6

北京文登学校辅导系列

高等数学复习纲要

吴振奎　编著

中国财政经济出版社

北京文登学校辅导系列

高等数学复习纲要

吴振奎　编著

中国财政经济出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学复习纲要／吴振奎编著．—北京：中国财政经济出版社，2005.4（北京文登学校辅导系列）

ISBN 7－5005－8061－4

Ⅰ．高… Ⅱ．吴… Ⅲ．高等数学－高等学校－教学参考资料 Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 021962 号

北京文登学校辅导系列

高等数学复习纲要

吴振奎 编著

中国财政经济出版社出版

URL：http：//www.cfeph.com.cn

E－mail：cfeph@cfeph.cn

社址：北京市海淀区阜成路甲 28 号 邮政编码：100036

发行处电话：88190406 财经书店电话：64033436

河北省财政厅印刷厂印刷 各地新华书店经销

850×1168 毫米 32 开 4.875 印张 160 000 字

2005 年 3 月第 1 版 2005 年 3 月河北第 1 次印刷

定价：10.00 元

ISBN 7－5005－8061－4/O·0033

（图书出现印装问题，本社负责调换）

前　言

近年来，随着教育事业的发展，我国研究生的报考和招收人数逐年增多，这无论是对高校在校学生，还是对已经工作的往届大学毕业生和自学者来讲，都提供了继续深造的机会.

《高等数学》是大学理工科和部分文科（如经济、管理等）专业的重要基础课，也是大多数专业研究生入学考试的必考科目．但其内容较为庞杂，涉及分支也多，且题目灵活性大．无论在校大学生的复习迎试，还是研究生报考者，他们当然都希望能有一份理清知识脉络的提纲，为复习提供线索，为应试传输信息——至少可在不太长的时间内，能对高等数学内容有所浏览，对其中的方法有所回顾．本书正是基于这一点而写的.

为帮助读者将各知识点融会贯通，提高综合利用已有知识来分析、解决新问题的能力，本书构建了高等数学的知识网络，以提要方式（主要通过图表）对高等数学的主要内容给以综合简述；对某些重要题型的解题方法作了必要概括；对于常用公式作了统一罗列.

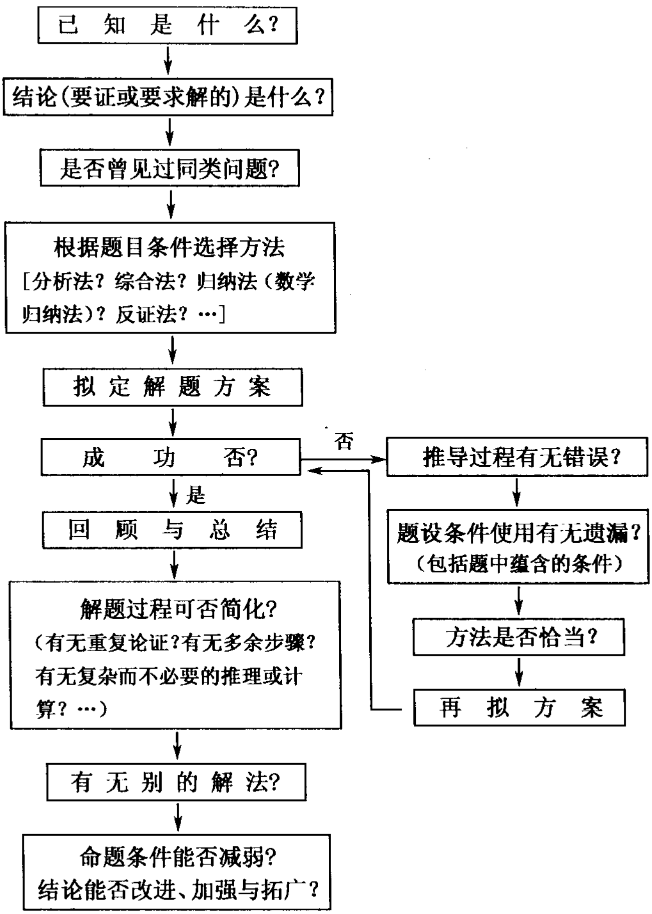
本书不仅对考研学子们会有裨益，对在校大学生们的数学学习，乃至参加各种数学竞赛也会有所帮助，至少可以免去查找公式、翻阅资料之繁．平时信手翻来，也会对数学的内容和公式加深理解，这对理清知识脉络、学好数学是至关重要的．书中标有“*”号的内容可能超出数学大纲范围，仅供参考.

本书出版后，欢迎读者提出宝贵意见，以便修正.

吴振奎

2005年3月

解题步骤的一个框图


已 知 是 什 么?
结论(要证或要求解的)是什么?
是否曾见过同类问题?
根据题目条件选择方法
[分析法?综合法?归纳法(数学归纳法)?反证法?…]
拟 定 解 题 方 案
成 功 否?
否
是
推导过程有无错误?
题设条件使用有无遗漏?
(包括题中蕴含的条件)
方法是否恰当?
再 拟 方 案
回 顾 与 总 结
解题过程可否简化?
(有无重复论证?有无多余步骤?有无复杂而不必要的推理或计算?…)
有 无 别 的 解 法?
命题条件能否减弱?
结论能否改进、加强与拓广?

目　录

微积分(高等数学)

线性代数

概率论与数理统计

微积分(高等数学)

一、函数、极限、连续

(一) 集合及运算

集合是现代数学中最基本的概念,其观点和方法已渗透到数学的许多分支中去.通常用“具有某种特定性质事物(对象)的全体”去描述集合.集合简称集,通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示.构成集合的事物称为元素,通常用 $a,b,c,\cdots$ 小写字母表示.

若 a 是 A 的元素,称 a 属于 A,记 $a \in A$;若 a 不是 A 的元素,称 a 不属于 A,记作 $a \overline{\in} A$.

又 $A = \{a \mid a$ 具有 $P\}$ 表示集合 A 由满足条件 P 的元素组成.

不含任何元素的集合叫**空集**,记作 $\varnothing$.

又若 $x \in A$,必有 $x \in B$,则称 A 是 B 的**子集**,记 $A \subset B$.

当 $A \subset B$,且 $B \subset A$ 时,称集合 A,B **相等**,记 $A = B$.

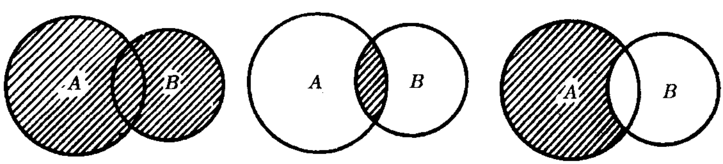
集合的运算指并、交、差等:

X:$\{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$ 称集合 A,B 的**并**,记 $A \cup B$;

Y:$\{y \mid y \in A$ 且 $y \in B\}$ 称集合 A,B 的**交**,记 $A \cap B$;

Z:$\{z \mid z \in A$ 且 $z \overline{\in} B\}$ 称集合 A,B 的**差**,记 $A - B$ 或 $A \setminus B$;

又若 S 是全空间,则任一集合 $A \subset S$,称 $S - A$ 为 A 的余集或补集,记 $\overline{A}$.



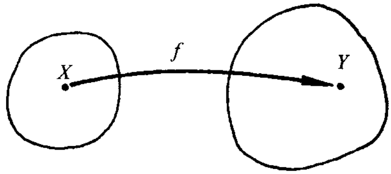
$A \cup B$　　　　$A \cap B$　　　　$A - B$

(二) 函数概念

1. 函数

X, Y 两个集合,若对 X 中每一元素 x,通过法则(映射)f 对应到 Y 中一个元

素 y,则称 f 为定义在 X 上的一个函数,记 $y = f(x)$(x 又称自变量,y 称因变量)



X 称为函数**定义域**.而 $Y = \{y \mid y = f(x), x \in X\}$ 称为函数的**值域**.变量也称为**元**.随自变量个数不同函数又分一元函数、二元函数、…、多元函数等.

注: 这儿 X 中的元素 x 可以是 n 维空间中的点,这样一来定义就包括了一元函数、二元函数、多元函数等.

函数按其内容或性质可分为:

- 函数
  - 按内容
    - 初等函数
      - 代数函数
        - 有理函数
        - 无理函数
      - 超越函数
    - 高等函数
  - 按表达式
    - 显函数(含参数式)
    - 隐函数
  - 按变元个数
    - 一元函数
    - 多元函数
  - 按性质
    - 奇、偶函数
    - 周期函数
    - 齐次函数
    - ……
  - ……

2.函数的表示法

解析法(又称公式法,它有显式、隐式、参数式之分)、列表法,图象法等.

3.函数的几种特性

单、多值性	对定义域 X 中每一个 x,只确定惟一的 y 的函数叫**单值函数**;否则称为**多值函数**.
奇偶性	$f(-x) = f(x)$ 称 $f(x)$ 为**偶函数**,$f(-x) = -f(x)$ 称 $f(x)$ 为**奇函数**(对所有 $x \in X$).
单调性	对于 X 内任两点 $x_1 < x_2$,若 $f(x_1) < f(x_2)$[$f(x_1) \leqslant f(x_2)$] 称函数 $f(x)$ **单增[不减]**; $f(x_1) > f(x_2)$[$f(x_1) \geqslant f(x_2)$] 称函数 $f(x)$ **单减[不增]**.

（续表）

有 界 性	若 $\|f(x)\| \leqslant M$（M 是正的常数）对所有 $x \in X$ 成立，则 $f(x)$ 在 X 上**有界**；否则称**无界**.
周 期 性	若 $f(x+T)=f(x)$，对所有 $x \in X$ 成立，称 $f(x)$ 为**周期函数**. 满足上式的最小正数 T（如果存在）称为该函数的**最小正周期**.
齐 次 性	对多元函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 来说，若 $f(tx_1,tx_2,\cdots,tx_n)=t^kf(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，称该函数为 k **次齐次函数**.

4. 反函数、复合函数

复合函数是由函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 经过中间变量 u 而组合成的函数 $y=f[\varphi(x)]$.

注意当 $x \in X$（或其一部分）时，$\varphi(x)$ 的值域包含在 $f(u)$ 的定义域中时，函数才能复合.

	自变量	**因变量**	**定义域**	**值 域**	**表达式**
函 数	x	y	X	Y	$y=f(x)$
反函数	y	x	Y（或部分）	X（或部分）	$x=f^{-1}(y)$

注 函数与反函数是相对的，它们的位置可互换.

5. 显函数、隐函数

	定 义	**表 示 式**
显函数	已解出因变量为自变量的解析表达式所表示的函数.	$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$
隐函数	未解出因变量，而是用方程表示自变量与因变量间的关系的函数.	$F(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)=0$
参变量函数	用参变量所表示的函数.	$\begin{cases} x_i=\varphi_i(t), \\ y_i=\psi_i(t). \end{cases} \quad i=1,2,\cdots,n$

6. 初等函数

基本初等函数是指幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数等.

初等函数由基本初等函数经有限次代数运算或函数复合得到的函数.

基本初等函数 $\begin{cases} \text{幂函数 } y=x^a\ (a \text{ 为实数}), \\ \text{指数函数 } y=a^x\ (a>0,a\neq 1), \\ \text{对数函数 } y=\log_a x\ (a>0,a\neq 1), \\ \text{三角函数 } y=\sin x,\cos x,\cdots, \\ \text{反三角函数 } y=\arcsin x,\arccos x,\cdots. \end{cases}$

$\downarrow$（四则运算）（函数复合）

初等函数

(三) 极限的概念

1. 极限

极限分数列极限和函数极限,详见下表:

数列的极限	对一个数列$\{x_n\}$,若任给$\varepsilon > 0$,存在自然数$N = N(\varepsilon)$,使当$n > N$时,不等式$\vert x_n - A \vert < \varepsilon$恒成立,则称$A$为$\{x_n\}$当$n \to \infty$时的极限,记为 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = A$ 或 $x_n \to A$(当$n \to \infty$时).
函数的极限	若任给$\varepsilon > 0$,总存在$\delta > 0$,使当$0 < \vert x - x_0 \vert < \delta$时,不等式$\vert f(x) - A \vert$恒成立,则称$A$为$f(x)$当$x \to x_0$时的极限,记为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 或 $f(x) \to A$(当$x \to x_0$时). 当x从x_0左(右)边趋向于x_0时$f(x)$的极限称为左(右)极限,记为 $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$($\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$).

注1: 一些常见数列的极限,如:

(1) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n} = 0$;　　(2) $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0 \ (\vert q \vert < 1)$;

(3) $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} - 1 \ (a > 1)$;　　(4) $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

注2: 这儿函数极限定义只给了其中的一种情形,对于其他情形可见下表.

<table>
<tr><th>任给</th><th>存在</th><th>当自变量变化到</th><th>恒有关系式成立</th><th>结　　论</th><th>记　　号</th></tr>
<tr><td rowspan="4">$\varepsilon > 0$</td><td>$\delta > 0$</td><td>$0 < \vert x - x_0 \vert < \delta$</td><td rowspan="4">$\vert f(x) - A \vert < \varepsilon$</td><td>$A$为$x \to x_0$时$f(x)$的极限</td><td>$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$N > 0$</td><td>$\vert x \vert > N$</td><td>A为$x \to \infty$时$f(x)$的极限</td><td>$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$</td></tr>
<tr><td>$x > N$</td><td>A为$x \to +\infty$时$f(x)$的极限</td><td>$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$</td></tr>
<tr><td>$x < -N$</td><td>A为$x \to -\infty$时$f(x)$的极限</td><td>$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$</td></tr>
</table>

注3: 若数列$\{x_n\}$看成自变量只取自然数的函数:$x_n = f(n)$,则数列极限可看作一种函数极限.然而应注意:函数的自变量取连续变化的实值,而数列中n只取正整数.

2.极限的运算

若 $\lim f(x)=A,\lim\varphi(x)=B$,则

(1)$\lim[f(x)\pm\varphi(x)]=\lim f(x)\pm\lim\varphi(x)=A\pm B$;

(2)$\lim cf(x)=c\lim f(x)=cA$;

(3)$\lim f(x)\cdot\varphi(x)=\lim f(x)\cdot\lim\varphi(x)=A\cdot B$;

(4)$\lim\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim\varphi(x)}=\dfrac{A}{B}\ (B\neq 0)$.

这儿 lim 下未写 x 的趋向,表示 $x\to x_0,x\to\infty,x\to+\infty$ 中的一种.

3.两个重要的极限

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}\qquad\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}}$$

4.无穷大量、无穷小量及其阶

无穷小量	$\lim\alpha(x)=0$	关	$\lim\dfrac{1}{\alpha(x)}=\infty$
无穷大量	$\lim g(x)=\infty$	系	$\lim\dfrac{1}{g(x)}=0$

无穷小量的阶

	比　值	定　　义	记　号
对无穷小量 $\alpha(x),\beta(x)$ $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$	$=0$	$\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶无穷小	$\alpha(x)=o[\beta(x)]$
	$=A\neq 0$	$\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小	$\alpha(x)=O[\beta(x)]$①
	$=1$	$\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小	$\alpha(x)\sim\beta((x)$
$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}=A\neq 0$ $(k>0)$		$\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小	$\alpha(x)=O[\beta^k(x)]$

无穷小量的性质:

(1) 有限个无穷小量的代数和仍是无穷小量;

(2) 有限个无穷小量的乘积仍是无穷小量;

---

① 更确切地讲,若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A\neq 0$,,则记 $\alpha(x)=O^*[\beta(x)]$;若 $\left|\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right|\leqslant M\neq 0$,则记 $\alpha(x)=O[\beta(x)]$.

(3) 无穷小量与有界量的乘积仍是无穷小量.

注: $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$(有极限)$\Longleftrightarrow x\to a$ 时 $f(x)-A$ 是无穷小量.

5.极限存在的判定

(1)**(柯西(Cauchy)准则)** $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在 $\Longleftrightarrow N(\varepsilon)>0$,使任何 $x_1\geqslant N$,$x_2\geqslant N$ 时,$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$ 恒成立.

(2)**(单调有界函数有极限)**(a,b) 内单调有界函数 $f(x)$ 存在 $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to b-0}f(x)$.

(3)**(压挤或夹逼准则)**$\lim g(x)=\lim h(x)=A$,又 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$,则 $\lim f(x)=A$.

(4) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$.

6.极限的常用求法

求极限一般有两类:一类是数(序)列的极限,另一类是函数的极限.它们的求法很多,总的原则是:先化简(通项),再求值.具体地讲,可有:

(1) 数(序)列极限的求法.

数(序)列极限的求法大抵有下面几种:

① 依据数列极限的定义;

② 依据数列极限存在的定理、法则;

③ 依据数列本身的变形;

④ 利用某些公式;

⑤ 利用数列的递推关系;

⑥ 利用数列极限与函数极限存在的关系;

⑦ 利用定积分运算;

⑧ 利用级数的敛散条件;

⑨ 利用 Stolz 定理及相应的结论;

⑩ 利用中值定理;

⑪ 利用级数展开.

(2) 函数极限的求法.

① 利用函数极限或其他概念的定义;

② 利用函数本身的变形和变换;

③ 利用两个重要极限;

④ 利用洛必达(L'Hospital)法则;

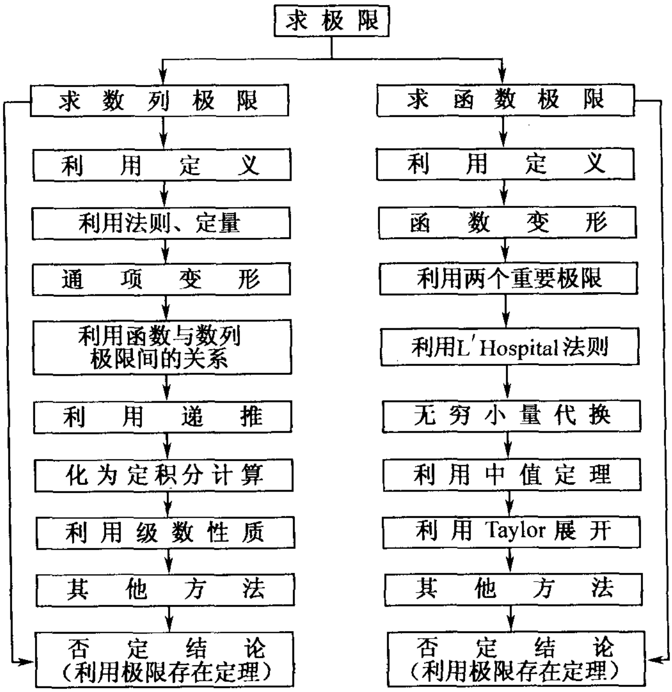
⑤ 利用无穷小量代换;

⑥ 利用中值定理(包括微分中值定理和积分中值定理)；

⑦ 利用函数的泰勒(Taylor)展开；

⑧ 利用其他一些定理(逼夹定理、有界变量与无穷小量积的定理等).

数列、函数极限求法步骤框图



方法与例子

方　法	例　子
利用定义 ($\varepsilon-\delta(N)$ 方法)	若 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{n}=0$.
利用极限的基本性质和法则	求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4}{a^{\frac{x}{2}}}(a>1)$.

(续表)

方　　法	例　　子
连续函数求极限	求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.
利用两个重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$	求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{\theta}{n}\right)^{n}$. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(2-x)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$.
利用适当的函数变换(化去不定型的不定性或变化不定型类型)	求 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-4x^2-x+4}{x+1}$. 求 $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi}{2}x$.[提示:令 $1-x=u$]
洛必达(L'Hospital)法　则	求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{x-\sin x}$.
极限判别准则	设对 $n=1,2,\cdots$ 均有 $0<x_n<1$,且 $x_{n+1}=x_n^2+2x_n$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.
等价无穷小代换	求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin^2 x-\mathrm{e}^x)-x}{\ln(x^2+\mathrm{e}^{2x})-2x}$.
用左右极限关系	设 $y=\begin{cases}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to 0}y$.
用级数敛散性	求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}=0$.
适当放缩(利用不等式)	求 $\lim\limits_{x\to 0}x\sqrt{\sin\dfrac{1}{x^2}}$.
利用积分	求 $\lim\limits_{n\to 0}\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

注： 表中方法的详细使用情况，请读者自行验证（关于洛必达法则内容详见下一章）.

（四）函数的连续性

1. 连续性的概念及连续函数

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，称 $f(x)$ 在点 x_0 **处连续**.

若函数 $f(x)$ 在某区间的每一点都连续，则说函数在该区间上连续，且称 $f(x)$ 为该区间上的**连续函数**.

2. 左、右连续及函数连续条件

右连续 若 $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0)$	函数在 x_0 连续 $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0)$	$\Leftrightarrow$	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
左连续 若 $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0)$		$\Leftrightarrow$	$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x) = 0$
		$\Leftrightarrow$	$f(x) = f(x_0) + \alpha$ 当 $x \to x_0$ 时 $\alpha \to 0$

3. 函数的间断点

函数的间断点	间断点的分类
①$f(x)$ 在 x_0 无定义； ②$f(x)$ 在 x_0 有定义，但 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 不存在； ③$f(x)$ 在 x_0 有定义，且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$（可去间断点）； ④ $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$.	满足 ③、④ 的间断点称为**第一类间断点**，其余的间断点称为**第二类间断点**.

4. 一致连续*

函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若对任给 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使对任意 $x_1, x_2 \in I$，当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时，总有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ 成立，则称 $f(x)$ 在 I 上一致连续.

5. 闭区间连续函数的基本性质

最大最小值定理	若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则 $f(x)$ 在该区间至少取得最大、最小值各一次(它们分别记为 M,m)[由此可推出 $\mid f(x)\mid\leqslant M$(有界性)].
介值定理	若 $m\leqslant f(x)\leqslant M$,又 $\mu\in[m,M]$,则 $[a,b]$ 上至少有一点 ξ,使 $f(\xi)=\mu$. 特别地,若 $f(a)f(b)<0$,则有 $\xi\in[a,b]$,使 $f(\xi)=0$.
一致连续	闭区间上的连续函数,在该区间一致连续.

连续函数性质
- 局部性质　$f(x)$ 在 x_0 的邻域有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$)(局部保号性)
- 闭区间整体性质
  - 最(大、小)值定理
  - 介值定理
  - 一致连续定理

6. 连续函数的性质

四则运算的连续性	若 $f_1(x),f_2(x)$ 在某一区间上连续,则 $\alpha f_1(x)+\beta f_2(x)$, $f_1(x)\cdot f_2(x)$, $f_1(x)/f_2(x)$ $(f_2(x)\neq 0)$ 也连续(在同一区间),这里 α,β 为常数.
复合函数	若 $y=f(z)$ 在 z_0 连续,$z=\varphi(x)$ 在 x_0 连续,且 $z_0=\varphi(x_0)$,则 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x_0 连续.
反 函 数	若 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单增(减)、连续,则其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在其值域上也单增(减)、连续.

7. 初等函数的连续性

(1) 基本初等函数在其定义域内是连续的;

(2) 初等函数在其定义域内是连续的.

8. 函数连续性的应用

(1) 求函数极限;

(2) 判定方程的根;

(3) 函数取得介值;

(4) 讨论函数极(最)值.

(五) 函数某些特性的讨论

1. 函数的奇偶性

函数的奇偶性对于某些运算(如积分、求和、…)来讲是十分重要的.

判断函数的奇、偶性只须依据定义: