21世纪普通高等教育电子信息类规划教材

信号与系统分析

张华清　许信玉　赵志军　编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

21世纪普通高等教育电子信息类规划教材

信号与系统分析

张华清　许信玉　赵志军　编　著
王宏参　主　审

机　械　工　业　出　版　社

本书全面系统地介绍了信号与系统分析的基本理论和分析方法，采用数学概念与物理概念并重的讲解方式，强调原理、方法与应用的三结合。全书共分 8 章，内容包括：信号与系统的基本概念；连续时间系统的时域分析；连续时间信号与系统的频域分析和复频域分析；离散时间系统的时域分析；离散时间系统的 z 域分析；系统模拟及状态变量分析等。

本书内容丰富、论述清楚。每章后附有精选的习题，书后附有习题参考答案，便于教学及学生自学。

本书按照高等工科学校“信号与系统课程教学基本要求”编写而成，可作为高等学校电子信息工程、通信工程、计算机科学与技术、自动化等专业“信号与系统”课程的教材，也可供相关专业科技工作人员参考。

本书配有电子教案（欢迎使用本书作教材的老师免费索取，电子邮件：wbj@mail. machineinfo. gov. cn）及可供学生自学的课件。

图书在版编目（CIP）数据

信号与系统分析/张华清等编著 .—北京：机械工业出版社，2005.7
21 世纪普通高等教育电子信息类规划教材
ISBN 7-111-16952-2

Ⅰ.信 ...　Ⅱ.张 ...　Ⅲ.①信号分析－高等学校－教材②信号系统－系统分析－高等学校－教材　Ⅳ.TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 079320 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
责任编辑：王保家　版式设计：张世琴　责任校对：李秋荣
封面设计：张　静　责任印制：杨　曦
北京机工印刷厂印刷
2006 年 1 月第 1 版第 1 次印刷
787mm × 1092mm 1/16 · 23 印张 · 571 千字
定价：32.00 元

前　　言

随着电子技术的迅速发展和计算机技术的广泛应用，信号与系统理论的基本概念和基本分析方法已经进入了电子科学领域的各个学科，并促进了本领域各学科，如信息工程、通信工程、自动控制、航空航天和计算机技术等学科的相互影响、相互渗透和共同发展。“信号与系统”就是在上述各学科发展的基础上建立起来的一门理论基础课程，目前已成为高等工科院校电子信息类专业及相关专业的重要专业基础课程。

本教材是根据高等工科院校“信号与系统课程教学基本要求”，并结合编者在教学实践中的体会而编写的，主要讨论确定性信号的特性和线性时不变系统的基本理论和基本分析方法，并建立了信号分析与系统分析之间的逻辑关系。在教学内容的安排上是先“连续”后“离散”、先“时域”后“变换域”。这样安排既体现了两者之间在理论分析上的相对独立性、内容上相互并行的特点，又遵循了先易后难、循序渐进的教学原则。我们在编写的过程中，注重突出这门课程教学的知识重点，强调对基本理论概念的物理意义的解释，力求实现原理、方法与应用的三结合，实现数学概念与物理概念并重的讲解方式，并通过实际应用的举例说明，使学习者对所学的知识有更深刻的理解和认识，为后续的专业课打下扎实的理论基础。

本教材内容丰富、论述清楚、系统性和实践性较强。每章后面都安排有精选的习题，书末附有习题参考答案，以帮助学习者更好地理解和掌握所学的知识。书中标“*”号的内容属于选学内容。本书不仅可作为高等院校电子信息工程、通信工程、计算机科学与技术、光信息科学与技术、电气工程及自动化等专业“信号与系统”课程的教材，而且，对相关专业的科技工作人员来说，也是一本有益的自学教材和参考用书。

本教材是在作者多年教学经验积累的基础上编写而成的。全书共分为8章，许信玉编写第1、6章，张华清编写第2～5章并负责全书的统稿，赵志军编写7、8章。本书在编写过程中得到了沈琴教授及有关教师的热情鼓励和大力支持；车晴教授、刘剑波院长为本书的出版给予了极大的关心和帮助；王宏参高级工程师详细审阅了全书，并提出了许多宝贵意见。特在此一并致以衷心的感谢。

由于编著者水平有限，书中难免存在一些差错和疏漏，敬请读者批评指正。

本书配有电子教案，欢迎选用本书作教材的老师免费索取，电子邮件：wbj@mail.machineinfo.gov.cn。

编著者

目　录

第 1 章　信号与系统的基本概念

学习要求：掌握信号与系统的描述方式和分类方法、基本信号的时域特性、信号基本运算规则；深刻理解冲激信号和线性时不变系统的性质并会应用之。

1.1　绪言

信息科学已渗透到所有现代自然科学和社会科学领域，到今天可以说，上至天文、下至地理，大到宇宙探测、小到核子粒子等的研究，以及工农业生产、军事侦察指挥、医疗诊断、经济预测、财务统计、市场信息 、股市分析，直到社会、家庭生活，没有一处能脱离这一学科的应用。这一学科的应用，虽然头绪纷杂，但其中一个共同的任务，就是解决信息传输的问题，也就是将带有信息的信号通过具有某种功能的系统由发送者传递给接收者。

“信号”一词有着广泛的含义。但严格地说，信号是待传输消息的表现形式，消息则是信号的具体内容。人们在相互传告某种事件时，是在互相传递着相应的消息，但是消息一般不便于直接传送，需要借助某种形式的物理量作为载体，通常利用转换设备把各种不同的消息转变成便于传输的声、光、电等物理量的变化形式。因此，广义地讲，信号是随一些参数变化的某种物理量，在数学上，信号可以表示为一个或多个变量的函数。

在近代，人们在诸多领域中引入“系统”的概念，广义地讲，“系统”是由若干个相互关联、相互作用和相互依赖的事物按一定的规律组合而成的具有特定功能的整体。它涉及的范围十分广泛，应当包括各种物理系统和非物理系统、人工系统以及自然系统。

通信系统、电力系统、机械系统均属于物理系统；政治结构、经济组织、生产管理等则属于非物理系统；交通运输网、水利灌溉网等是人工系统，而生态系统、太阳系等属于自然系统，自然系统可以是无生命的，也可以是有生命的。

人们在分析属性各异的各类系统时常常抽去系统物理的或社会的含义，而把它抽象为理想化的模型，宏观地研究信号作用于系统的运动变化规律。

图 1-1　信号与系统

信号的概念与系统的概念是紧密相连的，离开了信号，系统将失去存在的意义，离开了系统，信号将无法传输，图 1-1 所示为信号与系统的关系。系统的输入信号也称为激励，输出信号也称为响应，在本书中用$e(t)$或 $e(k)$表示激励，用$y(t)$或 $y(k)$表示响应。

在信息科学与技术领域中，常常利用通信系统、控制系统和计算机系统进行信号的传输、交换和处理。在这些系统中，信号通常是随时间变化的电压或电流（有时可能是电荷或磁通）。从数学的观点而言，电信号是独立变量 t 的函数$f(t)$。因此，在本书中讨论信号的有关问题时，“信号”与“函数”这两个词常通用。通常，这些系统由大量的各种类型的电

路（电路也称电网络或网络）组成，电路或系统都可看作为传送或处理信号而构成的某种组合，一般认为系统是比电路更复杂、规模更大的组合体。然而，系统与电路的主要差异应体现在观察事物的着眼点或处理问题的角度。系统问题注意全局，而电路问题则关心局部。例如，由一个电容和电阻组成的简单电路，在电路分析中，关心的是各元件上的电压或电流；而系统分析中则关心它是如何构成具有微分或积分功能的运算器。

近年来，由于集成化技术的发展以及各种复杂系统器件的直接使用，使系统、网络以及电路这些名词的划分发生了困难，它们之间的许多问题相互渗透，需要统一分析、研究和处理。因此在本书中，系统、网络与电路这些名词常通用。

信号理论和系统理论涉及的范围广泛。信号理论包括：信号分析、信号处理和信号综合；系统理论包括：系统分析和系统综合。信号分析主要讨论信号的表示、信号的性质等；系统分析主要讨论给定系统在输入信号作用下所产生的响应。信号分析和系统分析是信号处理、信号综合及系统综合的理论基础。本书以通信系统和控制系统的基本问题为主要背景，着重讨论信号分析和系统分析的基本概念和基本分析方法。

1.2 信号的描述和分类

1.2.1 信号的描述

信号通常用函数式或波形来描述，本书所涉及的信号都可以用以时间t(或k)为变量的函数式及波形表示。我们可以由信号的波形写出其对应的函数式，反过来也可以由函数式画出其对应的波形（注：大多数实际信号是无法从其波形归纳出解析式）。例如一个正弦信号，可以用如图1-2所示的波形表示，也可以用式（1-1）表示。

$$f(t) = A\cos(\omega t - \theta) \tag{1-1}$$

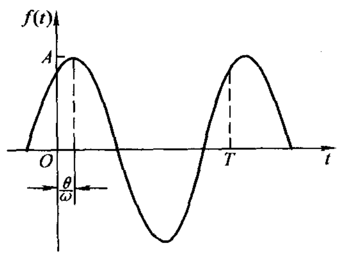


图1-2 正弦信号

这些信号除了以时间t（或k）为变量的函数式或波形这两种直观的形式描述之外，随着问题的深入还需要用其他形式来描述，这些将在后面的章节中逐步进行讨论。

1.2.2 信号的分类

信号的分类方法很多，可以从不同的角度对信号进行分类。

1. 确定信号与随机信号

如果一个信号可以用一个确定的时间函数或波形来表示，就称其为确定性信号。当给定某一时刻时，这种信号有确定的数值，如正弦信号、指数信号都是确定性信号。而随机信号不是确定的时间函数，它在其定义域内的任意时刻没有确定的函数值。除了在实验室发生的有规律的信号外，实际遇到的信号一般都是随机信号。譬如在通信系统中，对于接收者来说传输的信号如果是完全确定了的时间函数，就不可能由收到的信号得到任何信息，因而也就失去了通信的意义。另外，信号在传输和处理过程中受到的各种干扰和噪声都是随机信号的例子。尽管如此，对于确定性信号的分析仍具有十分重要的意义，这是因为有些实际信号与确定性信号有相似的特性，确定性信号可作为实际信号的理想化的模型，在工程实际应用

中，这样的处理能够使问题的分析大为简化。本书只对确定性信号进行分析，随机信号的研究则留待后续课程中讨论。

2. 连续时间信号与离散时间信号

按信号的自变量（即信号的定义域）取值的连续与否信号可分为连续信号和离散信号。如果在某一讨论问题的时间范围内，除了若干个不连续点之外，对任意时刻该函数都能给出确定的函数值，则称该信号为连续时间信号（简称连续信号）。通常连续信号以$f(t)$表示。如图 1-3a、b、c 所示信号都是在$-\infty<t<\infty$内的连续信号，其中图 b、c 所示的两个信号只是在$t<0$的时间范围内信号值为零。连续信号中可以含有不连续点，如图 b 所示信号在$t=0$处、图 c 所示信号在$t=0$和$t=t_1$处是不连续的。在这里“连续”是指函数的定义域（即时间变量t）是连续的。连续信号幅值可以是连续的，也可以是离散的（只取某些规定值），时间和幅值均为连续的信号又称为模拟信号。在实际应用中，模拟信号与连续信号两名词往往不加以区分。

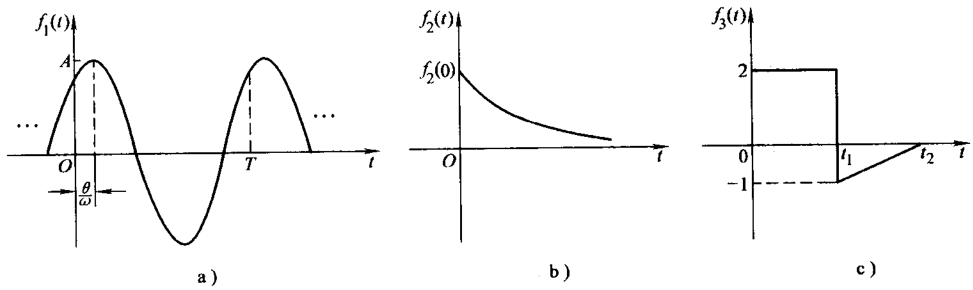


图 1-3　连续时间信号

和连续信号相对应的是离散时间信号（简称离散信号）。在这里，“离散”是指信号的定义域（即时间变量t）是离散的，离散信号仅在一些离散时刻才有定义，而在其他时刻无定义。

离散信号可以在均匀的时间间隔上给出函数值，也可以在不均匀的时间间隔上给出函数值，一般都采用均匀间隔。若令时间间隔为T，则离散信号只在离散时刻$t=\cdots,\ -2T,\ -T,\ 0,\ T,\ 2T,\ \cdots$时有定义，因此均匀离散信号可以表示为$f(kT)$，为了简便，均匀离散信号通常以$f(k)$表示。如图 1-4a、b、c 所示的信号都是离散信号。

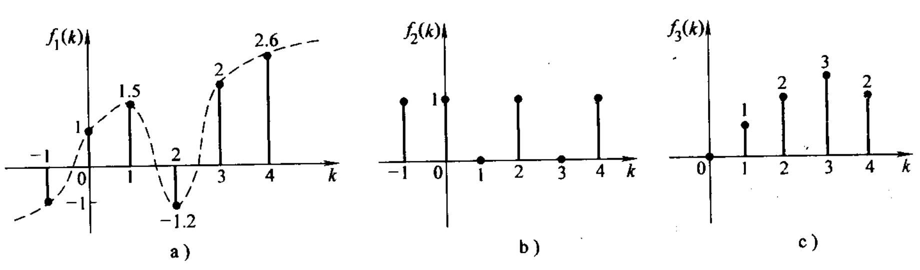


图 1-4　离散时间信号

离散信号也常称为序列。可以认为离散信号是一组序列值的集合，图 1-4c 所示序列可写作

$$f_3(k)=\begin{cases}0 & k\leqslant 0\\ 1 & k=1\\ 2 & k=2\\ 3 & k=3\\ 2 & k=4\\ 0 & \geqslant 5\end{cases}$$

为简单起见，离散信号也常用集合符号表示，如图 1-4a 所示序列也可写作

$$f(k)=\{\cdots,-1,\underset{\substack{\uparrow\\ k=0}}{1},1.5,-1.2,2,2.6,\cdots\}$$

上式中 $k=0$ 的左右两边依次给出 k 为正负整数时所对应的序列值 $f(k)$。

离散信号的幅值可以连续也可以离散，若离散信号的幅值是连续的，则称其为抽样信号，如图 1-4a 所示信号。若离散信号的幅值是离散的，则称其为数字信号，如图 1-4b、c 所示信号，图 b 所示离散信号在各离散时刻的函数值只取“0”或“1”，而图 c 所示离散信号在各离散时刻的函数值为多个离散值。

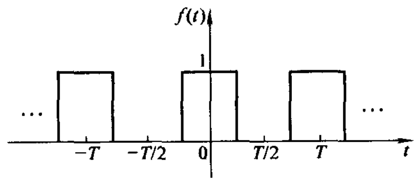
3. 周期信号与非周期信号

确定信号又可分为周期信号与非周期信号。周期信号是在（$-\infty$，∞）区间，每隔一个固定的时间间隔，按同样的规律变化的信号，如图 1-5a、b 所示的信号都是周期信号。图 1-5a 所示信号为连续周期信号，可表示为

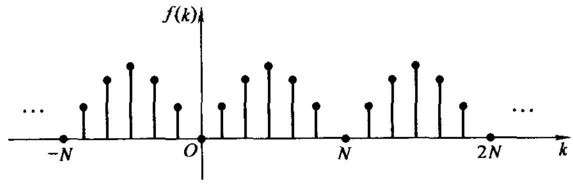
$$f(t)=f(t+mT)\quad m=0,\pm 1,\pm 2,\cdots \tag{1-2}$$

图 1-5b 所示为离散周期信号，可表示为

$$f(k)=f(k+mN)\quad m=0,\pm 1,\pm 2,\cdots \tag{1-3}$$



a）连续周期信号



b）离散周期信号

图 1-5 周期信号

以上关系式中 T（或 N）值称为信号的周期，只要给出此信号在任意一个周期内的函数式或波形，便可确定该周期信号在任意时刻的函数值。严格的数学意义上的周期信号是无始无终地重复着某一变化规律，但这样的信号实际上是不存在的，所谓周期信号只是在较长的时间内按照某一规律重复变化的信号。非周期信号不具有重复性，若令周期信号的周期趋于无穷大，则就成为非周期信号。

4. 能量信号与功率信号

信号还可以用它的能量特点来区分，如果信号 $f(t)$ 是随时间变化的电压或电流，则该信号在单位电阻上的能量或功率，称为归一化的能量或功率。

归一化的能量定义为

$$E=\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a}\left|f(t)\right|^2\mathrm{d}t \tag{1-4}$$

归一化的功率定义为

$$P = \lim_{a \to \infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} \left| f(t) \right|^2 \mathrm{d}t \tag{1-5}$$

对于离散信号 $f(k)$，其归一化的能量 E 与归一化的功率 P 分别定义为

$$E = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=-N}^{N} \left| f(k) \right|^2 \tag{1-6}$$

$$P = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} \left| f(k) \right|^2 \tag{1-7}$$

若信号能量为有限值而平均功率为零（即 $0<E<\infty$，$P=0$），则称该信号为能量信号；若信号平均功率为有限值而能量为无穷大（即 $0<P<\infty$，$E=\infty$），则称该信号为功率信号。直观地观察信号不难理解，周期信号都是功率信号；非周期信号可以是恭率信号（如直流信号），也可以是能量信号（如单个矩形脉冲信号等）。

1.3　基本信号及其时域特性

所谓基本信号，是指在工程实际与理论研究中经常用到的信号，这些信号的波形及其时间函数表达式都十分简洁，常见的绝大部分信号都可以用基本信号及它们的变化形式来表达。正因如此，对基本信号的分析是信号与系统分析的基础。

1.3.1　普通连续信号

1. 指数信号

指数信号的函数表示式为

$$f(t) = K\mathrm{e}^{at} \qquad t \in R \tag{1-8}$$

式中，K 和 α 是实数；R 表示实数集。α 常称为指数因子，当 $\alpha>0$ 时，信号幅度将随时间增长而增长；当 $\alpha<0$ 时，信号幅度将随时间增长而衰减；当 $\alpha=0$ 时，信号不随时间变化而成为直流信号。指数信号如图 1-6 所示。

指数因子 α 的绝对值大小还反映了信号增长或衰减的速率。$|\alpha|$ 越大，增长或衰减的速率就越快。通常把 $|\alpha|$ 的倒数称为指数信号的时间常数，记作 τ，即 $\tau=\dfrac{1}{|\alpha|}$，显而易见，τ 越大，指数信号的增长或衰减的速率越慢。

实际上，遇到较多的是单边衰减指数信号，如图 1-7 所示，其函数表示式为

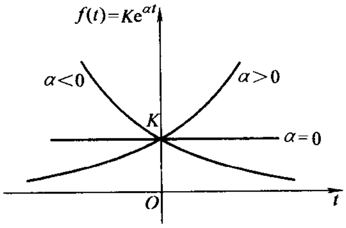


图 1-6　指数信号

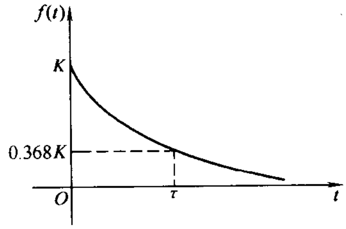


图 1-7　单边衰减指数信号

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ Ke^{\alpha t} & t\geqslant 0,\alpha<0\end{cases}$$

在 $t=\tau$ 处，$f(\tau)=Ke^{-1}=0.368K$，即经过时间 τ，信号衰减到原初始值的 36.8%。

指数信号的一个重要特性是其对时间的导数和积分仍是指数信号。

2. 正弦信号

用正弦函数或余弦函数表示的信号，统称为正弦信号。函数表示式可写作

$$f(t)=A\cos(\omega t-\theta)\qquad t\in R \tag{1-9}$$

式中，A、ω、θ 分别为正弦信号的振幅、角频率、初相角，均为实常数。其波形如图 1-8 所示。

正弦信号是周期信号，其周期 T 与角频率 ω、频率 f 的关系满足

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{1}{f}$$

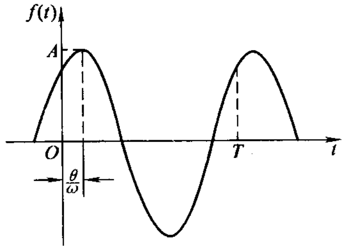


图 1-8 正弦信号

正弦信号也常借助虚指数信号来表示，由欧拉公式可知

$$e^{j\omega t}=\cos\omega t+j\sin\omega t$$
$$e^{-j\omega t}=\cos\omega t-j\sin\omega t$$

所以有

$$\sin\omega t=\frac{1}{2j}(e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}) \tag{1-10}$$

$$\cos\omega t=\frac{1}{2}(e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}) \tag{1-11}$$

正弦信号的一个重要特性是其对时间求导和积分后，仍然是同频率的正弦信号。

3. 复指数信号

如果指数信号的指数因子为一复数，则称该信号为复指数信号，其函数表示式为

$$f(t)=Ke^{st}\qquad t\in R \tag{1-12}$$

式中，$s=\sigma+j\omega$，利用欧拉公式可将上式展开成

$$Ke^{st}=Ke^{(\sigma+j\omega)t}=Ke^{\sigma t}\cos\omega t+jKe^{\sigma t}\sin\omega t \tag{1-13}$$

此结果表明，一个复指数信号可分解为实部和虚部两部分。复指数信号在物理上是不可实现的，但是可利用复指数信号来描述各种基本信号，如当 $s=0$ 时，$f(t)=K$ 为直流信号；当 $s=\sigma$ 时，$f(t)=Ke^{\sigma t}$为实指数信号；当 $s=j\omega$ 时，$f(t)=Ke^{j\omega t}=K\cos\omega t+jK\sin\omega t$，其实部和虚部均为等幅的正弦信号；当 $s=\sigma+j\omega$ 时，其实部和虚部分别为包络按指数规律变化的正弦信号。若 $\sigma<0$，则实部和虚部均为按指数规律衰减的正弦信号；若 $\sigma>0$，则实部和虚部均为按指数规律增长的正弦信号。利用复指数信号可使许多运算和分析得以简化。因此，在信号分析理论中复指数信号是非常重要的基本信号。

4. 抽样信号

抽样信号（也称为取样信号）的函数定义式为

$$f(t)=\frac{\sin t}{t}=Sa(t) \tag{1-14}$$

式中，$t\in R$。其波形如图 1-9 所示。

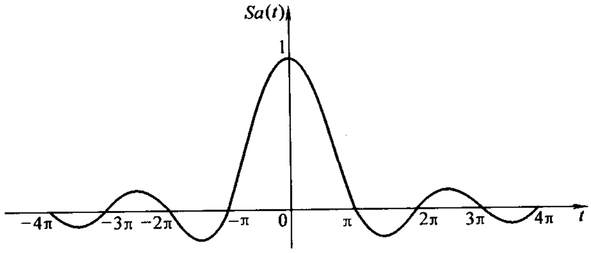


图 1-9 抽样信号

抽样信号有如下性质：

1）$Sa(t)$为 t 的偶函数；

2) $\lim\limits_{t \to 0} Sa(t) = 1$;

3) 当 $t = \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots, \pm n\pi$ 时，$Sa(t) = 0$;

4) $\lim\limits_{t \to \pm\infty} Sa(t) = 0$;

5) $\int_0^{\infty} Sa(t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$，$\int_{-\infty}^{\infty} Sa(t)\mathrm{d}t = \pi$。

1.3.2 奇异信号

奇异信号是连续信号的另一类基本信号，所谓奇异信号是指函数本身或其导数与积分有不连续点（即跳变点）的信号。

通常我们所研究的典型信号都是指一些抽象的理想化的数学模型，这些典型信号与实际信号可能有差异。然而，只要把实际信号按一定的条件理想化、近似化，就可运用理想化模型进行分析。本节所要介绍的奇异信号中阶跃信号和冲激信号是两种最重要、最常用的理想信号模型。

1. 单位斜坡信号

单位斜坡函数用符号$r(t)$表示，其数学表示式为

$$r(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geqslant 0 \end{cases} \tag{1-15}$$

其波形如图 1-10 所示。

2. 单位阶跃信号

单位阶跃信号以符号$\varepsilon(t)$表示，其数学表示式为

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \tag{1-16}$$

其波形如图 1-11 所示 。式（1-16）所示的阶跃信号在跳变点 $t=0$ 处函数值没有定义（注：有些书上在 $t=0$ 处定义其函数值为 1/2)。阶跃信号具有单边特性，即信号在接入时刻 $t=0$ 之前的幅度为零，在系统分析中常利用阶跃信号的这一特性较方便地描述各种信号接入系统的时间。如图 1-12a、b 均表示 $t=0$ 时刻系统接入 1V 直流电压源的情况，显然图 b 的表示方法比图 a 简便。

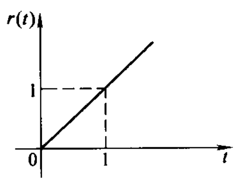


图 1-10 单位斜坡信号

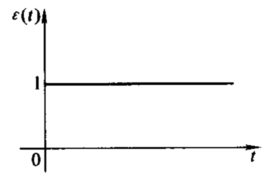


图 1-11 单位阶跃信号

又如，可以用$u_s(t) = A\cos(\omega t + \varphi)\varepsilon(t)$表示某一正弦电源在 $t=0$ 时刻加入到系统。

阶跃信号也可以延时任意时刻 t_0，当 $t_0 > 0$ 时其波形如图 1-13 所示 ，对应的数学表示式为

$$\varepsilon(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases} \tag{1-17}$$

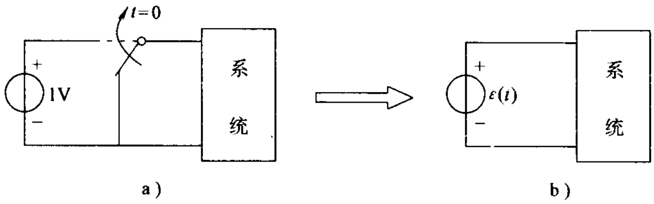


图 1-12　用$\varepsilon(t)$表示信号的接入特性

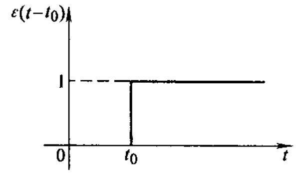


图 1-13　延时的单位阶跃信号

常利用阶跃信号与延时阶跃信号来表示任意的矩形脉冲信号，如图 1-14a 所示的信号可表示为

$$g_\tau(t) = \varepsilon\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - \varepsilon\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$

图 1-14b 所示信号可表示为

$$f(t) = 1.5\varepsilon(t) - \varepsilon(t - T) - 0.5\varepsilon(t - 2T)$$

从阶跃信号与斜坡信号的定义式，容易导出阶跃信号和斜坡信号之间的关系，即

$$\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} = \varepsilon(t) \tag{1-18}$$

$$r(t) = \int_{-\infty}^{t} \varepsilon(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-19}$$

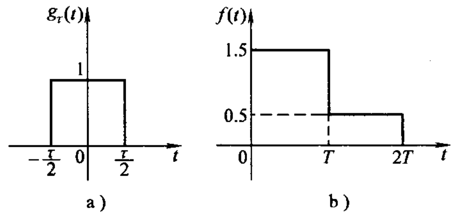


图 1-14　矩形脉冲信号举例

3. 单位冲激信号

某些物理现象需要用一个作用时间极短，但取值极大而作用效果有限的数学模型来表示，如力学中的瞬间冲击力：作用力 F 很大，作用时间 Δt 很短，而冲量 $F\Delta t$ 为有限值。又如电容电压发生跳变时流过电容的电流：电流极大，时间极短而给予电容的电荷为有限值。冲激函数就是描述这类物理现象的理想化的数学模型。

(1) 冲激信号（或冲激函数）的定义

冲激函数记作$\delta(t)$，冲激函数可以由不同的方式来定义。狄拉克（Dirac）给出了冲激函数的一种定义，即

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = 1 \\ \delta(t) = 0 \qquad t \neq 0 \end{cases} \tag{1-20}$$

冲激信号的图形用箭头表示，如图 1-15a 所示，可看出$\delta(t)$只在 $t=0$ 处有一冲激，在 $t=0$ 以外各点，函数值均为零。冲激信号具有强度，其物理意义可理解为：某种物理作用产生的效果大小。这种物理作用存在的时间无限短、作用的幅度无穷大，而产生的效果有限。单位冲激信号的强度为 1，其强度在图中以括号标注于冲激信号的箭头旁，以与信号的幅值相区别（有时为了简便也可省略括号）。

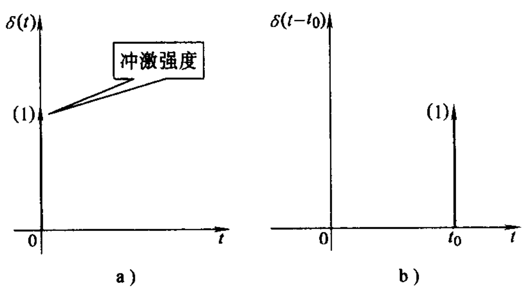


图 1-15　冲激信号及延时的冲激信号

可以用$\delta(t - t_0)$来描述 $t = t_0$ 时刻出现的冲激，其定义式为

$$
\begin{cases}
\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\mathrm{d}t = 1 \\
\delta(t-t_0) = 0 \quad t \neq t_0
\end{cases}
\tag{1-21}
$$

其图形如图 1-15b 所示。

冲激函数也可以由普通函数取极限的方法定义。首先分析如图 1-16a 所示矩形脉冲，矩形脉冲可看作一种作用效果（即脉冲面积 $\tau \cdot 1/\tau = 1$）一定，作用时间（脉冲宽度 τ）与作用力（脉冲幅度 $1/\tau$）的大小成反比的物理现象的数学模型。当矩形脉冲的面积保持不变，而使其宽度 τ 趋于零时，脉冲幅度 $1/\tau$ 必将趋近于无穷大，此极限情况即可定义为冲激信号 $\delta(t)$，如图 1-16b 所示。

$$
\delta(t) = \lim_{\tau \to 0}\frac{1}{\tau}\left[\varepsilon\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-\varepsilon\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]
\tag{1-22}
$$

冲激信号还可以利用三角形脉冲、双边指数函数、抽样函数等函数取极限的方法来定义。

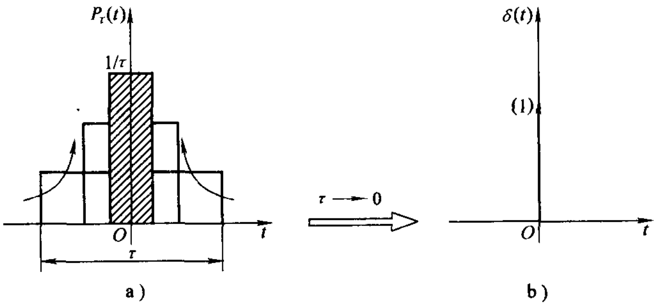


图 1-16　矩形脉冲演变为冲激函数

冲激信号的严格定义应按广义函数理论来定义。粗浅地讲，一个广义函数 $g(t)$ 的定义是，赋予检验函数空间中每个函数 $\varphi(t)$ 一个数值 N 的过程。该数值与广义函数 $g(t)$ 和检验函数 $\varphi(t)$ 有关，这个数值可以是 $t=t_0$ 时刻的 $\varphi(t)$ 值或其导数值，或在某一区间内 $\varphi(t)$ 所覆盖面积，或其他与 $\varphi(t)$ 有关的数值。通常广义函数 $g(t)$ 以如下符号表示

$$
\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\varphi(t)\mathrm{d}t = N[g(t),\varphi(t)]
\tag{1-23}
$$

式（1-23）是广义函数规定的写法，不能理解为一般的积分运算。式中检验函数 $\varphi(t)$ 是连续的，具有任意阶连续导数，并在 t 的一个有限区间内有值，即 $\varphi(t) \neq 0$，$a < t < b$（$a > -\infty$，$b < \infty$）。

按广义函数理论，冲激信号 $\delta(t)$ 可定义为

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \varphi(0)
\tag{1-24}
$$

式（1-24）表明：冲激函数 $\delta(t)$ 作用于检验函数 $\varphi(t)$ 的效果是给检验函数赋值 $\varphi(0)$。换句话说，当一个广义函数 $g(t)$ 与检验函数 $\varphi(t)$ 相乘，并在（$-\infty$，$+\infty$）区间积分，恰好赋予检验函数在 $t=0$ 时的值，则此广义函数便定义为冲激函数。

(2) 冲激信号的性质

1) 与普通函数相乘

设 $f(t)$ 为任意有界函数，且在 $t=0$ 或 $t=t_0$ 处连续，则有

$$
\left.
\begin{aligned}
f(t)\delta(t) &= f(0)\delta(t) \\
f(t)\delta(t-t_0) &= f(t_0)\delta(t-t_0)
\end{aligned}
\right\}
\tag{1-25}
$$

2) 抽样性（筛选特性）

如果$f(t)$是一个在 $t=t_0$ 处连续的普通函数，利用式（1-21）和式（1-25）不难得出

$$\left.\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)\mathrm{d}t &= f(0)\\ \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t &= f(t_0)\end{aligned}\right\}\tag{1-26}$$

式（1-26）表明了冲激信号的抽样性质，即连续信号$f(t)$与单位冲激信号 $\delta(t-t_0)$相乘并在$-\infty$到∞范围内积分，可以得到$f(t)$在 $t=t_0$ 处的函数值；当 $t_0=0$ 时，可以得到$f(t)$在 $t=0$ 处的函数值。

实际上，式（1-26）中的积分限并不是一定得从$-\infty$到∞，可以是从某一个实数 t_1 积到另一个实数 t_2，只要时间区间［t_1，t_2］包含 $t=t_0$ 在内即可。例如：$\int_{-2}^{1}(t+3)\delta(t)\mathrm{d}t = 3$，$\int_{-2}^{2}(t+3)\delta(t-1)\mathrm{d}t = 4$。当时间区间［$t_1$，$t_2$］不包含 $t=t_0$ 在内时，则积分结果为零。例如：$\int_{-2}^{-1}(t+3)\delta(t)\mathrm{d}t = 0$，$\int_{0}^{2}(t+3)\delta(t+1)\mathrm{d}t = 0$。

3）尺度变换特性

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)\tag{1-27}$$

式中 a 为常数，且 $a\neq 0$。

证明：由冲激信号的广义函数定义来研究$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(at)\varphi(t)\mathrm{d}t$，其中$\varphi(t)$为任意的连续时间函数。

若 $a>0$ 则$|a|=a$，令 $x=at$，则$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(at)\varphi(t)\mathrm{d}t$ 可写成

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(at)\varphi(t)\mathrm{d}t = \int_{\infty}^{\infty}\delta(x)\varphi\left(\frac{x}{a}\right)\frac{\mathrm{d}x}{|a|} = \frac{1}{|a|}\varphi(0)$$

若 $a<0$ 则$|a|=-a$，令 $x=at$，则$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\delta(at)\mathrm{d}t$ 可写成

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(at)\varphi(t)\mathrm{d}t = \int_{\infty}^{-\infty}\delta(x)\varphi\left(\frac{x}{a}\right)\frac{\mathrm{d}x}{-|a|} = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\varphi\left(\frac{x}{a}\right)\frac{\mathrm{d}x}{|a|} = \frac{1}{|a|}\varphi(0)$$

因为，$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\varphi(t)dt = \varphi(0)$，所以，综合以上结果可看出式（1-27）成立。

由尺度变换特性可得出如下推论：

① $\delta(at-t_0) = \frac{1}{|a|}\delta\left(t-\frac{t_0}{a}\right) \quad a\neq 0$

② $\int_{\infty}^{\infty}\delta(at-t_0)\varphi(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{|a|}\varphi\left(\frac{t_0}{a}\right)$

4）奇偶性

冲激函数是偶函数，即有

$$\delta(t) = \delta(-t)\tag{1-28}$$

证明：式（1-28）等式成立可证明如下