# 双曲线函数

(苏) 杨波利斯基



内蒙古民族师范学院数学系

# 双 曲 线 函 数

薰笑咏　王玉德　杨利国　译

内蒙古民族师范学院数学系

一九八一年十月

## ·内容提要·

书中叙述了双曲线函数和反双曲线函数的性质，并给出与其它初等函数之间的关系。介绍了双曲线函数在函数的积分和微分方程的积分上的应用。研究分析了在自然科学和工程技术的各个领域中的许多问题。

在各节后边有独立思考的解题练习，书末附有参考用表。本书可供高等学校学生和工程技术人员作为双曲线函数手册使用。

阅读本书需要具有一定程度的高等数学的基础知识。

# 原 序

这本书篇幅不多，但可用作双曲线函数的教学参考书。书中叙述了有关这些函数的基础知识，並例举了它们在数学分析、几何、力学和物理学中的应用。每节都附有练习。虽然练习不多，只要能独立思考地解题，也会帮助读者巩固有关的理论知识，也能学会熟练地掌握双曲线函数。

书末附有各种用表。它们连同书中所列公式以及各节后边所附的练习一併可作为双曲线函数手册使用的参考书。

作者对 Р.С. 古捷尔、Г.Л. 鲁金、Р.Я. 绍斯达克，特别是Ф.Л. 瓦尔帕霍夫斯基在校订中作了大量工作表示感谢。

# 目　　录

## 第三章 双曲线函数在几何、力学和物理学中的应用

## 附录

# 第一章 基本概念和关系

## §1. 概念·双曲线函数的定义

在数学及其在自然科学和工程技术的运用中，指数函数得到了广泛的应用。这主要是因为，所研究的许多自然科学中的现象是属于所谓的有机增长过程之列，即参与这一过程中的函数的变化速度又和函数本身的数值成正比。假如，用$y$表示函数，用$x$表示自变量，那么有机增长过程的微分法则可写成

$$\frac{dy}{dx}=ky$$

形式，这里$k$是某个稳定的比例系数。

积分这个方程会使通解具有指数函数形式

$$y=ce^{kx}。$$

若给出初始条件在$x=x_0$时$y=y_0$，则能确定任意的常数$c=y_0e^{-kx_0}$，这样就能找到特解$y=y_0e^{k(x-x_0)}$，这一特解就是所研究过程的积分法则。

在某些简化的假定中，属于有机增长过程的有这样一些现象，例如大气压力的变化与在地球表面上空高度的关系、放射性的衰变、在恒温的周围介质中物体的冷却或加热、在质量作用定律成立时（反应速度与反应物的实有量成正比）单分子的化

不反应（例如，物质在水中的溶解）微生物的繁殖以及许多其它现象。

铁的光须由于加积复利（利上加利）而增加，这也是有机增加过程

可以把这些例子继续下去。

除单个的指数函数外，指数函数的各种组合在数学及其运用中也得到了运用，其中函数 $e^x$ 和 $e^{-x}$ 的最些线性组合和线性分式的组合 —— 所谓的双曲线函数具有特殊的意义。这种函数有六个，它们的专有名称和表示如下

$$sh\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (\text{双曲正弦})$$

$$ch\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (\text{双曲余弦})$$

$$th\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (\text{双曲正切})$$

$$cth\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad (\text{双曲余切})$$

$$sch\,x = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \quad (\text{双曲正割})$$

$$csch\,x = \frac{2}{e^x - e^{-x}} \quad (\text{双曲余割})$$

这里出现一个问题 究竟为什么要给出这样一些名称，而且其中有双曲线和三角学中已知的函数名称 正弦，余弦等々？我们现在可以理解，这些名称不是偶然的。原来是，三角函数和单位圆上点的坐标之间的关系与双曲线函数和单位半轴的等边双曲线上点的坐标之间的关系类似。双曲线函数的名称恰好证实了这一点。

在圆周 $x^2+y^2=1$（图1）取点 $M(x,y)$ 作锐的圆心角 $\angle AOM=t$，並从点M向下引 OX 轴的垂线MB。这时 $\sin t=BM$（因为圆的半径 $OM=1$），而 $\cos t=OB$ 在点A和P划圆的切线与半径的延长线相交于点C和N，将有：$tgt=AC$，$ctg\,t=PN$，$\sec t=OC$ 和 $\operatorname{cosec} t=ON$。

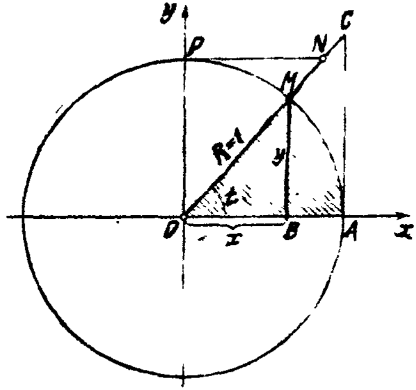
图 1

我们发现，圆心角 $t$（弧度的表示式）和圆的扇形 AOM 的面积 $S$ 之间有简单的关系：$t=2S$。事实上，已知 $S=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AM}\cdot R$，其中 $\overset{\frown}{AM}$ 是对应圆心角 $t$ 的圆弧，而R是圆的半径。从角的弧度变量的定义得出 $\overset{\frown}{AM}=Rt$，但我们这里 $R=1$，所以 $S=\frac{t}{2}$ 或者说 $t=2S$。因此，通常用几何法解释为角的三角函数 $\sin t$，$\cos t$，$tg\,t$ 及其它等的自变量 $t$，通过能看作是圆扇形 AOM 的双倍面积。我们下一步将来用的正是这样解释的自变量 $t$。

现在我们取等边双曲线 $x^2-y^2=1$（图2），和圆周一样，我们指出，$sh\,t=BM$，$ch\,t=OB$，$th\,t=$

$=AC$，等等。其中 $t$ 是双曲扇形 $AOM$ 的双倍面积(但决不是角!)。

图形中直接有：$t=2S=2$（$OMB$ 的面积—$AMB$ 的面积），但 $OMB$ 的面积 $=\frac{1}{2}OB\cdot BM=\frac{1}{2}xy$，其中 $x$ 和 $y$ 是双曲线的点 $M$ 的坐标，而 $AMB$ 的面积借助于定积分可以计算出。从等边双曲线的方程 $x^2-y^2=1$ 中，我们找到双曲线上部 $y=\sqrt{x^2-1}$ 的点，因此 $AMB$ 的面积 $=\int_1^x y\,dx=\int_1^x\sqrt{x^2-1}\,dx$。

为了计算这个积分，我们采用分部积分的方法，假设 $u=\sqrt{x^2-1}$，而 $dv=dx$。这时得到 $du=\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$，$v=x$，因此

$$\int_1^x\sqrt{x^2-1}\,dx=x\sqrt{x^2-1}\Big|_1^x-\int_1^x\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-1}}。$$

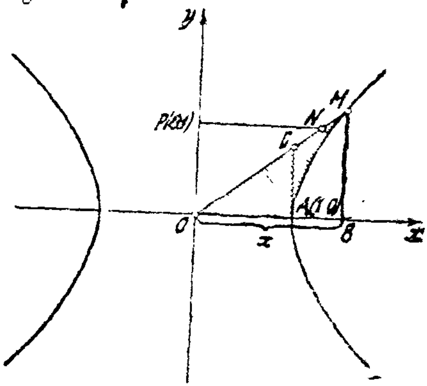


图 2

右边的第一项等于 $xy$，第二项按以下形式变换：

$$\int_1^x\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-1}}=\int_1^x\frac{(x^2-1)+1}{\sqrt{x^2-1}}dx=\int_1^x\sqrt{x^2-1}\,dx+\int_1^x\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}。$$

因而，需要计算的积分能够写成

$$\int_1^x \sqrt{x^2-1}\,dx = xy - \int_1^x \sqrt{x^2-1}\,dx - \int_1^x \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \text{ 形式。}$$

最后等式右边的第二项是被计算的积分；移动它到左边，把得到的等式两边除以2，计算

$$\int_1^x \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\Big|_1^x = \ln(x+y),$$

将有：

$$\int_1^x \sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}\ln(x+y)。$$

于是 $\quad t = 2\left[\frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}\ln(x+y)\right] = \ln(x+y)$

或者对数还原为 $\quad x+y=e^{t}$。

假如等边双曲线函数方程 $x^2-y^2=1$ 的两边除以最后方程的对应部分，则得联系 $x$ 和 $y$ 的另一个方程：

$$x-y=e^{-t}。$$

从这两个关于 $x$ 和 $y$ 的方程组中，我们得到：

$$x=\frac{e^{t}+e^{-t}}{2},\quad y=\frac{e^{t}-e^{-t}}{2}。$$

因为 $x$ 和 $y$ 分别等于 $OB$ 和 $BM$，而得到的指数函数的组合按照定义等于 $\operatorname{ch} t$ 和 $\operatorname{sh} t$，所以 $OB=\operatorname{ch} t$ 和 $BM=\operatorname{sh} t$。

顺便指出，我们研究的方程组 $x=a\operatorname{ch} t$，$y=a\operatorname{sh} t$ 是以 $a$ 为半轴的等边双曲线的参数方程（更精确地说它是右分支），正像方程 $x=a\cos t$，$y=a\sin t$ 是半径为 $a$ 的圆的参数方程一样。事实上，要消去参数 $t$，就得将每一个方程的两边平方，并从 $x^2$ 减去 $y^2$：

$$a^2ch^2t-a^2sh^2t=a^2(ch^2t-sh^2t)=$$
$$=a^2\left[\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2\right]=$$
$$=a^2\left(\frac{e^{2t}+2+e^{-2t}}{4}-\frac{e^{2t}-2+e^{-2t}}{4}\right)=a^2,$$

即 $x^2-y^2=a^2$，这就是等边双曲线的标准形式。

假如在A点引双曲线的切线到与直线OM的交点C，则根据三角形AOC和BOM相似而有：$\frac{AC}{BM}=\frac{OA}{OB}$，于是

$$AC=\frac{BM}{OB}=\frac{sh\,t}{ch\,t}=\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}=th\,t。$$

类似地，在oy轴上放置线段 $op=1$，从点P引ox的平行线到与直线OM的交点N，能够证明 $pN=cth\,t$。这是根据三角形opN和OBM相似而得出的；有：$\frac{pN}{OB}=\frac{OP}{BM}$，于是

$$pN=\frac{OB}{BM}=\frac{e^t+e^{-t}}{e^t-e^{-t}}=cth\,t。$$

所以很容易确信OC和ON分别等于 $sch\,t$ 和 $csch\,t$。但我们不能停留在这一点上。

现在，我们来简述一下，当进一步用x表示的自变量改变时，双曲线函数的变化怎样。

按照 $sh\,x$ 的定义自然有 $sh\,0=0$。假如把 $sh\,x$ 的公式改写为 $sh\,x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}\left(e^x-\frac{1}{e^x}\right)$ 的形式，那么我们会发现，当自变量x从0增加到 $+\infty$ 时，则第一项 $e^x$ 增长到无穷大，而第二项 $1/e^x$ 则减少，趋于零。因此，$sh\,x$ 在 $x\to+\infty$ 时取尽可能大的正值，趋于 $+\infty$。在自变量由0变到 $-\infty$ 时 第一项 $e^x\to0$，而第二项 $e^{-x}\to+\infty$，因此，$sh\,x$ 在 $x\to-\infty$ 时，趋近于

$-\infty$。

由此可见，函数 $shx$ 的定义域和值域是区间 $(-\infty;+\infty)$。

从 $chx$ 的定义得出 $ch0=1$，假如把 $chx$ 的公式改写为 $chx=\frac{1}{2}(e^x+\frac{1}{e^x})$ 的形式，则很容易确定出，在 $x$ 由 0 变到 $+\infty$ 时 $chx$ 由 1 增加到 $+\infty$，当 $x$ 由 $-\infty$ 变化到 0 时 $chx$ 由 $+\infty$ 减少到 1，因为 $ch(-x)=chx$ 是从定义直接得出的。

由此可见，函数 $chx$ 的定义域是区间 $(-\infty;+\infty)$，值域是区间 $[1,+\infty)$。

假如在等式 $thx=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ 中用 $e^x$ 除以等式右边的分子和分母，则得到 $thx=\frac{1-\frac{1}{e^{2x}}}{1+\frac{1}{e^{2x}}}$，于是得出结论，$thx$ 是真分数，因为分子总是小于分母；这时 $th0=0$。

当 $x$ 由 0 变到 $+\infty$ 时，$thx$ 则由 0 增加到 $+1$，当 $x$ 由 $-\infty$ 变到 0 时，$thx$ 则由 $-1$ 增加到 0。由此可见，函数 $thx$ 的定义域是区间 $(-\infty,+\infty)$，值域是区间 $(-1,1)$，即 $|thx|<1$。

从等式 $cthx=\frac{1+\frac{1}{e^{2x}}}{1-\frac{1}{e^{2x}}}$ 中得到，在 $x$ 由 0 变到 $+\infty$ 时 $cthx$ 由 $+\infty$ 减少到 1，而在 $x$ 由 $-\infty$ 变到 0 时 $cthx$ 由 $-1$ 减少到 $-\infty$。在 $x=0$ 上 $cthx$ 没有意义；在 $x$ 从右边趋近 0 时 $cthx\to+\infty$，当 $x$ 从左边趋近 0 时 $cthx\to-\infty$。

区间 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 是函数 $cth\,x$ 的定义域，而区间 $(-\infty, -1)$ 和 $(1, +\infty)$ 是 $cth\,x$ 的值域，因而 $|cth\,x|>1$。

完全可以用类似的方法研究函数 $sch\,x$ 和 $csch\,x$ 的变化。但我们不能停留在这一点上。

我们看出，在 $x$ 的值充分大时 $(x>0)$，$sh\,x$ 和 $ch\,x$ 的值与相应的 $\frac{e^x}{2}$ 的值差异很小，而 $th\,x$ 的值趋近于 $+1$。在 $x$ 按绝对值充分大且负值时，函数 $sh\,x$ 的值充分接近 $-\frac{e^{-x}}{2}$，$ch\,x$ 的值充分接近 $e^{-x}/2$ 的值，而 $th\,x$ 趋近于 $-1$。

假如用 $-x$ 代换自变量 $x$，则得到：

$$sh(-x)=\frac{e^{-x}-e^{x}}{2}=-\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}=-sh\,x,$$

$$sh(-x)=\frac{e^{-x}+e^{x}}{2}=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}=ch\,x,$$

$$th(-x)=\frac{e^{-x}-e^{x}}{e^{-x}+e^{x}}=-\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=-th\,x,$$

$$cth(-x)=\frac{e^{-x}+e^{x}}{e^{-x}-e^{x}}=-\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}=-cth\,x,$$

这证明 $ch\,x$ 是偶函数，而 $sh\,x$，$th\,x$，$cth\,x$ 是奇函数。

从 $ch\,x$ 和 $sh\,x$ 的定义式直接地得出，

$$e^{x}=ch\,x+sh\,x,$$

$$e^{-x}=ch\,x-sh\,x,$$

即函数 $e^{x}$ 和 $e^{-x}$ 可表为偶函数和奇函数的和或差。

下面用它们的简述方法引进双曲线函数的图象.

双曲正弦 $y=\text{sh}\,x$ 的图象见图 3。函数是奇的,由 $-\infty$ 单调递增到 $+\infty$。在坐标原点上图象有对称中心和拐点。在这点上切线和横轴形成的角 $\varphi$ 等于 $\frac{\pi}{4}$。没有渐近线。

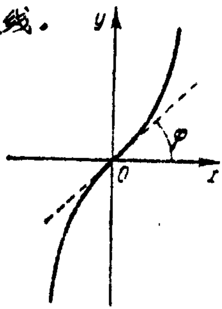


图 3.

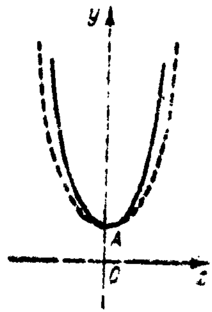


图 4.

双曲余弦 $y=\text{ch}\,x$ 的图象(图 4)称为悬链线(参阅 87 页)。函数 $y=\text{ch}\,x$ 是偶函数,在 $x<0$ 时由 $+\infty$ 减少到 $+1$,在 $x>0$ 时由 $+1$ 增加到 $+\infty$。在点 $A(0.1)$ 上是极小值。图形关于 $Oy$ 轴对称。值得指出的是,它分布在如图 4 虚线所示的抛物线 $y=1+\frac{x^2}{2}$ 的上方,没有渐近线。

双曲正切 $y=\text{th}\,x$ 的图象见图 5。函数是奇的,由 $-1$ 单调增加到 $+1$。在坐标原点上图形有拐点和对称中心。在这点上切线和横轴形成的角 $\varphi$ 等于 $\frac{\pi}{4}$。图形有水平的渐近线 $y=\pm 1$。

双曲余切 $y=\operatorname{cth}x$ 的图象见图6。函数是奇的。$x=0$ 是无界间断点。函数在 $x<0$ 时 $\operatorname{cth}x$ 由 $-1$ 减少到 $-\infty$，在 $x>0$ 时由 $+\infty$ 减少到 $+1$。没有极值，图象没有拐点，有渐近线：水平线 $y=\pm1$，铅直线 $x=0$。

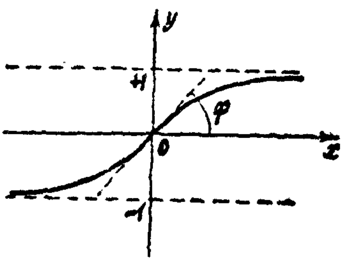


图 5.

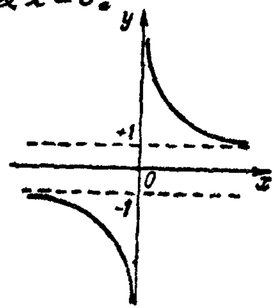


图 6.

## §2. 双曲线函数之间的关系

同一自变量的不同的三角函数彼此间由许多已知关系连系着。对于双曲线函数也有类似的关系。而且基本三角函数恒等式 $\sin^2x+\cos^2x=1$ 对应着连系双曲正弦和余弦的恒等式：

$$\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1. \qquad (1)$$

用简单的验证法就很容易证实它的正确性。

有：$\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=$

$$=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}-\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)=e^xe^{-x}=1.$$

某些主要的关系能从双曲线函数的定义和公式(1)