 比例常数 E 称为弹性模量。

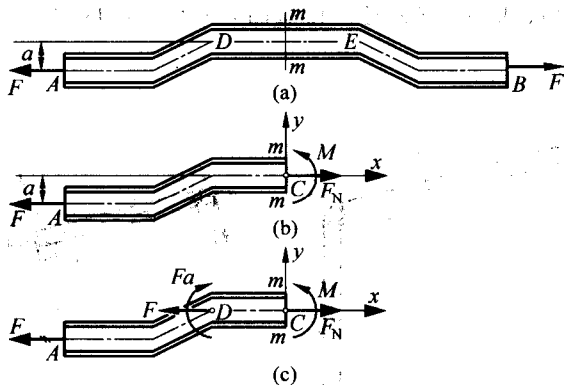
纯剪切试验表明: 在切应力 τ 作用下, 材料发生切应变 γ , 如果切应力不超过一定限度, 则切应力与切应变成正比, 写成等式, 即

$$\tau = G\gamma$$

上述关系称为剪切胡克定律, 比例常数 G 称为切变模量。

§1-2 内力与截面法

问题 1-2-1 图 a 所示杆件, 两端承受载荷 F 作用, 试分析横截面 $m-m$ 上的内力。



问题 1-2-1 图

解: 1. 解法一

假想地沿截面 $m-m$ 将杆切开, 并选择切开后的左段为研究对象 (图 b)。

首先可以看出, 在截面 $m-m$ 上, 存在一个通过截面形心 C 的内力即轴力, 并用 F_N 表示; 其次, 由于轴力 F_N 与外力 F 平行但不共线, 从而构成一个位于 $x-y$ 平面的力偶, 因此, 在截面 $m-m$ 上, 还将存在一个矢量位于横截面上的内力偶矩即弯矩, 并用 M 表示。

于是, 由平衡方程

$$\sum F_x = 0, \quad F_N - F = 0$$

$$\sum M_C = 0, \quad M - Fa = 0$$

得截面 $m-m$ 上的轴力与弯矩分别为

$$F_N = F$$

$$M = Fa$$

2. 解法二

将作用在杆端 A 的外力 F , 平移到杆段 DE 起始横截面的形心 D , 得作用在该点的集中力

F , 与位于 $x-y$ 平面的矩为 Fa 的附加力偶(图 c)。可见, 截面 $m-m$ 上一定存在轴力 F_N 与弯矩 M 。

根据上述分析, 由平衡方程 $\sum F_x = 0$ 与 $\sum M_c = 0$, 同样可求得截面 $m-m$ 上的轴力与弯矩分别为

$$F_N = F$$

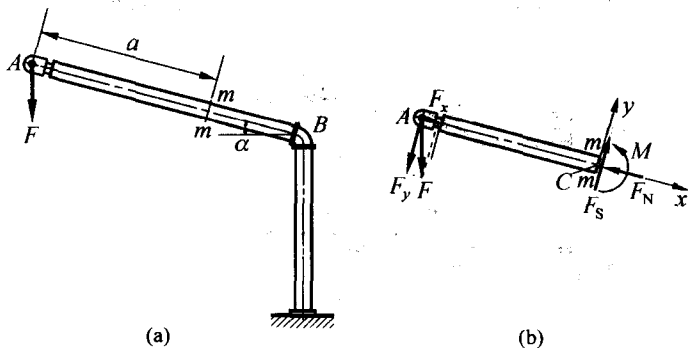
$$M = Fa$$

3. 讨论

采用将外力平移到研究杆段的分析方法, 对于确定横截面上将存在何种内力分量, 比较简便, 当外力较复杂时更是如此。

要注意的是, 当研究对象确定后(此处即切开后的左段), 作用在研究对象上的外力, 不能平移到非研究对象上, 同样, 作用在非研究对象上的外力, 也不能平移到研究对象上, 否则, 将改变所研究截面的内力。

问题 1-2-2 图 a 所示立柱, 其斜杆 AB 的倾斜角为 α 。立柱在节点 A 承受铅垂载荷 F 作用, 试分析斜杆任一横截面 $m-m$ 上的内力。



问题 1-2-2 图

解: 1. 问题分析

假想地沿横截面 $m-m$ 将斜杆切开, 并选择切开后的左段为研究对象(图 b)。

为了分析截面 $m-m$ 上的内力, 将载荷 F 沿斜杆的轴向与横向分解, 得相应分力为

$$F_x = F \sin \alpha$$

$$F_y = F \cos \alpha$$

在轴向载荷 F_x 作用下, 截面 $m-m$ 上将引起轴力 F_N ; 而在横向载荷 F_y 作用下, 该截面上则将引起剪力 F_S 与弯矩 M 。

2. 内力计算

作用在研究对象上的各力组成一平面力系, 平衡方程为

$$\sum F_x = 0, \quad F_x - F_N = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_S - F_y = 0$$

$$\sum M_c = 0, \quad M + F_y a = 0$$

分别得

$$F_N = F_x = F \sin \alpha$$

$$F_S = F_y = F \cos \alpha$$

$$M = -F_y a = -F a \cos \alpha$$

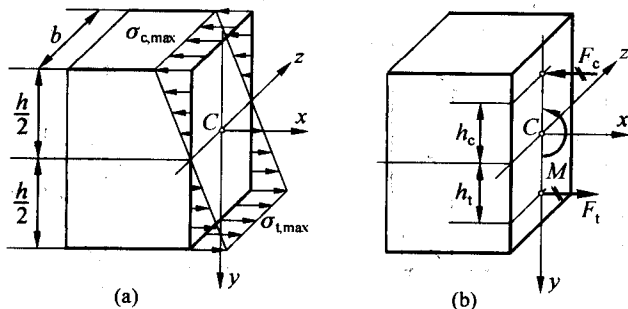
所得 M 为负,说明图 b 中关于弯矩 M 的方向假设有错,应为顺时针方向。

3. 讨论

上述问题也可采用另一方法求解。首先,将载荷 F 平移到截面 $m-m$ 的形心 C ,得作用在该形心处的集中力 F ,以及位于 $x-y$ 平面的附加力偶。然后,将该集中力 F 分解为轴向与横向两个分力。最后,根据研究对象的平衡条件,也可确定截面 $m-m$ 上的内力。

§1-3 正应力与切应力

问题 1-3-1 图 a 所示矩形截面杆,横截面上的正应力沿截面高度线性分布,最大压应力与最大拉应力分别为 $\sigma_{c,max}$ 与 $\sigma_{t,max}$,且数值相等。试分析横截面上的内力。横截面的宽度与高度分别为 b 与 h ,图中之 C 为截面形心,坐标轴 y 与 z 分别沿截面铅垂与水平对称轴。



问题 1-3-1 图

解: 1. 问题分析

横截面上仅存在正应力,因此,横截面上不可能存在剪力与扭矩。其次,横截面上的正应力沿截面宽度均匀分布,因此,横截面上也不可能存在矢量沿坐标轴 y 的弯矩 M_y 。

2. 内力计算

在拉伸区内,由正应力所构成的合力为

$$F_t = \frac{\sigma_{t,max}}{2} \cdot b \frac{h}{2} = \frac{bh\sigma_{t,max}}{4}$$

而其作用点至坐标轴 z 的距离为

$$h_t = \frac{2}{3} \frac{h}{2} = \frac{h}{3}$$

同理,得压缩区由正应力所构成的合力为

$$F_c = \frac{bh\sigma_{c,\max}}{4} = F_t$$

而其作用点至坐标轴 z 的距离为

$$h_c = h_t = \frac{h}{3}$$

由此可见,横截面上的轴力为

$$F_N = F_t - F_c = 0$$

而合力 F_t 与 F_c 则构成一力偶,其矩即弯矩则为

$$M = F_t(h_t + h_c) = \frac{bh\sigma_{t,\max}}{4} \left(\frac{h}{3} + \frac{h}{3} \right) = \frac{bh^2\sigma_{t,\max}}{6}$$

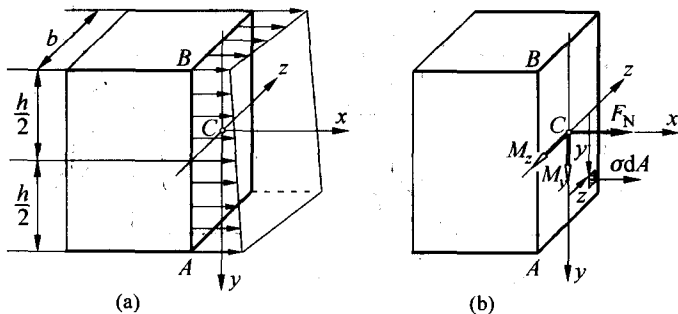
3. 讨论

将合力 F_t 与 F_c 向截面形心 C 简化,并计算主矩与主矢量,也可得到同样的结论。

问题 1-3-2 图 a 所示矩形截面杆, C 为截面形心,坐标轴 y 与 z 分别沿截面铅垂与水平对称轴。横截面上的正应力呈线性分布,其表达式为

$$\sigma = a + ky + cz$$

式中: $a = 1.20 \times 10^8 \text{ Pa}$; $k = 5.00 \times 10^8 \text{ Pa/m}$; $c = 1.00 \times 10^9 \text{ Pa/m}$ 。试确定横截面上的内力。横截面的宽度 $b = 40 \text{ mm}$, 高度 $h = 80 \text{ mm}$ 。



问题 1-3-2 图

解: 1. 问题分析

横截面上仅存在正应力,因此,横截面上只可能存在轴力 F_N 、弯矩 M_y 与 M_z ,而不可能存在剪力与扭矩。

为了计算轴力与弯矩,如图 b 所示,在横截面上坐标为 (y, z) 的任一点,取微面积 dA ,其上作用有微内力 σdA ,横截面上各点处的微内力组成一空间平行力系,由此即可求出横截面上的轴力与弯矩。

2. 内力计算

由图 b 可以看出,横截面上的轴力为

$$F_N = \int_A \sigma dA = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} (a + ky + cz) dy dz$$

$$= abh = (1.20 \times 10^8 \text{ Pa})(0.040 \text{ m})(0.080 \text{ m}) = 3.84 \times 10^5 \text{ N}$$

矢量沿坐标轴 y 的弯矩为

$$\begin{aligned} M_y &= \int_A z \sigma dA = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} (az + kyz + cz^2) dy dz \\ &= \frac{chb^3}{12} = \frac{(1.00 \times 10^9 \text{ Pa/m})(0.080 \text{ m})(0.040 \text{ m})^3}{12} = 4.27 \times 10^2 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

而矢量沿坐标轴 z 的弯矩则为

$$\begin{aligned} M_z &= \int_A y \sigma dA = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} (ay + ky^2 + czy) dy dz \\ &= \frac{kbh^3}{12} = \frac{(5.00 \times 10^8 \text{ Pa/m})(0.040 \text{ m})(0.080 \text{ m})^3}{12} = 8.53 \times 10^2 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

3. 讨论

本问题也可先计算分布力的合力,并确定其作用线位置,然后向形心 C 平移,同样可求出横截面上的轴力 F_N 、弯矩 M_y 与 M_z 。

问题 1-3-3 图示微体,其左、右截面上的切应力为 τ ,正应力为 σ_x ,顶面与底面的切应力为 τ' ,正应力为 σ_y 。试证明切应力互等定理仍成立,即 $\tau = \tau'$ 。已知 $\overline{OA} = dx$, $\overline{OB} = dy$, $\overline{OC} = dz$ 。

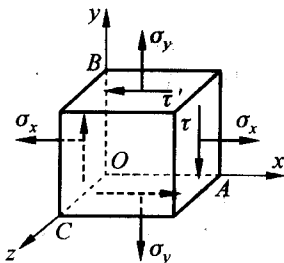
证: 在微体的左、右截面上,分别作用有由正应力 σ_x 构成的法向力 $\sigma_x dydz$, 自相平衡; 在微体的顶面与底面上,分别作用有由正应力 σ_y 构成的法向力 $\sigma_y dxdz$, 也自相平衡。于是,由平衡方程

$$\sum M_z = 0, \quad \tau' dxdz \cdot dy - \tau dydz \cdot dx = 0$$

得

$$\tau = \tau'$$

此即切应力互等定理。



问题 1-3-3 图

§1-4 正应变与切应变

问题 1-4-1 图示板件 $ABCD$, 其变形如图中虚线所示。试计算 A 点处直角 BAD 的切应变, 以及棱边 AD 与 AB 的平均正应变。图中各尺寸的单位均为 mm ①。

解: 1. 直角 BAD 的切应变

A 点处直角 BAD 的切应变 γ , 即直角 BAD 的改变量, 且其单位为 rad , 因此,

$$\gamma = (90.0^\circ - 89.5^\circ) \frac{\pi}{180^\circ} = 8.73 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

① 按照有关制图标准规定, 在本书各章中, 凡长度尺寸的单位为 mm 者, 将不标注单位。