青年学习辅导丛书

初中数学

基础知识和基本训练

初中数学编写组　编

电子工业出版社

青年学习辅导丛书

初中数学
基础知识和基本训练

初中数学编写组

电子工业出版社

内 容 简 介

本书包括初中代数和几何两大部分。代数部分有实数、代数式、指数与对数、方程与方程组、不等式、函数、三角函数与解三角形、代数基本解题方法等八个单元；几何部分有概述、三角形和四边形、相似形、圆和几何综合练习等五个单元。每一单元均有内容要点和范例，范例不仅给出解答，而且附有解题分析或说明及练习题。

本书切合广大初中毕业生和青年系统复习的需要，亦可为教师提供教学参考。

青年学习辅导丛书

初中数学基础知识和基本训练

初中数学编写组编

责任编辑　坚如

*

电子工业出版社出版（北京市万寿路）

1201 印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

开本：787×1092 1/32　印张：9　字数：200千字

1986年10月第1版　1986年12月第1次印刷

印数：1～70,000　定价：1.50元

统一书号：7290·406

前　　言

为帮助大广青年学好初中数学课，加强学生独立思考和自我复习的能力，使广大青年能顺利地通过高中、职业高中、中专、技工学校的升学考试，以及青年职工的文化考核，我们组织北京教育学院宣武分院和北京市部分重点中学的老师编写了青年学习辅导丛书中的《初中数学基础知识和基本训练》。本书遵循教学大纲，紧扣所学的教材，是一本很实用的具有指导性的辅导读物。

在内容编排上，本书包括初中代数和几何两大部分。代数部分有八个单元：实数、代数式、指数与对数、方程与方程组、不等式、函数、三角函数与解三角形、代数基本解题方法；几何部分有概述、三角形和四边形、相似形、圆和几何综合自测题等五个单元。大部分单元均包括内容要点、范例、自测题和解答三部分。三者内容连贯，熔为一体。内容要点部分指出本单元要掌握的基本知识和重点；范例部分以典型的例题分析本单元的要点，教给读者解题的思路；自测题部分分A、B两组，A组是对基本功的一般考查，B组帮助读者开拓思路，提高运用知识的能力；题解部分不仅给出了答案，而且简要地说明了理由，对一些有难点的题目还给出了解题分析或说明。

由于编写和出版时间仓促，本书不足之处在所难免，请大广读者批评指正。

初中数学编写组

目　录

代数部分

几何部分

代数部分

第一单元　实数

一、内容要点

1. 实数的概念与分类

实数是有理数与无理数的统称.

有理数又分为整数和分数. 整数中除含有正整数与负整数以外，还包含零. 而分数又分为正分数和负分数. 通常所说的自然数，即是指正整数，如1，2，3，…….

无理数是无限不循环小数. 无理数也分为正无理数和负无理数.

现将所学过的实数，用数系表表示如下：

- 实数
  - 有理数
    - 整数
      - 正整数（自然数）
      - 零
      - 负整数
    - 分数
      - 正分数
      - 负分数
  - 无理数
    - 正无理数
    - 负无理数

2. 数的关系与表示

（1）互质数　最大公约数为1的两个自然数叫做互质数.

（2）互为相反数　如果两个数之和为零，那么这两个

数互为相反数．若a与b互为相反数，表示式为：

$$a+b=0.$$

零的相反数为零．

（3）互为倒数　乘积为1的两个数互为倒数．若a与b互为倒数，表示式为：

$$a\cdot b=1.$$

（4）奇数与偶数　不能被2整除的整数叫奇数，表示为$2n-1$．能被2整除的整数叫偶数，表示为$2n$，其中n为整数（$n=0$，±1，±2，……）．

（5）正数与负数　大于零的数为正数，表示为$a>0$．小于零的数为负数，表示为$a<0$．非正数表示为$a\leqslant0$，非负数表示为$a\geqslant0$．

（6）一个整数a能被k整除，可表示为$a=n\cdot k$，其中k、n均为整数（$k\neq0$）．

（7）一个有理数a可表示为$a=\dfrac{m}{n}$，其中m、n为互质的整数，而$n\neq0$．

（8）一个数a的绝对值可表示为：

$$|a|=\begin{cases}a & (a\geqslant0),\\ -a & (a<0).\end{cases}$$

（9）正数a的正平方根叫做a的算术平方根（简称算术根）．当$a=m^2$时，a的算术根表示为：

$$\sqrt{a}=\sqrt{m^2}=|m|.$$

零的算术根为零．

3．数轴及实数大小的比较

（1）数轴　数轴是一条规定了原点、正方向和单位长度的直线．数轴上的所有点与全体实数是一一对应的，其中正

数都在数轴原点的右侧，负数都在数轴原点的左侧.

（2）实数大小的比较　在数轴上表示的两个实数，右边的总比左边的大；正数都大于零，负数都小于零；正数大于一切负数；两个负数，绝对值大的反而小. 比较两个分数的大小，一般要先通分再比较. 比较两个无理数的大小，要注意运用有理化因子.

4. 实数运算定律与顺序

（1）运算定律

加法交换律：$a+b=b+a$；

加法结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$；

乘法交换律：$a\cdot b=b\cdot a$；

乘法结合律：$(a\cdot b)\cdot c=a(b\cdot c)$；

分配律：$a(b+c)=ab+ac$.

（2）运算顺序　先乘方、开方，再乘、除，后加减；在有括号的式子内，按照小括号、中括号、大括号的顺序进行运算.

二、范例

例1　试指出下列数哪些是有理数，哪些是无理数，并比较其大小，用“>”号把各数连接起来.

$$-\frac{11}{3},\ \sqrt{169},\ 3.14,\ \pi,\ -0.1\%,\ (-984)^0,\ \sqrt{20}.$$

解题分析　（1）无理数必须同时满足两个条件：“无限小数”和“不循环小数”；

（2）负数比较大小：绝对值大的数反而小.

解：有理数　$-\frac{11}{3}, \sqrt{169}, 3.14, -0.1\%, (-984)^0$.

无理数　π, $\sqrt{20}$.

$\sqrt{169}>\sqrt{20}>\pi>3.14>(-984)^0>-0.1\%$

$>-\frac{11}{3}$.

例2　计算$\frac{\left(15-5^2\times\left|-\frac{3}{5}\right|\right)\times(-2)^3+2\sqrt{(-4)^2}}{\left[-0.75-\left(-\frac{3}{8}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\times(-0.3)^2}$.

解：原式$=\frac{0\times(-8)+8}{\frac{-6+3-4}{8}\times\frac{9}{100}}=-\frac{6400}{63}=-101\frac{37}{63}$.

解题注意　$-5^2\neq25$,　$(-0.3)^2\neq0.9$.

一般把小数化为分数再进行计算.

例3　写出任意三个连续的奇数，并证明任意两个奇数的和为偶数.

解题分析　奇数一般表示为$2n-1$，偶数表示为$2n$. 并注意两个连续奇数相差为2.

解：（1）任意三个连续奇数为$2n-1$，$2n+1$，$2n+3$.

（2）设任意两个奇数为$2m-1$和$2n-1$，

$\therefore$　$(2m-1)+(2n-1)=2(m+n-1)$ 是偶数.

例4　写出$-2+\sqrt{3}$的相反数的倒数的算术根.

解：$\because$　$-2+\sqrt{3}$的相反数为$2-\sqrt{3}$，它的倒数为$2+\sqrt{3}$，

$\therefore$　$\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+2\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}}$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}.$$

化简 $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ 可以有多种方法：

（1）$\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{8+4\sqrt{3}}{4}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{4}}$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}.$$

（2）令 $\sqrt{2+\sqrt{3}}=x$，则

$$x^2=2+\sqrt{3},\quad x^2-(2+\sqrt{3})=0.$$

由求根公式得 $x_{1,2}=\frac{-0\pm\sqrt{0+4(2+\sqrt{3})}}{2}$

$$=\frac{\pm\sqrt{8+4\sqrt{3}}}{2}=\frac{\pm(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2}.$$

∵ 由题设 $x>0$，∴ $x=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

（3）令 $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$，

$$2+\sqrt{3}=x+y+2\sqrt{xy},$$

$$\therefore\begin{cases}x+y=2,\\2\sqrt{xy}=\sqrt{3};\end{cases}\qquad\therefore\begin{cases}x=\frac{1}{2},\\y=\frac{3}{2};\end{cases}\qquad\text{或}\begin{cases}x=\frac{3}{2},\\y=\frac{1}{2}.\end{cases}$$

$$\therefore\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}.$$

例5　试问 $|x|-x$ 是什么性质的数？当 $x=-\sqrt{2}$ 时，$|x|-x=$？并指出数轴上表示这个数的点的位置.

解题分析 字母x表示实数，所以要对x分别讨论．

无理数$\sqrt{2}$在数轴上的对应点，可运用边长为1的正方形的对角线为$\sqrt{2}$的特点．

解：$\because$ 当$x\geqslant0$时，$|x|-x=x-x=0$；

当$x<0$时，$|x|-x=-x-x=-2x>0$。

$\therefore$ $|x|-x$是非负数．

当$x=-\sqrt{2}$时，$|x|-x=2\sqrt{2}$．

这个数在数轴上对应点的位置见图1-1。

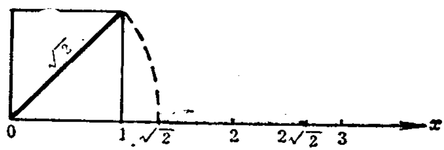

图 1-1

例6 化简：$\dfrac{|\sqrt{2}-1|+|\sqrt{2}-\sqrt{3}|}{|4-2m|-|2m+\dfrac{7}{2}|}$ $(m<-2)$。

解题分析 根据绝对值的定义去掉绝对值符号，一般分为两大类：一类是绝对值符号里给的是数字（或明确的条件），这时可直接化简；一类是绝对值符号里是字母且没给条件（或虽给条件但不明确），需经讨论再化简。

解：原式$=\dfrac{(\sqrt{2}-1)+[-(\sqrt{2}-\sqrt{3})]}{(4-2m)-\left[-\left(2m+\dfrac{7}{2}\right)\right]}$ $(\because m<-2)$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{4+\dfrac{7}{2}}=\frac{2\sqrt{3}-2}{15}.$$

例7 已知$|a|=2$，$|b|=5$，求$a+b$的值．

解题分析 欲求$a+b$的值，需先求a、b的值．由已知得

$a=\pm 2$，$b=\pm 5$，所以需分别讨论求值。

解：$\because$ $|a|=2$，$\therefore$ $a=\pm 2$。

$\because$ $|b|=5$，$\therefore$ $b=\pm 5$。

$\therefore$ 当$a=2$， $b=5$时， $a+b=7$；

$a=2$， $b=-5$时， $a+b=-3$；

$a=-2$， $b=5$时， $a+b=3$；

$a=-2$， $b=-5$时， $a+b=-7$。

例8 若两个分数的和等于1，则第一个分数的平方加第二个分数，等于第二个分数的平方加第一个分数。

解题分析 两个分数分别为$\frac{a}{b}$，$\frac{c}{d}$，要证明

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2+\frac{c}{d}=\left(\frac{c}{d}\right)^2+\frac{a}{b}，\text{即}\left(\frac{a}{b}\right)^2-\left(\frac{c}{d}\right)^2=\frac{a}{b}-\frac{c}{d}，$$

即 $$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right)=\frac{a}{b}-\frac{c}{d}.$$

证明：设两个分数分别为$\frac{a}{b}$，$\frac{c}{d}$。

$$\because \quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=1,$$

$$\therefore \quad \left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right)=\frac{a}{b}-\frac{c}{d},$$

$$\therefore \quad \left(\frac{a}{b}\right)^2-\left(\frac{c}{d}\right)^2=\frac{a}{b}-\frac{c}{d},$$

$$\therefore \quad \left(\frac{a}{b}\right)^2+\frac{c}{d}=\left(\frac{c}{d}\right)^2+\frac{a}{b}.$$

例9 已知n为自然数，求证2^{n+4}与2^n的个位数字相同。

解题分析 如果两个数的个位数字相同，那么这两个数

的差的个位数字必须是零.

证明: $\because$ $2^{n+4}-2^n=2^n\cdot2^4-2^n=2^n(2^4-1)$

$$=2^n\cdot15=2^{n-1}\cdot30.$$

即这两个数的差的个位数字是零.

因此，2^{n+4}与2^n的个位数字相同.

例10 证明（1）如果一个自然数n的平方能被5整除，则n一定能被5整除；

（2）并由此证明$\sqrt{5}$是一个无理数.

解题分析 （1）、（2）命题的结论直接证明困难较大，而命题反面的结论更为具体、简明.如果能证明反面的结论是谬误的（即推出与已知条件或假设或定理、公式、公理相矛盾），便可获得原命题结论是正确的.这种证明方法称为反证法.

如果（1）中n不能被5整除，那么它的余数是1，2，3，4，即n可表示为$5k\pm1$，$5k\pm2$（k为自然数）.如果（2）中$\sqrt{5}$是有理数，那么$\sqrt{5}=\frac{p}{q}$（p，q互质）.

证明: （1）反设：如果n不能被5整除，那么n一定是$5k\pm1$，$5k\pm2$类型的数（k为自然数）.

若$n=5k\pm1$，则$n^2=(5k\pm1)^2=25k^2\pm10k+1$

$$=5(5k^2\pm2k)+1.$$

$\because$ $5(5k^2\pm2k)+1$不能被5整除，即n^2不能被5整除.这与所给条件相矛盾.

若$n=5k\pm2$，则$n^2=(5k\pm2)^2=25k^2\pm20k+4$

$$=5(5k^2\pm4k)+4.$$

这时n^2也不能被5整除，也与已知条件相矛盾.

$\therefore$ 综合以上两种情况，n必能被5整除.

（2）反设：若$\sqrt{5}$是有理数，则可设$\sqrt{5}=\frac{p}{q}$，这里p与q互质，

$\therefore\quad 5=\frac{p^2}{q^2}$，即$5q^2=p^2$，则$p^2$能被5整除。

由（1）可得，p也能被5整除。令$p=5k$。

则 $5q^2=(5k)^2$，$q^2=5k^2$，即q^2能被5整除。

由（1）可知，q也能被5整除。

于是，p与q有公因数5，这与p，q互质矛盾，所以$\sqrt{5}$是无理数。

三、自测题

A 组

1. 判断下列结论是否正确（正确画“√”，不正确画“×”）：

（1）最小的整数是零；（ ）

（2）非负数就是正数；（ ）

（3）有限小数是有理数；（ ）

（4）无理数是无限小数；（ ）

（5）任何实数的绝对值都是正数；（ ）

（6）一个数的绝对值大于1，那么这个数一定大于它的倒数；（ ）

（7）$-a$的相反数是正数；（ ）

（8）两数之和为零，这两数互为相反数；（ ）

（9）若a、b为任意实数，那么$a+b>a-b$必定成立；（ ）

（10）$2|x|-\frac{x}{2}$一定是非负数。　　（　）

2. 填空：

（1）当$a<0$时，$|-a|=$______；

（2）$|\sqrt{5}-3|=$______；

（3）当$a<1$时，$|1-a|+a-1=$______；

（4）如果$|x|<3$，当x为整数时有______；

（5）$|x-1|=5$时，$x=$______；

（6）$|a|=|-a|$时，a是______；

（7）$|a^3|=a^3$时，a是______；

（8）$|a^4|=-a^4$时，a是______。

3. 比较下列各数的大小（用不等号“$>$”连结下列各数）：

（1）$-\frac{5}{6}$，$-\frac{6}{7}$，-0.8，$\frac{11}{12}$，$\frac{12}{13}$；

（2）$2-\sqrt{2}$，$-\sqrt{3}$，$-\pi$，-3.14159，$(1-\sqrt{3})^0$，0。

4. 计算下列各题：

（1）$$\frac{1}{5}\div\frac{1}{3}+\left(1\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}\div 5+\frac{3}{7}\div(-2)+\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{5}{7}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^3;$$

（2）$$2.75-\left[\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{5}{6}\right)+\left(-\frac{3}{8}\right)+4\frac{2}{3}\right];$$

（3）$$\left(-1\frac{1}{2}\right)\div\frac{3}{4}\times(-0.2)\times 1\frac{3}{4}\div 1.4\times(-0.6);$$

（4）$$\frac{-2^2+(-2)^2-(-3)^2-(-3)^3}{\left[(-5)^2\times\left(-\frac{3}{5}\right)+15\right]\times 8\div 7+1};$$

（5）$\frac{|-3^3|}{(-0.3)^2}+\sqrt{\frac{2}{7}}$（精确到0.001）.

B 组

1. 选择题（将正确答案的代号填在题后的括号内）：

（1）数轴上所有的点所表示的数是（ ）.

（A）全体有理数；（B）全体自然数；

（C）全体实数；（D）全体正数和负数；

（E）全体整数与分数.

（2）数轴上原点及原点左边所有的点所表示的数是（ ）.

（A）全体负数；（B）全体负有理数；

（C）零和全体负实数；（D）零和负有理数；

（E）负整数、负分数和零.

（3）有理数与无理数的和是（ ）.

（A）有理数；（B）无理数；（C）零；

（D）正数或负数；（E）实数.

（4）$|-a|=a$，则a是（ ）.

（A）正数；（B）负数；（C）零；

（D）非负数；（E）非正数.

（5）$k-|k|$是（ ）.

（A）正数；（B）非正数；（C）负数；

（D）非负数；（E）零.

（6）任何实数a与b为相反数时，则（ ）成立.

（A）$a\cdot b=0$；（B）$a\cdot b=1$；

（C）$a+b>0$；（D）$a+b=0$；

（E）$a+b=1$.

（7）$\sqrt{2}+1$的倒数是（　）．

（A）$-\sqrt{2}-1$；(B) $-\sqrt{2}+1$；(C) $\sqrt{2}-1$；

（D）$\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$；（E）1．

（8）$\sqrt{(-5)^2}=$（　　）．

（A）-5；（B）± 5；（C）$-|5|$；

（D）5；　（E）$\pm|(-5)|$．

（9）0.2020020002…是（　　）．

（A）循环小数；（B）分数；（C）有理数；

（D）小数；　（E）无理数．

（10）$[2-(-2)-|-2|]\times(-2)^3$的结果是（　）．

（A）-16；（B）48；（C）16；

（D）-48；（E）32．

2．化简下列各式：

（1）$\left|\dfrac{1}{2}-a\right|+a$；

（2）当$3>a>-1$时，$|a-4|+|2+a|$．

3．计算下列各题：

（1）$\left(\dfrac{7}{9}-\dfrac{5}{6}+\dfrac{7}{18}\right)\times 18-1.45\times 6+3.95\times 6$；

（2）$(\sqrt{3}-2)^0-1^8\times\left[|-7|-(-1)^4\right.$

$\left.-\sqrt{(-2)^2}\div 2\times\dfrac{1}{2}\right]$；

（3）$\left(\dfrac{2+2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}-\dfrac{3}{\sqrt{3}}\right)\cdot|\sqrt{3}-2|-\dfrac{-0.25^2}{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3}$

$+\dfrac{3}{2}\times\dfrac{2}{3}$．