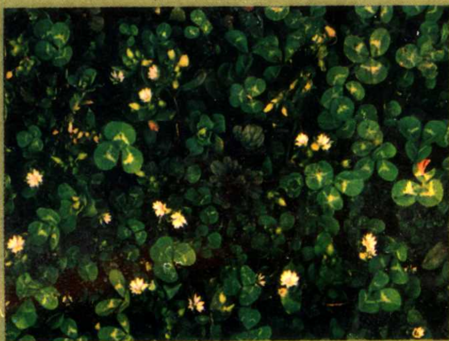
初等数学前沿

Forward Position of Elementary Mathematics

vol.1（1995）



陈 计 叶中豪 主编

江苏教育出版社

江苏教育出版社

初等数学前沿

陈　计　叶中豪　主编

初 等 数 学 前 沿

陈　计　叶中豪　主　编

责任编辑　王巧林　毛永生

出版发行:江 苏 教 育 出 版 社

(南京中央 165 号,邮政编码:210009)

经　　销:江 苏 省 新 华 书 店

印　　刷:扬 州 印 刷 总 厂

(扬州市江都路 44 号,邮政编码:225003)

开本 850×1168 毫米　1/32　印张 14.75　插页 2　字数 370,000

1996 年 4 月第 1 版　　1996 年 4 月第 1 次印刷

印数 1—4000 册

ISBN　7—5343—2663—X

G·2403　　　　定价:13.60 元

江苏教育版图书若有印刷装订错误,可向承印厂调换

目　录

生长点和渗透窗

（代序言）

扬州大学数学系　蒋　声

初等数学研究历史悠久.自从算术、几何学、代数学和三角学诞生以来，人们一直不断地用自己的创造性工作使它们的内容日趋丰富和发展.今日数学已有突飞猛进发展，面目焕然一新，但是初等数学研究非但没有停滞不前，反而比以往更加活跃.当今世界各国有很多初等数学杂志，每年发表大量文章，其中不乏研究佳作.美国《数学评论》杂志报导评论的浩如烟海的世界最新数学研究重要文献中，也包含一些初等数学杂志上发表的初等数学论文.

为什么在现代数学新观念、新方法、新理论层出不穷的今天，初等数学研究仍然是一片兴旺景象呢？

这是因为，任何复杂深奥的数学新理论都是在某些相对说来比较简单和比较基本的旧理论的基础上发展起来的，在旧理论中可以找到新理论的生长点.初等数学是整个数学中最简单最基本最贴近生活受实践考验最多的部分，因而在初等数学中集聚了很多生长点，随着数学日益发展，初等数学中的生长点也日见增多.现代数学是一棵参天大树，迎风伸展万千枝条；初等数学就是它那茁壮树干临近地面洋溢泥土芬芳的部分.叶附于枝，枝出于干，树活干活，树长干长.

例如，不等式就是一个重要的生长点.在现代数学各分支中常需处理涉及不等式的问题，解决这些问题固然主要依靠现代数学的深刻思想和有关的特殊定理、方法、技巧，但在某些环节上往往也需借助适当的初等不等式.甚至有时一个初等不等式不是首先

出现在初等数学文献中，而是在一篇艰深的数学研究论文中作为引理而被提出和证明. 通常，一个条件简洁、结论简明的初等不等式，往往存在被推广和获得进一步应用的可能性. 推广的途径多种多样，例如可借助线性空间、增高维数、考虑曲率或引进拓扑等. 不等式的条件和结论愈简洁，推广和应用的可能性愈大.

几何变换是又一个重要的生长点. 根据德国数学家菲力克斯·克莱因的《爱尔朗根纲要》的观点，一种几何学就是研究在相应变换群下不变的几何性质的理论. 代数学中的凯莱定理则断言任何抽象群都同构于一个变换群. 在初等数学中，几何变换可用来帮助迅速发现怎样作辅助线；在现代数学中，几何变换则可在大段繁琐演算或抽象推理之前帮助猜测可能的结果和设计合理的研究路线. 在建筑设计、机械制造和钣金工艺制作中，几何变换又被用来绘制各种投影图、直观图和展开图，直接为生产服务.

生长点往往同时又是渗透的窗口. 初等数学可以从这里往现代数学方向生长，现代数学可以从这里向中小学教育渗透.

例如，运算律是一个生长点，通过它可从初等数学中的数系引向近世代数学中的群、环、域等抽象代数结构. 运算律又是一个渗透窗，通过它可借助“定义新运算”的数学竞赛题让中学生以喜闻乐见方式领略群论花絮.

又如，通过存在性问题的窗口，组合数学中的抽屉原则渗透到中小学数学竞赛题里面，很多学生稍经训练，便可得心应手熟练运用.

通过常规数学问题解法研究和教材研究同样也能实现渗透. 面积法证几何题和用几何变换解答证明题都是这方面成功的实例. 这两种方法首先在现代几何学研究中显露威力，通过挖掘它们解答初等问题的潜力，逐步发展成初等数学中的解题锐利武器.

在研究初等数学中的生长点和渗透窗时，如果着眼于探索解法的思路和叙述解法的过程，从方法上概括共性，就引导到数学方

法论. 处理初等数学问题、高等数学问题和现代数学研究问题，在技巧上大不相同，在思维方法上却遵循共同的基本规律. 除去归纳与演绎、分析法与综合法、直接证法与间接证法这样一些对数理化生自然科学不同学科普遍适用的一般方法而外，要能总结出数学特有的方法，需要将数学的不同部分互相比较，取其共性. 熟知的“映射—关系—反演”原则(MRI)和最近提出的一组常用数学思想方法“抽象、观察、分解、变化、逼近”(AODVA)，都是通过将初等数学与现代数学对照而概括提炼出来的.

考虑初等数学问题时，如果注意联想大学数学课程中的有关知识，结果也能发现初等数学里的许多生长点和渗透窗. 这种联想可帮助我们对初等数学获得新的认识，将初等数学教学和研究水平推向新的高度.

研究论文

正整数集上的 Kuratowski 问题

南京师范大学数学系 单 墫

拓扑学中有一个著名的 Kuratowski 问题：对任一点集 A，由集 A 经过取补集与取闭包的运算，至多产生 14 个集[1],[2].

例如，设全集 I 为区间[1,5]，集

$$A=\{[1,2]\text{中的有理点}\}\cup[2,3)\cup(3,4]\cup\{5\},$$

用 $f(A)$ 表示 A 的闭包，$g(A)$ 表示 A 的补集，则 A 及

$$f(A)=[1,4]\cup\{5\},$$
$$g(A)=\{[1,2]\text{中的无理点}\}\cup\{3\}\cup(4,5),$$
$$gf(A)=g(f(A))=(4,5),$$
$$fg(A)=[1,2]\cup\{3\}\cup[4,5],$$
$$fgf(A)=[4,5],$$
$$gfg(A)=(2,3)\cup(3,4),$$
$$gfgf(A)=[1,4),$$
$$fgfg(A)=[2,4],$$
$$fgfgf(A)=[1,4],$$
$$gfgfg(A)=[1,2)\cup(4,5],$$
$$gfgfgf(A)=(4,5],$$
$$fgfgfg(A)=[1,2]\cup[4,5],$$
$$gfgfgfg(A)=(2,4).$$

这 14 个集互不相同，而再进行取补集与取闭包的运算不能产生新的集.

1960 年 P.C. Hammer[3] 将上述问题推广至更一般的集合运算. 在论文的最后,他提出一个未解决的问题,这个问题可以叙述成如下形式:

设 N 为全体自然数的集合,对任一集 $A\subseteq N$,令 $g(A)=N-A$, $f(A)=\langle A\rangle$,这里 $\langle A\rangle$ 表示 A 经乘法生成的集,即

$\langle A\rangle=\{$任意多个 A 中元素(允许相同)相乘的积$\}$

(单独一个元素也算作积,所以 $\langle A\rangle\supseteq A$).

若由 A 经过 f、g 的多次复合,恰好产生 14 个不同的集(包括 A 本身),则 A 称为 K 集.

K 集是否存在?

这个问题,在已有文献上,没有见到解答.

1992 年,作者在香港中文大学访问期间,香港数学会主席岑嘉评(K.P.Shum) 博士设宴招待王元先生和我,席间谈起这个问题,岑先生很兴奋地说他已经找到 K 集的例子. 这是一个饶有趣味的数论问题,我回到宾馆仔细思考,也找到两个 K 集的例子. 次日与岑先生交流,发现所找到的例子互不相同. 岑先生的例子是

$$A=\{5,2^2\times 3^2,7,2\times 5^2,2^2\times 3^2,3\times 7^2,3^2\times 7^3\} \tag{1}$$

其中有 7 个数,共含 4 个质因数(2,3,5,7).

我的例子是

$$A=\{2,3^3,2\times 3,2\times 5,2\times 5^2,2\times 3\times 5,2\times 3\times 5^2\} \tag{2}$$

与

$$A=\{2,2\times 3,2\times 5,2\times 3\times 5,3^3\}. \tag{3}$$

元数分别为 7 与 5,而质因数的个数均为 3.

下面证明(3)确实是 K 集((1),(2)是 K 集可以同样证明),证明是初等、直接的,与岑嘉评[4] 完全不同.

将 $f(A)$,$g(A)$,$gf(A)$ 等简记作 f,g,gf 等.

首先 f 具有性质

(i) 若集 $A \subseteq B$,则 $f(A) \subseteq f(B)$;

(ii) $f(A) \supseteq A$;

(iii) $f(f(A)) = f(A)$.

这三条性质可分别称为单调增,扩大,幂.

g 具有性质

(iv) 若集 $A \subseteq B$,则 $g(A) \supseteq g(B)$;

(v) $g(g(A)) = A$.

这两条性质分别称为单调减,幂零.

显然,通常集的补集与闭包也具有这些性质.

为完整起见,我们证明任一集 A 经过 f、g 的复合,至多产生 14 个不同的集.先建立两个图:

$$
\begin{tikzcd}
 & & f \arrow[d] \arrow[dll] & & & fg \arrow[d] \arrow[ddrr] & & \\
 & & fgfgf \arrow[dl] \arrow[dr] & & & fgfgfg \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
A \arrow[ddrr] & fgfg \arrow[dr] & & gfgf \arrow[dl] & fgf \arrow[dr] & & gfgfg \arrow[dl] & g \arrow[ddll] \\
 & & gfgfgfg \arrow[d] & & & gfgfgf \arrow[d] & & \\
 & & gfg & & & gf & &
\end{tikzcd}
$$

分别称为左图、右图.

图中的 $B\to C$ 表示 $B\supseteq C$.

左图中的偏序关系建立如下：

(1) 由 $g\subseteq fg$ 得 $A\supseteq gfg$.

(2) 由 $f\supseteq gfg(f)$ 得 $f\supseteq fgfgf$.

(3) 易知 gfg 是单调增的. 因此，由 $f\supseteq A$ 得 $gfgf\supseteq gfg$，从而 $fgfgf\supseteq fgfg$.

(4)$gfgfgfg=gfg(fgfg)\subseteq gfg(f)=gfgf$.

(5)$gfgfgfg=gfg(fgfg)\subseteq fgfg$.

(6) 由 $f(gfg)\supseteq gfg$ 得 $gfgfg\subseteq fg$，从而 $gfgfgfg\supseteq gf(fg)=gfg$.

将 g 作用于左图，就产生右图的偏序关系.

在左、右两个图中已有 14 个集，未在图中出现的、由复合而得的、接下去的两个集应当是 $fgfgfgf$ 与 $fgfgfgfg$. 但我们有

(1)$fgfgfgf=fgf$.

事实上，由右图

$fgfgfgf=f(gfgfgf)\supseteq f(gf)=fgf$.

由左图，

$fgf=f(gf)\supseteq fgfgf(gf)=fgfgfgf$.

(2)$fgfgfgfg=fgfg$.

事实上，由(1)(将 A 换作 $g(A)$)，

$fgfgfgfg=fgfgfgf(g)=fgf(g)=fgfg$.

于是，由 f、g 复合，除图中 14 个集外，不能产生其它的集.

对于集

$A=\{2,2\times 3,2\times 5,2\times 3\times 5,3^3\}$，

我们有

$gfg=\{2,2\times 3,2\times 5,2\times 3\times 5\}\neq A$.

因为 $3\notin f$，所以 $3\in gf,3,3^2,3^3\in fgf,3,3^2,3^3\notin fgfgf$. 而 $3^3\in f$，所以 $fgfgf\neq f$.

$2\times 3^2, 2\times 5^2 \notin f$，所以 $2\times 3^2, 2\times 5^2 \in gf$，$(2\times 3^2)\times(2\times 5^2)\in fgf$，即 $(2\times 3\times 5)^2\in fgf$，从而 $(2\times 3\times 5)^2 \notin gfgf$，但 $(2\times 3\times 5)^2\in fgfg$.

$2^2\times 3^3 \notin f(gfg) = fgfg$，$2^2\times 3^3\in f$，并且若 $2^2\times 3^3 = n_1n_2\cdots n_k (k\geqslant 2)$，则至少有一个 n_i 中 3 的幂指数不大于 2 的幂指数，因而这个 $n_i\in f$，从而 $n_i\notin gf$，$2^2\times 3^3\notin fgf$，$2^2\times 3^3\in gfgf$.

以上两段表明 $fgfg$ 与 $gfgf$ 不可比较，从而 $fgfg, gfgf, fgfgf, gfgfgfg$ 这四个集两两不等.

因为 $2, 2^2, 2^3, \cdots \in fgfg$，所以 $2, 2^2, 2^3, \cdots \notin gfgfg$；$2, 2^2, 2^3, \cdots \notin fgfgfg$；$2, 2^2, 2^3, \cdots \in gfgfgfg$. 从而 $gfgfgfg, fgfg, gfgf, fgfgf, f$ 都是无穷集，不与有限集 A、gfg 相等.

于是左图的 7 个集各不相同. 它们的补集即右图的 7 个集也各不相同.

左图的任一集决不可能等于右图的集. 如果这种情况发生，左图的最大集 f 包含右图的最小集 gf，产生矛盾.

因此，由 A 经 f、g 复合恰产生 14 个不同的集.

显然，A 中的素数 2,3,5 可换为任三个不同的素数，所得的集仍为 K 集.

(3) 是元数最小的 K 集，而且其中各数所含的不同素因数个数也最少，这一点不难证明.

Kuratowski 问题还有其它的推广，例如

1. 设 t 为区间 $[0,1]$ 中的实数，定义

$$g(t) = 1 - t.$$

显然 g 具有单调减、幂零(即 $g(g(t)) = t$) 这两个性质，又设函数 $f:[0,1]\to[0,1]$ 满足

(i) 单调增，

(ii) $f(t)\geqslant t$，

(iii) $f(f(t)) = f(t)$.

则 g 与 f 复合，至多产生 14 个不同的函数（连同函数 t 在内）.

2. 设平面上的点所成的集为 X. 对于任两个点 (a_1,b_1)，(a_2,b_2)，约定在 $a_2 > a_1$ 或 $a_2 = a_1$ 且 $b_2 > b_1$ 时，

$$(a_1,b_1) < (a_2,b_2).$$

如果 g 是关于原点的对称，而 $f: X \to X$，满足

(i) 单调增，

(ii) 对任一点 t，$f(t) \geqslant t$，

(iii) 对任一点 t，$f(f(t)) = f(t)$.

那么由 f 与 g 复合，至多产生 14 个不同的函数.

在这两种情况中，均可举出恰好产生 14 个函数的例子.

参考文献

[1] K. Kuratowski, Sur l'operation $\overline{A}$ de l'analysis sitas, Fundamenta Mathematicae, 3(1922), 182 — 199.

[2] J. L. Kelly 著，吴从炘、吴让泉译，《一般拓扑学》，科学出版社，1982 年，52.

[3] P. C. Hammer, Kuratowski's closure theorem, Nieuw Archief voor Wiskunde(3), 8(1960), 74 — 80.

[4] 岑嘉评，正整数集上的 Kuratowski 闭余问题，待发表.

Apèry 数的同余性质

武汉大学数学系　曾登高

(一) 引　言

Apèry 序列是指：$A_0 = 1, A_1 = 5$,

$n^3 A_n - (34n^3 - 51n^2 + 27n - 5)A_{n-1} + (n-1)^3 A_{n-2} = 0.$ (1)

这个序列的前几项为

$A_0 = 1, A_1 = 5, A_2 = 73, A_3 = 1445, A_4 = 33001, A_5 = 819005,$

$A_6 = 21460825, A_7 = 584307365, A_8 = 16367912425,$

$A_9 = 468690849005, A_{10} = 13657436403073,$

$A_{11} = 403676083788125, A_{12} = 12073365010564729, \cdots.$

由递推式(1)，Apèry 还推得

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2. \tag{2}$$

1980 年，S. Chowla、J. Cowles 和 M. Cowles[2] 将上述数称为 Apèry 数，并讨论了它的许多同余性质，主要有

定理 1　对所有 $n \geqslant 0, A_n$ 为奇数.

定理 2　对所有素数 $p, A_p \equiv 5 \pmod{p^2}$.

他们还提出了

猜测 1　对所有素数 $p \geqslant 5, A_p \equiv 5 \pmod{p^3}$.

猜测 2　对奇素数 $p, A_p \equiv 0 \pmod{5}$.

猜测 1、2 早在 1982 年就被 I. Gessel[4] 所解决，继后，

Y. Mimura[5]、F. Beukers[6]、[7]、M. J. Coster[8]、P. T. Young[9] 均有探讨. 笔者[15]曾得出 Apèry 数对模 16 的完善结果，本文中，我们将得到 Apèry 数模 p^4 的同余性质，主要结果有

定理 3　对所有素数 $p \geqslant 5$，

$$A_p \equiv 5 - 7p^2 \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^2} \pmod{p^4}.$$

（二）引　　理

首先，我们要在剩余类中引入互逆概念.

定义　若 p 为素数，$(a,p)=1$，$a,b \in Z/p^tZ$ 且 $ab \equiv 1 \pmod{p^t}$，则称 b 为 a 对模 p^t 的逆，记作 a^{-1} 或 $\frac{1}{a}$.

易知，上述定义中若 a 确定，则 a^{-1} 也唯一确定.

引理 1[2]　对所有素数 $p \geqslant 5$，有

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^2} \equiv 0 \pmod{p}. \tag{3}$$

引理 2[15]　对所有素数 $p \geqslant 5$，有

i)（Wolstenholme 定理）$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} \equiv 0 \pmod{p^2}$；　(4)

ii) $\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^3} \equiv 0 \pmod{p^2}$.　(5)

引理 3　对所有素数 $p \geqslant 5$，有

$$\binom{2p}{p}^2 \equiv 4\left(1 - 2\sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i^2} p^2\right) \pmod{p^4}. \tag{6}$$

证明　$\binom{2p}{p} = 2\prod_{k=1}^{p-1} \frac{p+k}{k} = 2\prod_{k=1}^{p-1}\left(1 + \frac{p}{k}\right)$

$$\equiv 2\left(1 + \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i}p + \sum_{i \neq j} \frac{1}{ij}p^2 + \sum_{i \neq j \neq l} \frac{1}{ijl}p^3\right) \pmod{p^4}.$$