

成人高等教育理工科试用教材

高等数学

下 册

李万选 主编

南开大学出版社

成人高等教育理工科试用教材

高等数学

下 册

李 万 选 主 编

南开大学出版社

1 9 8 8 年

内 容 提 要

本书分上下两册出版。下册包括多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、微分方程、无穷级数、无穷函数级数共六章。

本书可作为成人高等学校（夜大学、函授大学、职业大学、电视大学等）理工科的数学教材，也可作为普通高等工科院校的数学教材。

高 等 数 学

主 编 李万选

责任编辑 王家骅

南开大学出版社出版

（天津八里台南开大学校内）

河北工学院印刷厂印刷

（天津丁字沽河北工学院院内）

1988年12月第1版 1988年12月第1次印刷

开本：850×1168 1/32 印张：10.25

字数：253千 印数：1—10,000

ISBN7-310-00153-2/D·00 定价：1.80元

前 言

本书是在河北省教育委员会的领导下，责成河北工学院成人教育处负责组织，为适应成人高等教育理工科《高等数学》课程的教学需要而编写的。

本书主要供函授大学、夜大学、职工大学、电视大学等类成人高等学校本、专科使用。同时可供普通高等工科院校本、专科使用。

全书由杨从仁、郝寿主审。

全书分上下两册出版。下册由李万选主编，参加下册编写工作的还有于慎根(编写第十五章与第十六章)、王玲英(与李万选合编第十一章)、耿景昕(编写第十二章与第十三章)和商宏麒(编写第十四章)。

书中内容的叙述和论证，都力求严谨、简明和易懂。但由于编者水平不高，时间短促，因此书中存在的缺点错误一定很多，恳请同志们批评指正。

编 者 1987年5月

目 录

第十一 多元函数微分学	1
§ 11-1 多元函数概念.....	1
§ 11-2 二元函数的极限及连续性.....	10
§ 11-3 偏导数与全微分.....	16
§ 11-4 复合函数及隐函数微分法.....	30
§ 11-5 偏导数在几何上的应用.....	38
§ 11-6 多元函数的极值.....	45
§ 11-7 条件极值、拉格朗日乘数法.....	50
第十二章 重积分	54
§ 12-1 二重积分的概念和性质.....	54
§ 12-2 在直角坐标系中计算二重积分.....	60
§ 12-3 在极坐标系中计算二重积分.....	70
§ 12-4 三重积分的概念及其计算.....	76
§ 12-5 重积分的应用.....	88
§ 12-6 广义重积分.....	98
第十三章 曲线积分与曲面积分	103
§ 13-1 第一型曲线积分.....	103
§ 13-2 第二型曲线积分.....	109
§ 13-3 两种曲线积分的关系.....	116
§ 13-4 格林公式.....	118
§ 13-5 曲线积分与路径无关的条件.....	124
§ 13-6 全微分准则, 原函数.....	128
§ 13-7 第一型曲面积分.....	132

§ 13-8	第二型曲面积分	138
§ 13-9	两种曲面积分的关系	147
§ 13-10	奥氏公式	147
§ 13-11	斯托克斯公式	151
第十四章	微分方程	156
§ 14-1	微分方程的基本概念	156
§ 14-2	一阶微分方程	163
§ 14-3	几种特殊类型的二阶微分方程	178
§ 14-4	线性微分方程及其解的结构	189
§ 14-5	二阶常系数线性齐次微分方程	198
§ 14-6	二阶常系数线性非齐次微分方程	209
第十五章	无穷数值级数	223
§ 15-1	数值级数的基本概念及其性质	223
§ 15-2	正项级数收敛性的判别法	231
§ 15-3	交错级数	240
§ 15-4	绝对收敛级数	243
第十六章	无穷函数级数	249
§ 16-1	函数级数及其一致收敛性	249
§ 16-2	一致收敛级数的基本性质	255
§ 16-3	幂级数及其收敛性	258
§ 16-4	幂级数的性质	267
§ 16-5	函数展开为幂级数	275
§ 16-6	复幂级数	290
§ 16-7	幂级数应用举例	292
§ 16-8	傅里叶级数	298

第十一章 多元函数微分学

前面我们讨论了一元(一个自变量)函数的极限、连续、微分学和积分学。多元(两个以上自变量)函数概念及其微分学是一元函数概念及其微分学的推广和发展,它们有许多共同之处,但也存在着差异,然而从二元发展到三元以至更多元函数,就没有什么本质区别了。因此本章我们重点讲述二元函数及其微分学。

§ 11-1 多元函数概念

到目前为止,我们所讨论的对象都是一元函数 $y=f(x)$,而且我们总是假设它在某个特定的集合上有定义而加以讨论。对于二元函数以及多元函数,我们也有类似的限制,为此我们介绍平面点集的基本概念。

§ 11-1-1 平面点集初步

我们知道任一实数 x 对应数轴上的一点 M , x 就叫做这个点的坐标。全体实数的集合曾记为 R ,也可记作 R_1 ,称为一维空间。同样,任一二元有序数组 (x, y) ,对应平面上的一个点 $M(x, y)$ 。一切二元数组 (x, y) 所构成的集合记为 R_2 ,称为二维空间。把这个概念加以推广,把一切 n 元有序数组 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 所构成的集合记为 R_n ,称为 n 维空间, $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 称为 R_n 中的点,记为 $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 。其中 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 称为点 M 的坐标。与二维、三维空间类似,设 $M_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 和 M_2

$(y_1, y_2, \dots, y_n)$ 是 R_n 中的两个点, 我们规定这两点间的距离为

$$|M_1 - M_2| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

在二维空间 R_2 中, 三角形任两边之和总大于第三边这个事实, 用上面的符号来表达, 即对 R_2 中的任意三点 M_1, M_2, M_3 都有

$$|M_1 - M_3| \leq |M_1 - M_2| + |M_2 - M_3|$$

这是分析学中一个重要的不等式——三角不等式, 它也可推广到 n 维空间 R_n 中去。设 $M_1, M_2, \dots, M_n$ 是 R_n 中的 n 个点, 则有

$$|M_1 - M_n| \leq |M_1 - M_2| + |M_2 - M_3| + \dots + |M_{n-1} - M_n|.$$

为了今后叙述方便, 我们引入以下一些定义 (以平面点集为主)。

1. 邻域

在 R_1 中给定点 $M_0(x_0)$ 及 $\delta > 0$, 我们称集合

$$\{x \mid |x - x_0| < \delta\}$$

为 x_0 的 δ 邻域, 在数轴上就是中心为 x_0 , 长度为 2δ 的对称开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 。完全类似地可以定义 R_2 中的邻域概念。

设 $M_0(x_0, y_0) \in R_2$, $\delta > 0$, 则集合

$$\{M \mid |M - M_0| < \delta, M \in R_2\},$$

或

$$\{(x, y) \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\}$$

称为点 M_0 的 δ 邻域, 记作 $N(M_0, \delta)$ 。从几何上看, $N(M_0, \delta)$ 就是以 M_0 为圆心, δ 为半径的圆内的一切点。

在 R_3 中给定点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 及 $\delta > 0$, 集合

$$N(M_0, \delta) = \{M \mid |M - M_0| < \delta, M \in R_3\}$$

称为点 M_0 的 δ 邻域。从几何上看, 它是以 M_0 为球心, δ 为半径的球内的一切点 (不包括球面上的点)。

这一概念可推广到 R_n 中。

2. 区域和闭区域

设 E 为 R_2 中的点集, $P \in E$, 如果存在点 P 的某个邻域 $N(P, \delta)$, 使它全部属于 E , 则称 P 为集合 E 的内点(图 11-1)。

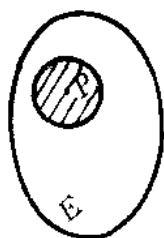


图 11-1

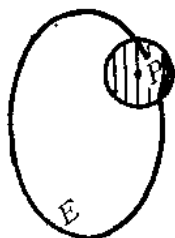


图 11-2

如果点 P 的任意一个邻域中既有属于 E 的点, 也有不属于 E 的点(P 可以属于 E 也可以不属于 E), 则称 P 为 E 的边界点(图 11-2). E 的边界点的全体称为 E 的边界。

例 1 如果点集 E 是满足不等式

$$x^2 + y^2 < 1$$

的点的全体, 则 E 中的任何点皆为内点, 单位圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 上的点 (x, y) 皆为 E 的界点, 且圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 是点集 E 的边界, 但它不属于 E (图 11-3)。

例 2 集 $G = \{(x, y) | x^2 + y^2 \geq 1\}$. 则单位圆外面的点, 即满足 $x^2 + y^2 > 1$ 的点 (x, y) , 皆为 G 的内点, 单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 是 G 的边界, 此边界属于 G (图 11-4)。

如果 E 的点都是 E 的内点则称 E 为开集。

若集 E 是开集, 且 E 中任两点都能用属于 E 的折线连接起来(称 E 的这种性质为连通性), 则称这样的开集为区域。即, 区域是连通的开集。例 1 中的集 E 是区域。

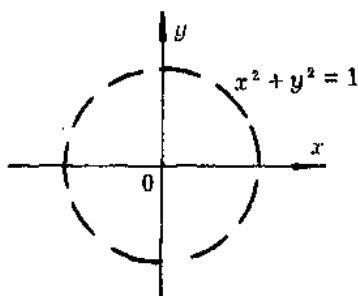


图 11-3

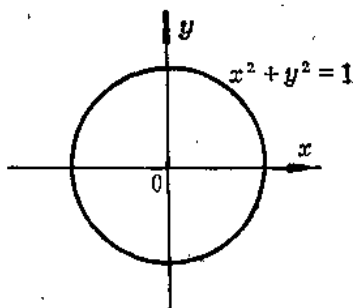


图 11-4

区域连同它的边界，称为闭区域。例 2 中的集 G 是闭区域。这里所谓闭区域只是习惯上的叫法，严格说来按照区域的定义，闭区域已不成其为区域了。但我们以后多是研究具体的区域，在不需区分区域和闭区域时，我们统称为区域。

如果存在以原点为圆心的圆，使集 E 全部包含在此圆内，则称 E 为有界集。

例 3 集 $E = \{(x, y) | 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ 是区域，且有界。从几何上来看，它是以原点为心，半径分别为 1 与 2 的两个同心圆所夹的环内部分(图 11-5)。

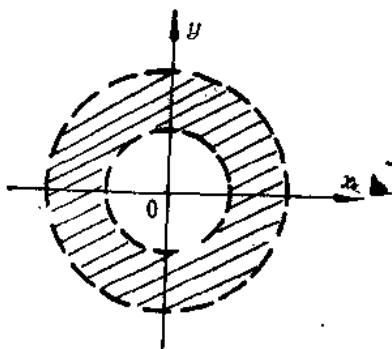


图 11-5

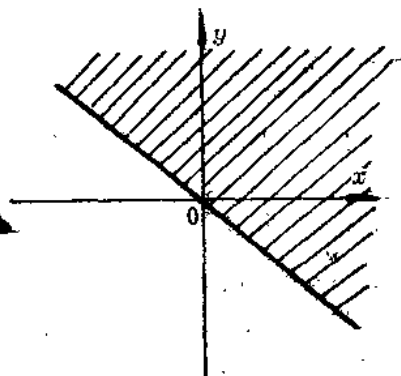


图 11-6

例 4 集 $G = \{(x, y) | x + y > 0\}$ 是无界区域(图 11-6)

§ 11-1-2 多元函数的定义

在一元函数微积分中, 讨论的只是一个自变量和一个因变量的函数。但在实际问题中, 经常遇到多个变量之间的依赖关系。

例 1 动能

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2.$$

这里动能 E_k 是随着物体的质量 m 和运动速度 v 两个量的变化而变化的。当 m, v 在一定范围 ($m > 0, v > 0$) 内取定一对值时, E_k 的值就随之确定。

例 2 圆柱体的体积 V 和它的底半径 r 、高 h 之间具有关系

$$V = \pi r^2 h.$$

这里, V 是随着 r, h 的变化而变化的, 当 r, h 在一定范围 ($r > 0, h > 0$) 内取定一对值时, V 的对应值就随之确定。

例 3 长方体的体积

$$V = xyz.$$

这里, V 是随着长方体的长 x 、宽 y 和高 z 三个量的变化而变化的。当 x, y, z 在一定范围 ($x > 0, y > 0, z > 0$) 内取定一组数值时, V 的对应值也就随之确定。

上述三例皆为多元函数的实例, 它们的共同特点都是对于某个范围内的每个点, 依照一定的规律都恰有一个确定的数值与之对应。下面给出二元函数的定义。

设 D 是 R_2 中的一个点集, f 是一个确定的对应规律, 如果对于 D 中的每个点 $M(x, y)$, 通过 f 都恰有一个数 z 和它对应。

即 $M \xrightarrow{f} z$, 我们就说 f 是 D 上的二元函数, 按习惯记作

$$z = f(M) \text{ 或 } z = f(x, y).$$

习惯上也说 z 是 $M(x, y)$ 的二元函数。一般都把 x 和 y 叫做自变量, z 叫做因变量, D 叫做函数的定义域。

当自变量 x 和 y 取定值时, 因变量的相应值叫做函数值。所有函数值的全体组成的集合叫做值域。

函数 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处的函数值记为 $f(x_0, y_0)$ 。例如对于

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} + \sin y + x^2 e^y.$$

有
$$f(0, 0) = \sqrt{1 - 0^2 - 0^2} + \sin 0 + 0^2 e^0 = 1,$$

$$\begin{aligned} f\left(0, \frac{\pi}{4}\right) &= \sqrt{1 - \frac{\pi^2}{16}} + \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{16 - \pi^2} + \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) &= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} \\ &\quad + \sin \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot e^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{6} \sqrt{23} + \sin \frac{1}{3} + \frac{1}{4} e^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

二元函数的定义域, 即自变量 x, y 的取值范围, 可以是全平面 R_2 , 也可以是这个平面的一部分。

例 1 对于

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} + \sin y + x^2 e^y,$$

因为限于实数域, 根号内不得取负值, 故其定义域为

$$\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\},$$

即是以原点为圆心, 以 1 为半径的圆域。

例 2 求二元函数

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

的定义域。

解 仍由根式函数的要求可知, 其定义域为同时满足不等式

$$x^2 + y^2 - 1 \geq 0, \quad 4 - x^2 - y^2 \geq 0$$

的点 (x, y) 所组成的集合, 即

$$\{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

它是以原点为圆心, 分别以 1 及 2 为半径的两个同心圆之间的环形部分。

例 3 求二元函数 $z = \ln(x+y)$ 的定义域。

解 该函数要求 $x+y > 0$, 故其定义域为

$$\{(x, y) | x+y > 0\},$$

其图形见图 11-6。

例 4 求二元函数 $z = \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{\sqrt{x-y}}$ 的定义域。

解 此函数的定义域应为这两项各自定义域的公共部分:

$$\begin{cases} |x| \leq |a|, \\ x-y > 0 \end{cases}$$

$|x| \leq |a|$ 为 $x = |a|$ 及 $x = -|a|$ 两条直线之间的部分, 而 $x-y > 0$ 为直线 $x-y=0$ 的右下半平面, 其公共部分为图 11-7 所示的阴影部分。

二元函数的概念, 可以推广到 n 元函数:

设 D 是 R_n 中的一个点集, f 是一个确定的对应规律, 如果对于 D 中的每个点 $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 通过 f 都恰有一个数 y 和它相对应, 我们就说给定了一个 n 元函数或 n 维空间的点的函

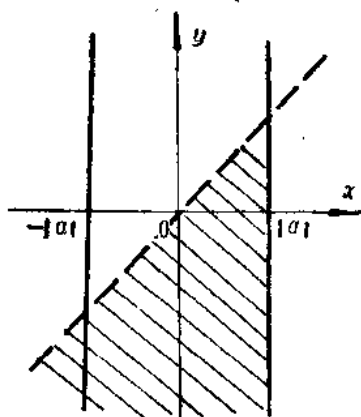


图 11-7

数，习惯记作

$$y = f(M) \quad \text{或} \quad y = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

其中， M 点的坐标 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 叫做自变量， D 叫做函数的定义域。

例 3 就是一个三元函数。

§ 11-1-3 二元函数的几何表示

我们知道，一元函数 $y = f(x)$ 通常是表示为 xy 坐标平面上的一条曲线。对于二元函数，我们可以用直角坐标系给出几何解释。

设二元函数

$$z = f(x, y) \quad (x, y) \in D$$

在定义域 D 每取定一点 $P(x, y)$ ，按照函数关系就可取得一 z 值，空间中点 $M(x, y, f(x, y))$ 的坐标满足函数式 $z = f(x, y)$ 。当 $P(x, y)$ 跑遍定义域 D ，相应的点 $M(x, y, f(x, y))$ 就绘出一个曲

面，这一曲面上点的坐标都满足函数式 $z = f(x, y)$ ，因此这个曲面就是二元函数 $z = f(x, y)$ 的图形(见图 11-8)。

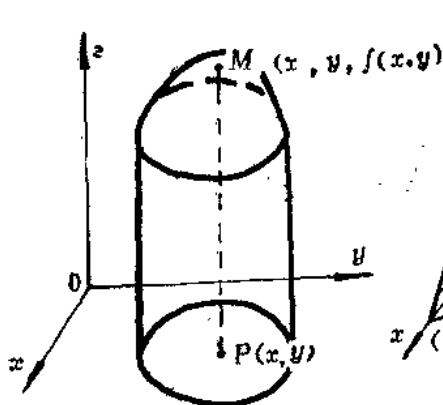


图 11-8

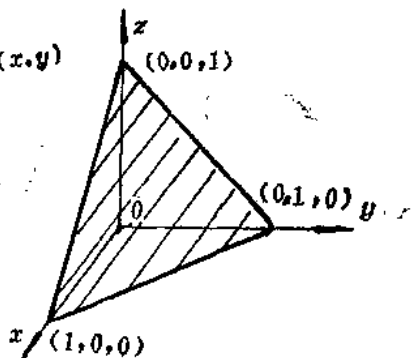


图 11-9

例如，从空间解析几何可知，函数 $z = 1 - x - y$ 的图形是平面(见图 11-9)。

函数 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 的图形是定义在单位圆 $x^2 + y^2 \leq 1$ 上的上半球面(见图 11-10)。

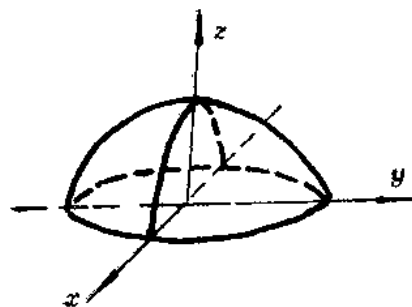


图 11-10

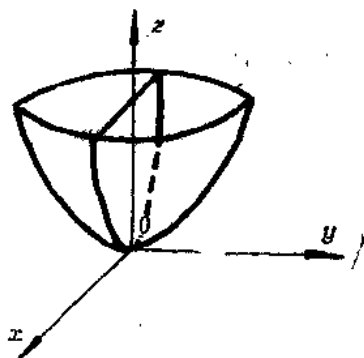


图 11-11

函数 $z = x^2 + y^2$ 的图形是定义在 xOy 全平面上的以原点为顶点的旋转抛物面(见图 11-11)。

由方程

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

确定两个二元函数, $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 和 $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 分别表示上半球面和下半球面。

§ 11-2 二元函数的极限及连续性

§ 11-2-1 二元函数的极限

聚点的概念可以转移到平面点集上。设 E 是一平面点集, P 为一定点(不一定属于 E)。如果对于任意的 $\varepsilon > 0$, 点 P 的 ε 邻域(圆域或方域)内含有 E 的无穷多个点, 那么 P 点叫做集 E 的一个聚点。可以证明:

如果 E 是一个有界的无穷点集, 那么 E 至少有一个聚点。

定义 设 E 是一个平面点集, P_0 是 E 的聚点, 函数 $f(P)$ 在 E 有定义, A 为一个常数。若对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在某个正数 δ , 使得当 $0 < |P - P_0| < \delta$ 且 $P \in E$ 时, 恒成立

$$|f(P) - A| < \varepsilon,$$

则称 $f(P)$ 当 P 趋于 P_0 时以 A 为极限(或 $f(P)$ 收敛于 A), 记作

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A, \quad P \in E.$$

设 $P = (x, y)$, $P_0 = (x_0, y_0)$, $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A$ 也可写作

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$$

这时定义中的不等式 $0 < |P - P_0| < \delta$ 就是

$$0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta.$$

例 1 证明 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \sqrt{x^2 + y^2} = 0$

证 此时, $|P - P_0| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$ 任给 $\varepsilon > 0$, 要使

$$|\sqrt{x^2 + y^2} - 0| < \varepsilon$$

即要 $|P - P_0| < \varepsilon$

取 $\delta = \varepsilon$, 当 $0 < |P - P_0| < \delta$ 时, 就有

$$|\sqrt{x^2 + y^2} - 0| < \varepsilon,$$

依极限定义则有

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \sqrt{x^2 + y^2} = 0.$$

一元函数极限的一些运算规律(如函数的和、差、积、商等极限运算规律), 都可以推广到二元函数, 证明方法也基本相同, 这里从略. 例如, 把 x 或 y 看作 x 及 y 的二元函数, a 与 b 是任何实数, 不难得出

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} x = a \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} y = b$$

运用极限运算规律即可得

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} c x^m y^n = c a^m b^n,$$

这里 m 及 n 是非负整数, c 是一个常数, 于是对二元多项式 $P(x, y)$ 有

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} P(x, y) = P(a, b)$$

同样, 利用极限运算规律, 对二元有理函数(有理分式) $R(x, y)$ 有