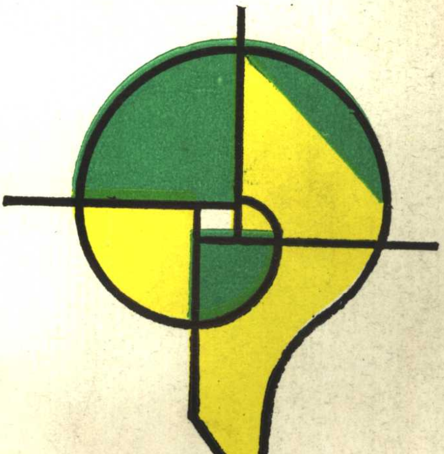
数学问题解答的

思维模式

冯跃峰　主编

翟连林　审校



科学普及出版社

数学问题解答的思维模式

主编　冯跃峰

编著　王泉源　李世杰　龚安成
　　　易振兴　郝德祥　袁银华
　　　李立明　黄普生　田长虹

审校　翟连林

科 学 普 及 出 版 社

数学问题解答的思维模式

主　　编：冯跃峰
审　　校：翟连林
责任编辑：张亚光
封面设计：董瑞玲
技术设计：翟连林

科学普及出版社出版（北京海淀区魏公村白石桥路32号）
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
河北省丰南县印刷厂印刷

开本：787×1092毫米　1/32　印张：6.625字数：145千字
1991年8月第一版　　1991年8月第一次印刷
印数：1—13350册　　定价：2.50元
ISBN7—110—02064—9/G.519　登记证号：（京）026

前　言

在数学学习中，解题占有十分重要的地位。解题既是巩固和运用知识的重要手段，又是发展智力、培养能力的有效途径。数学家P·R·Halmos早就说过："问题是数学的心脏"，当代著名数学教育家G·Polya也曾指出："掌握数学意味着什么呢？这就是善于解题，不仅要善于解一些标准的题，而且要善于解一些要求独立思考、思路合理、见解独到和有发明创造的题"。

长期以来，我国数学解题研究往往局限于讨论某些问题的解法和某些方法的应用，缺少宏观上的概括与总结。"套题型、背题解"也就成为一些人解题的"捷径"，最终还是走向失败。为了帮助读者了解和掌握科学的思维方法，提高分析、解决问题的能力，我们根据G·Polya的解题理论，结合作者多年从事解题研究取得的成果，把数学解题的思维过程整理为一种固定的模式，编写了这本《数学问题解答的思维模式》。

本书注重解题理论与解题实践相结合。阅读本书时应注意以下几点：（1）先仔细地阅读本书的第一篇，真正熟悉和掌握"四步解题法"的每一步骤和使用方法，但又不能一开始就过多地纠缠某些细节。（2）对于第二篇中的例题，不要忙于寻找问题的答案，因为答案是次要的，我们的重点是如何寻求解法。（3）读者应自觉地利用四步解题法的模式

分析书中的例题，力争在阅读前自己找到解题途径。我们希望读者通过对本书的阅读，使自己的解题能力得到较大的提高。

本书可作为高中各年级学生的课外阅读资料，亦可作为各类师范院校数学解题研究课程的教学参考书。对于中学数学解题研究和数学解题思维过程研究，本书亦不失参考价值。

本书第一篇由冯跃峰编著，第二篇由各作者共同编著．参加本书编写的作者还有叶文涛、彭本新、郭郧、张书贤．

作者虽然潜心于中学数学解题研究，但限于水平，错误难免，恳请读者、专家不吝指教，以便有机会再版时修改，使之逐步完善。

作者

1991·4

目　录

第一篇　四步解题法

第二篇　综合题解分析

第一篇 四步解题法

第一章 总 论

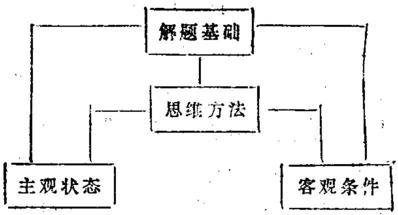
数学是由问题构成的。首先，数学知识是问题抽象、概括和推广的结果，数学知识的发展，也是由于解决问题的需要；其次，数学思想方法都是在解决问题的过程中形成的具有一般性的观念系统，沒有问题就沒有思想，也就沒有方法；最后，数学能力也是数学解题的思维过程中表现出来的心理特征。离开了解题，就谈不上能力．总之，数学知识、方法、能力，或者说数学的一切都是数学问题的衍生物。

八十年代以来，数学问题的重要性已得到人们的广泛注意，掀起了一股研究解题的热潮。T．P贝克教授指出："如果说，确有一股贯穿八十年代初期的潮流的话，那就是强调解题（Problem solving）的潮流"。

解题是一项系统工程，有许许多多的因素影响着它的成败。本质的因素有知识、方法（指狭义的方法，即解决问题所使用的具体方法）、能力（指基本能力，即计算能力、推理能力、抽象能力、概括能力等）、经验等，由此构成解题基础；非本质的因素有兴趣、爱好、态度、习惯、情绪、意志等，由此构成解题的主观状态；此外，还受时空、环境、工具的约束，这些构成解题的客观条件。但是，具有扎实的解题基础，且有较好的客观条件，主观上也作了相应的努力，解题也不一定能获得成功。这是因为，数学中真正标准

的、可以程序化的问题（象解一元二次方程）是很少的．解题中，要想把问题的条件与结论沟通起来，光有雄厚的知识、灵活的方法和成功的解题经验是不够的．为了判断利用什么知识，选用什么方法，就必须对问题进行解剖、识别，对各种信息进行筛选、加工和组装，以创造利用知识、方法和经验的条件．这种复杂的、创造性的分析过程就是数学思维过程．这一过程能否顺利进行，取决于思维方法是否正确．因此，正确的思维方法亦是影响解题成败的重要因素之一．

综上所述，数学解题系统可以划分为四个部分：解题基础，主观状态，客观条件和思维方法．其中思维方法是该系统的核心．下面是它的一个粗略框图：



数学解题系统框图

数学解题系统决定着人们解题必须兼顾各个方面．但是，在数学解题和解题教学中，不少教师和学生往往只注重解题基础，片面地强调基本知识和解决问题的具体方法的重要性，忽视其它方面的训练，特别是数学思维能力的训练，造成解决一般问题的困难．为了克服这一困难，各种各样的、非质的、庞杂凌乱的具体解题技巧统统被视为规律，成为教师谆谆告诫的教学重点．学生解题也就试图通过记忆、模仿来代偿思维能力的不足，利用胡猜乱碰来代替有根据、有目的的探索．这不仅不能提高学生的解题能力，而且对于

系统的数学知识的学习，对于数学思维结构的健康发展都是不利的。

在解决具体问题时，学生因没有正确的思维方法作指导，造成解题失败的现象是时有所见的。我们举一个例子。

例 1 设α、$\beta\in(0,\pi)$，且$\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{2}$，求$\alpha$、$\beta$之值。

【误解 1】 应用和差化积公式和倍角公式，得

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}+1=\frac{3}{2},$$

提取公因式，得

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

继续利用和差化积公式，得

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}=\frac{1}{8}.$$

这样，无法求得α、β之值。

【误解 2】 应用和角公式，得

$$\cos\alpha+\cos\beta-\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{3}{2},$$

把方程变形，得

$$\sin\alpha\sin\beta-(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)=\frac{1}{2},$$

利用倍角公式，得

$$4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}=\frac{1}{2},$$

提取公因式，得

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)=\frac{1}{8},$$

又得到 $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}=\frac{1}{8}$.

同样无法求出α、β之值。

纵观上述解题过程，可以看到，造成解题受阻的原因不是解题者知识的缺乏，而在于解题者未能正确把握变形方向．未能在解题之前先进行一番直觉考虑和科学预测。而是盲目变形：见了和差就化积，见了“和角”就化“单角”，根本不去考虑这些变形的目的与意义，使解题思维陷入混乱，终于导致解题失败。

实际上，本题的实质是解三角方程。但题中只有一个方程，却含有两个未知数，在一般情况下是无法确定未知数的值的，只有在一种极端的情况下（如非负数的和为零，二次方程根的判别式大于或等于零，基本不等式中等号成立等）方可获解。这就启发我们在原方程中去发掘这种极端情况。实际上，原方程可整理为关于$\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}$的一元二次方程

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{2}=0 \qquad ①$$

若要构造非负数的和为零，则会想到配方，于是，①可化为

$$2\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}=0,$$

至此，不难求得 $\alpha=\beta=\frac{\pi}{3}$.

若想利用二次方程根的判别式解题，则因方程①有实根，从而 $\Delta=4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}-4\geqslant 0$, 于是 $\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\geqslant 1$,

但 $\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\leqslant 1$，$\therefore$ $\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}=1$ 可求 $\alpha=\beta=\frac{\pi}{3}$。

本例充分说明了解题中以正确的数学思维方法作指导的重要性。应当说，学生对上述解法中涉及的基本知识（三角恒等变形）和基本方法（配方法、判别式法）是熟悉的，关键是他们想不到用这些知识和方法去解题，这就充分体现了学生对数学思维方法的缺乏与需求。

尽管解题基础是解题的先决条件，主观状态、客观条件对解题都有不同程度的影响，但这些都已得到人们的高度重视，并进行了深入而广泛的研究，而数学思维能力的训练却往往被人们忽略。经验不只一次地告诉我们，知识不足还可以补救，方法不够也可以积累，但若不善思考，即使再有知识和方法，却不懂得如何运用它们解决问题，也是枉然。与此相反，掌握了正确的思维方法，知识就不再是孤立的，方法也不再是呆板的，它们都建立了有血有肉的联系，组成了生机勃勃的知识、方法体系。数学思维活动也就充满活力，得到更完美的发挥与体现。

美国当代著名数学教育家G·polya就曾指出，解题的价值不是答案本身，而在于弄清"是怎样想到这个解法的？""是什么促使你这样想、这样做的？"。这实际上都属于数学思维方法的范畴。所谓数学思维方法，就是在基本数学思想系统作用下进行思维活动的心理过程。简单地说，数学思维方法就是沟通已有的数学知识和新遇的数学问题的联系的一种分析、探索方法。在一般情况下，问题与知识的联系并非是显然的，即使有时能在问题中看到某些知识的"影子"，但毕竟不是知识的原形，或是披上了"外衣"，或是减少了条件，或是改变了结构，从而没有现成的知识、方法可用

（这就是学生"为什么公式、定理都背熟了，例题也看懂了，还是不会做习题"的原因）。为了利用有关的知识和方法解题，就必须创造一定的"条件"，这种创造条件的认识、探索过程，就是数学思维方法作用的过程。

数学的思维方法，通常又表现为一种解题的思维模式。例如，G·Polya就在其名著《怎样解题》中列出了如下的一张解题表：

"怎样解题"表

（弄清问题）未知数是什么？已知数据是什么？条件是什么？满足条件是否可能？要确定未知数，条件是否充分？或者它是否不充分？或者是多余的？或者是矛盾的？画张图，引入适当的符号，把条件的各个部分分开，你能否把它们写下来？

（拟定计划）你以前见过它吗？你是否见过相同的问题而形式稍有不同？你是否知道与此有关的问题？你是否知道一个可能用得上的定理？看着未知数！试想出一个具有相同未知数或相似未知数的熟悉的问题。这里有一个与你现在的问题有关，且早已解决的问题，你能不能利用它？你能利用它的结果吗？你能利用它的方法吗？为了能利用它，你是否应该引入某些辅助元素？你能不能重新叙述这个问题？你能不能用不同的方法重新叙述它？回到定义去。如果你不能解决所提出的问题，可先解决一个与此有关问题。你能不能想出一个更容易着手的有关问题？一个更普遍的问题？一个更特殊的问题？一个类比的问题？你能否解决这个问题的一部分？仅仅保持条件的一部分而舍去其余部分，这样对于未知数能确定到什么程度？它会怎样变化？你能不能从已知数据导出某些有用的东西？你能不能想出适合于确定未知数的其它数据？如果需要的话，你能不能改变未知数或数据？或者二者都改变，以使新未知数和新数据彼此更接近？你是否利用了所有的已知数据？你是否利用了整个条件？你是否考虑了包含在问题中的所有必要的概念？

（实现计划）实现你的求解计划，检验每一步骤，你能否清楚地看出这一步骤是正确的？你能否证明这一步骤是正确的？

（回顾）你能否检验这个论证？你能否用别的方法导出这个结果？你能不能一下子看出它来？你能不能把这个结果或方法用于其它的问题？

容许我们大胆断言，任何一种解题模式均不可能囊括人们在解题过程中表现出来的各种思维特征。诸如观察、识

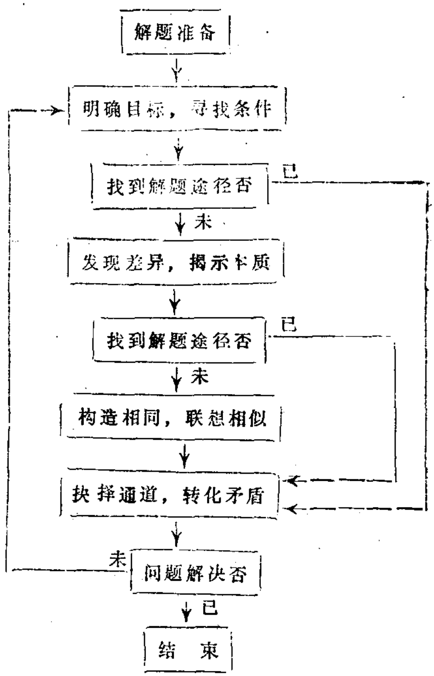
别、猜想、尝试、回忆、比较、直觉、顿悟、联想、类比、归纳、演绎、想像、反例，一般化、特殊化等．这些思维特征充满解题过程中的各个环节，要想用一个模式来概括，那就象用数以千计的思维元件来构造一个复杂而庞大的解题机器。这在理论上也许是可行的，但在实际应用中却难于被人们（特别是中学生）所接受。因此，人们希望找到一种比较实用而又具有一定的普遍意义的解题模式，波利亚的解题表就是这样一种模式。在此表的启发下，我们经过反复摸索与实践，研究出一种新的解题模式——四步解题法。

所谓四步解题法，就是把数学解题的思维过程划分为四个环节：（一）明确目标，寻找条件。（二）发现差异，揭示本质。（三）构造相同，联想相似。（四）抉择通道，转化矛盾。完成此四个步骤，称为一个解题循环，通过多次循环，最终使问题获解。

四步解题法同Polya的解题表一样，是一种解题的思维方法，但它与Polya的解题表至少有如下三个主要差别：（一）四步解题法是学习、研究Polya的解题表的一点心得。（二）解题表注重于方法的普遍性；而四步解题法则更注重于方法的实用性。（三）解题表视解题为一次性的过程，从总体上设计出解题的程序；而四步解题法则视解题为一个反复循环的过程，在单个循环上归纳出解题的思维步骤．如果我们把数学问题看作一个螺旋式的多级台阶，而解题就是要攀登到台阶的顶端．那么，四步解题法的每一次循环，就是攀越台阶的一级阶梯。反复循环，反复攀越，最终达到台阶的顶端。因“台阶”有高有低，“循环”也就有多有少，并且，在每上一级阶梯的单个循环中，并不一定都要经过四步解题法的四个步骤，根据问题的难易、繁简不同，某些步骤

可能出现一些跳越现象。

四步解题法可用框图表示如下：

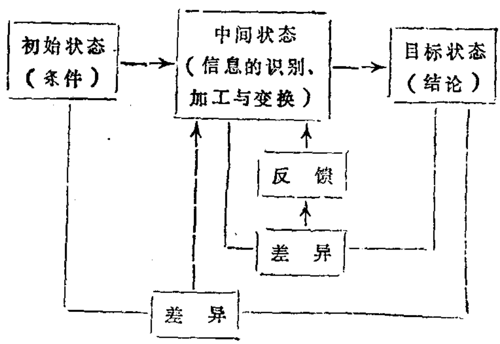


四步解题法逻辑框图

上图说明，解题进入第一环节后，一些简单的问题即可找到解题途径．此时，便可跳越二、三两个环节，直接进入第四环节；若问题比较复杂，经过第一环节还看不清从何处着手，则可进入第二环节。经过此环节后，若找到了问题的突破口，则又可跳越第三环节而进入第四环节。若否，则先进入第三环节，然后再进入第四环节。至此，便完成解题的一次循环。（每次循环中，第一环节和第四环节都是必经环

节）经过一次循环后，原问题便被转化为一个新问题（包括问题的条件和结论）．如果这个新问题已经解决或者已知道如何解决，解题分析便到此结束。若否，则再进入第 一 环节，开始新的循环，重新研究转化后的新问题，如此反复循环，反复转化，直至问题获解，这就是四步解题法的基本内容。

四步解题法的实质是把数学解题过程，看作一个信息交往的控制过程．它的每一次循环都是通过由初始状态 （ 条件）到目标状态(结论)的逐步转化来实现的。第一环节就是控制过程中信息的整理与编码。其它环节都是控制过程中对信息的识别、加工与变换，通过信息的不断反馈与调控，使控制过程反复循环，即将系统输出的“现实状态”与预期的控制“目标状态”出现的差异，反馈到施控系统的输入端，作为下一步施控作用的依据，使受控系统的施控结果向控制目标逼进．这一控制过程又可用框图表示如下：



数学解题控制过程框图

图中的中间状态就是四步解题法的后三个环节，在控制过程中，它是核心环节．在这一环节中，解题者根据问题的初始状态与目标状态，按照四步解题法的思维程序，对信息

进行识别、加工与变换，并通过不断地反馈调控，缩小题设条件与结论之间的差异，逐步实现条件到结论的转化。因此，简单地说，四步解题法的主要内容，就是关于解题信息的利用与反馈的一种固定的处理模式。

我们认为，把数学思维过程程序化，给解题思维一种定式的框架，不仅不会镣铟人的思维，反而有助于思维的发散。实际上，定势思维按照一种固定的模式去思考，它表现出思维的一种准备状态，并能随时扩大已有经验的应用范围。定势的不断熟练与完善，使思维更加深入与灵活。另外，发散思维以定势思维为前提，它常常表现为对定势的调节与变异。发散不是目的，发散后势必形成新的定势，使解题通向成功。由此可见，四步解题法这种定势的思维模式，对于帮助人们分析问题、寻求解法，提高解题能力，都将起到一定的积极作用。当然，如果读者已经掌握了某些问题的专门解法，而且很有应用它们的经验，并在遇到类似的新问题时，能迅速识别它们的类型，把它们纳入已有的知识系统，那么，你就只须根据过去的经验，按照原来的方法求解就行了。一旦你对有关知识的了解达到了这种熟练的程度，那么，四步解题法或其它的科学思维方法对你解这些问题来说，就没有什么价值了，而且也确实有些数学问题是只须依样画葫芦的。但必须指出，这些问题稍作改变，那些你所熟悉的方法，可能就不再适应了。比如“消元法”你一定是比较熟悉的，也许你对”已知$x+4y=1$，求$x^2+xy-x+2y$的极值”这样的问题，就无须思考，可直接找到解法。但是，问题稍作改变，变为“已知$x+2xy+4y=1$，求$x^2+xy-x+2y$的极值”，你可能就不那么得心应手了，甚至还束手无策。这时，你就须借助科学的思维方法来寻求解题途径。另外，数学中可依样

画葫芦的数学问题也毕竟很少，并且对任何解题者来说，总不可能每解一题都记住一种解题方法。因此，科学的思维方法不论对怎样的解题者都显得非常重要。即使是很有经验的解题者，一旦掌握了科学的思维方法，就会从更高的层次去把握他所熟悉的方法，使之更完美、更适用、更有威力！

总之，四步解题法这种模式化了的数学思维方法，可以帮助你在解题时从记忆库里提取解题所需要的基础知识和具体解题方法，通过问题本身的提示，把已有的知识、方法与要解决的问题联系起来，建立良好的信息交往，使解题获得成功。即使是对那些你“一看就会”的问题，运用四步解题法来寻求解题途径也不无意义，它可以帮助你验证四步解题法的威力，使你萌发运用它的兴趣与决心。

下面，我们略举几例，说明四步解题法的应用，使读者对这一方法有个初步了解。我们首先要讨论的就是在前面谈到的那个变异后的极值问题：

例 2 已知$x+2xy+4y=1$，求$x^2+xy-x+2y$的极小值。

【解】 问题的目标状态是“$x^2+xy-x+2y\geqslant$ 常数”。经验告诉我们，达到这一目标的常用方法是，通过换元或消元，使之化为一元函数的极值求解或利用基本不等式求解。再看已知条件，$x+2xy+4y=1$，发现式子$x+2xy+4y$可以换作常数“1”。通过比较两个状态的差异，终于发现可从目标状态中构造出“$x+2xy+4y$”来消除差异，由此得到变形：

$$x^2+xy-x+2y=\frac{1}{2}\left[2x^2+(2xy+4y+x)-3x\right]$$

$$=\frac{1}{2}(2x^2-3x+1).$$