高等学校交流讲义

高等代数

GAODENG DAISHU

南京大学数学天文学系编

人民教育出版社

高等学校交流講义

高　等　代　数

GAODENG DAISHU

南京大学数学天文学系编

人民教育出版社

本书是南京大学数学天文学系編写的。全书內容有行列式、綫性方程組的理論和数值解法、綫性規划、一元多項式的可除性理論和方根的数值解法、綫性空間和綫性变換、矩陣的若当标准式和λ-矩陣、特征根的数值解法、特征值解法以及二次齐式、欧氏空間和酉空間簡介。

本书可作为綜合大学、高等师范学校数学各专业高等代数課程的教材，也可供高等工业学校相近专业选用。

簡裝本說明

目前 850×1168 毫米规格紙張較少，本书轉以 787×1092 毫米規格紙張印刷，定价相应減少 20%。希鉴諒。

高 等 代 数

南京大学数学天文学系編

人民教育出版社出版 高等学校教学用书編輯部 北京宣武門內承恩寺7号

（北京市书刊出版业营业許可証出字第2号）

北 京 京 华 印 书 局 印 装

北 京 科 技 发 行 所 发 行

各 地 新 华 书 店 經 售

統一书号 13010·943 开本 787×1092 印张 $9\frac{7}{16}$

字数 225,000 印数 00001—15,000 定价（6）¥0.75

1961 年 6 月第1版 1961 年 6 月北京第1次印刷

序　　言

高等代数是綜合性大学与高等师范学校数学专业的一門基础課程。学生在学习了这門課程以后，一方面应該有足够的代数知識来学习有关的数学課程以及某些专門化課程，另一方面也应該掌握足够的代数方法来解决在工农业生产中遇到的实际問題。本书就是为了满足高等学校教材上的需要，并适应上述两方面的要求而編写的。

这本书大体上可以分为两个部分，第一部分是第一、二、三章，內容是以解方程及其应用为中心。在这三章中，我們先从綫性方程組的理論开始，然后，作为綫性方程中的应用，討論了綫性規划。由于我們是从綫性方程的角度来討論綫性規划的，所以沒有罗列三年来国內数学工作者所发現的許多解綫性規划的方法。事实上，限于篇幅，我們不但不可能这样作，而且也不必要这样作，因为学生有了这些理論知識以后，他們已經可以有足够的能力来研究綫性規划的許多方法了。

第三章是以解高次方程为中心的，在这里，我們不但注意了一元高次方程，也相应地注意了多元高次方程的解法。

后面的三章基本上是以矩陣論为中心来討論綫性方程的內容的。在第四章討論了綫性空間与綫性变换的理論以后，接下去第五章就討論若当法式的理論及其求法。二次齐式的理論也是很重要的，因此在第六章中着重討論了实二次式在满秩变换以及正交变换下的标准式。

在本书中除了对高等代数的基本理論予以相当重視外，还介紹了一些在解决实际問題中常用的数値解法。

这本书基本上是去年短期内集体編成的，經过試用后做了一些修改。最近一次修改时，承北京大学段学复同志、聂灵沼同志，吉林大学王湘浩同志、謝邦杰同志，四川大学柯召同志，北京师范大学王世强同志等提供了不少有益的意見。編者在此謹致謝意。

限于我們的水平，书中謬誤之处在所难免。此外，在内容取舍及編排上，也会有考虑欠周之处。因此，非常希望同志們多提批評和建議，使我們能够通过大家的帮助，来把这本教材修改得更加完善。

南京大学数学天文学系

1961年4月

目　　录

序　　言

第一章　行列式与綫性方程組

§1. 行列式……………………………………………………………………1

1.1 行列式的定义(3)　1.2 行列式的子式·代数余子式(8)　1.3 行列式的性質(11)　1.4 克莱滿法則(23)　1.5 行列式的保値变换与两条有关的定理(26)

§2. 向量和矩陣……………………………………………………………31

2.1 向量及其基本运算(31)　2.2 綫性相关与綫性組合(32)　2.3 向量空間与子空間(36)　2.4 矩陣和它的秩(43)　2.5 矩陣的初等变换(46)　2.6 矩陣代数(51)　2.7 方陣的乘法和逆方陣(53)

§3. 綫性代数方程組……………………………………………………59

3.1 非齐次方程組(59)　3.2 消去法(62)　3.3 齐次方程組(68)

§4. 綫性代数方程組的数值解法………………………………………72

4.1 高斯主元素法(73)　4.2 高斯緊凑方案(77)　4.3 逆矩陣的求法(81)　4.4 岩岩方案(82)

第二章　綫性規划

§1. 問題的提出……………………………………………………………85

§2. 表上作业法……………………………………………………………89

2.1 閉迴路的理論(91)　2.2 檢驗数(95)　2.3 独立与非独立未知数的互换(99)　2.4 表上作业法的具体步驟(101)　2.5 产銷不平衡的情形(107)

§3. 图上作业法……………………………………………………………108

§4. 一般綫性規划問題……………………………………………………115

4.1 一般綫性規划問題的标准化(115)　4.2 凸集法(117)　4.3 迭代法(121)

第三章　方程式論

§1. 多項式的因式与倍式…………………………………………………128

1.1 数域与数环(128)　1.2 多項式的概念(129)　1.3 多項式的运算及

其性质(130) 1.4 最高公因式(132) 1.5 多項式分解为不可約因式的积(136)
§2. 方程的一般性質……138
2.1 方程的根(多項式的零点)(138) 2.2 重根及其求法(139) 2.3 方程的变形(140) 2.4 根与系数的关系(142)
§3. 实数域上的多項式……143
3.1 实系数多項式(143) 3.2 实根計算的預备知識(144) 3.3 实根的界(147) 3.4 实根的近似計算(155) 3.5 林士諤-赵訪熊法(162) 3.6 罗伯契夫斯基法(165)
§4. 高次联立方程組……171
4.1 結式(171) 4.2 用消去法解联立方程組(176) 4.3 解高次方程組的牛頓法(178)

第四章 綫性空間与綫性变换

§1. 綫性空間……182
1.1 綫性空間的概念(182) 1.2 維数与底(185) 1.3 子空間(188) 1.4子空間的交与和(189) 1.5 綫性空間的同构(193)
§2. 綫性变换及其矩陣……195
2.1 綫性变换及其运算(195) 2.2 綫性变换的矩陣表示式(198) 2.3 秩的概念(203) 2.4 相似矩陣(205) 2.5 不变子空間(209)
§3. 特征多項式与最小多項式……211
3.1 綫性变换的多項式与最小多項式(211) 3.2 特征多項式及特征向量(214) 3.3 哈密頓-凱萊定理(218)

第五章 若当法式

§1. 多項式矩陣……222
1.1 多項式矩陣及其初等变换(222) 1.2 初等因式与不变因式(224)
§2. 若当法式及其求法……230
2.1 矩陣多項式的除法(231) 2.2 矩陣的若当法式(234)
§3. 特征根的近似計算……237
3.1 伯尼列夫斯基(238) 3.2 絕对值最大的特征根的求法(244) 3.3 克雷洛夫法(247)

第六章 二次齐式与欧几里德空間

§1. 实二次齐式在滿秩綫性变换下的标准式……252
1.1 二次齐式及其矩陣表达式(252) 1.2 化二次齐式为标准式(254) 1.3 慣性定理(257) 1.4 有定二次齐式(259)

2. 欧几里德空間与酉空間……262
2.1 欧氏空間的定义和例子(263) 2.2 向量的模和夹角(264) 2.3 正交性(268) 2.4 正交补空間与綫性方程組可解的几何意义(272) 2.5 欧氏空間的同构(275) 2.6 酉空間(276)
3. 正交变换群和酉变换群……278
3.1 正交变换的概念(278) 3.2 正交变换的特性(279) 3.3 正交方陣(280) 3.4 正交变换的几何意义(281) 3.5 酉变换与酉矩陣(282)
4. 实二次齐式在正交变换下的标准式……284
4.1 化二次齐式为标准式的正交变换的存在性(284) 4.2 正交变换的实际求法(288) 4.3 二次曲面在正交变换下的标准式(292) 4.4 同时化簡一对二次齐式(294) 4.5 厄尔密特二次齐式(296)

第一章　行列式与綫性方程組

§1. 行列式

我們在中学里已經知道怎样解两个未知数的一次方程組(今后改称綫性方程組，因为每一个一次方程在平面上代表一条直綫)：

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1, \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2. \end{cases} \tag{1}$$

例如可以用消去法消去变数 y 或 x 而得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x=b_1a_{22}-a_{12}b_2,$$

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})y=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

如果 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，則(1)的解可以写成

$$x=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad y=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \tag{2}$$

而且这組解是唯一的。

再看由具有三个未知数的三个綫性方程所組成的方程組：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3; \end{cases} \tag{3}$$

在后面两个方程中，暫时把 x_1 看成常数，利用公式(2)，从它們解出未知数 x_2 与 x_3，再代入前面一个方程，即得一个仅含未知数 x_1 的方程。解这个方程便得到 x_1 的表达式：

$$x_1=\frac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}. \tag{4}$$

容易看出这个表达式的結构。只要将分母中属于所要确定的

未知数 x_1 的所有系数 a_{i1} $(i=1,2,3)$ 分别换为常数项 b_i，便得分子。这样，只要研究分母的組成規律便可以了。

假定 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 是任意的九个数，把这九个数排成一个正方形，規定 a_{ij} 放在第 i 行第 j 列的位置，再用两条直綫段括起来，就得到一个三阶行列式，这九个数 a_{ij} 叫做行列式的元素。我們規定这个行列式的值为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}- \\ -a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}, \tag{5}$$

那末在上式右边不等于零的情况，(4)就可写成

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},$$

同理可得:

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},$$

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}.$$

本节的目的是要引伸三阶行列式的概念，使得上面所述的规律不但能用于解三个未知数的綫性方程組，而且也能用于解任意 n 个未知数的綫性方程組。

1.1 行列式的定义 現在研究三阶行列式的表达式 (5) 的結构。首先看出(5)中每一項是从每行每列(横排叫行，縱排叫列)各取出一个元素所組成的乘积，但任何一行和任何一列不会有两个元素出現在同一項內。換言之，每一个乘积都有下面的形式：

$$a_{1s_1}a_{2s_2}a_{3s_3}, \tag{6}$$

其中 s_1, s_2, s_3 是 1,2,3 的某种排列。(5)式的右边总共有六項，而 s_1, s_2, s_3 把 1,2,3 的一切可能的排列(共有以下 $3!=6$ 种)：

$$1,2,3;\ \ 2,3,1;\ \ 3,1,2; \tag{7_1}$$

$$1,3,2;\ \ 2,1,3;\ \ 3,2,1. \tag{7_2}$$

全都取到了。我們又发現，乘积(6)的第二行附标形成排列(7_1)之一时，相应的項带正号；而那些乘积的第二个附标形成排列(7_2)之一时，相应的項带負号。

我們来說明排列(7_1)与(7_2)的区别。假定 s_1, s_2, s_3 是 1, 2, 3 这些数的任一种排列(因此，在 $i\neq j$ 时 $s_i\neq s_j$)，如果当 $i<j$ 时 $s_i>s_j$，就說 s_i, s_j 构成一个反序。再用 $[s_1, s_2, s_3]$ 表示此排列中总共的反序数，其定义为

$$[s_1, s_2, s_3]=(s_1 \text{ 后面小于 } s_1 \text{ 的数碼的个数})+$$
$$+(s_2 \text{ 后面小于 } s_2 \text{ 的数碼的个数}),$$

容易看出，(7_1)中的排列各有偶数个反序(0 算作偶数！)，而(7_2)中的排列各有奇数个反序，于是(5)可縮写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{(s_1,s_2,s_3)} (-1)^{[s_1,s_2,s_3]} a_{1s_1}a_{2s_2}a_{3s_3}$$

这里 s_1, s_2, s_3 表示数碼 1,2,3 的一种排列，$\sum\limits_{(s_1 s_2 s_3)}$ 表示对 1, 2,3 的一切可能的排列求和。

发現这些規律后，便很容易将三阶行列式的概念推广到 n 阶行列式。仿照上面的办法，假定 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 这 n 个数的任一种排列，它的反序个数定义为

$$
\begin{aligned}
[s_1, s_2, \cdots, s_n] = &(s_1 \text{ 后面比 } s_1 \text{ 小的数碼的个数}) \\
&+(s_2 \text{ 后面比 } s_2 \text{ 小的数碼的个数}) \\
&+\cdots\cdots \\
&+(s_{n-1} \text{ 后面比 } s_{n-1} \text{ 小的数碼的个数})。
\end{aligned}
$$

定义 1 若排列 $s_1, \cdots, s_n$ 总共有奇数个反序，则它叫做一个奇排列，否则叫偶排列。

定理 1 在 n 个数碼 $1, 2, \cdots, n$ 的 $n!$ 个排列中，有一半是偶排列，另一半是奇排列。

証 設在 $1, 2 \cdots, n$ 的 $n!$ 个排列中，有 a 个奇排列，b 个偶排列，当然，$a+b=n!$，若 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ 是一个奇排列，把最前面两个数碼 s_1, s_2 的位置交換一下，則当 $s_1 > s_2$ 时

$$[s_2, s_1, s_3, \cdots, s_n] = [s_1, s_2, s_3, \cdots, s_n] - 1.$$

而于 $s_1 < s_2$ 时

$$[s_2, s_1, s_3, \cdots, s_n] = [s_1, s_2, s_3, \cdots, s_n] + 1.$$

按这样的方式从 a 个奇排列便可得到 a 个偶排列，并且由两个不同的奇排列所得到的两个偶排列也不相同，于是 $a \leqslant b$。同法可以証明 $b \leqslant a$，所以 $a=b$。

現在可以給行列式下定义了：

定义 2 假定 $a_{ij}\ (i, j=1, 2, 3, \cdots, n)$ 是任意 n^2 个数，把这 n^2 个数排成一个正方形，規定 a_{ij} 放在第 i 行第 j 列的位置，再用两条直綫段括起来就得到一个 n 阶行列式，它的值定义为

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{(s_1,s_2,\cdots,s_n)}(-1)^{(s_1,\cdots,s_n)}a_{1s_1}a_{2s_2}\cdots a_{ns_n}, \quad (8)$$

这里 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ 是数碼 $1, 2, \cdots, n$ 的一种排列，$\sum\limits_{(s_1,\cdots,s_n)}$ 表示对 $1, 2, \cdots, n$ 的一切可能的排列求和。

式(8)的右边称为 D 的展开式，根据定理 1，此展开式内有 $\frac{n!}{2}$ 項前面取正号，另 $\frac{n!}{2}$ 項前面取負号。行列式 D 中的 a_{ij} 称为 D 的元素(或簡称元)，有时为簡便計，我們用符号 $|a_{ij}|$ 来表示这个行列式，但讀者应該特别注意，不要与絕对值的符号弄混了。

根据行列式的定义，可以証明，将行列式 D 的行与列依次互换，所得的新行列式 D' 与 D 具有相同的展式，因而 $D'=D$。这个 D' 称为 D 的轉置行列式。我們有

定理 2

$$D'=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=D.$$

証 由定义

$$D=\sum_{(s_1,\cdots,s_n)}(-1)^{(s_1,\cdots,s_n)}a_{1s_1}a_{2s_2}\cdots a_{ns_n}; \quad (8)$$

$$D'=\sum_{(t_1,\cdots,t_n)}(-1)^{(t_1,\cdots,t_n)}a_{t_11}a_{t_22}\cdots a_{t_nn}. \quad (9)$$

現在把 (9) 式右边的一般項 $a_{t_11}a_{t_22}\cdots a_{t_nn}$ 改写成 $a_{1r_1}a_{2r_2}\cdots a_{nr_n}$，这只須改变其中各因子的順序就够了。如果 $t_i=1$，我們就把 a_{t_ii} 依次移到最前面，使成为 a_{1r_1}(于是 $r_1=i$)。这时，第一行附标的反序个数由

$$[t_1, t_2, \cdots, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, \cdots, t_n]$$

变为 $$[t_i, t_1, \cdots, t_{i-2}, t_{i-1}, t_{i+1}, \cdots, t_n],$$

因而反序减少了 $i-1$ 个,同时第二个附标的排列由

$1, 2, \cdots, i-1, i, i+1, \cdots, n$ 变为 $i, 1, 2, \cdots, i-1, i+1, \cdots, n$,于是反序增加了 $i-1$ 个, 恰好等于剛才第一个附标所减少的个数。再把

$$a_{1r_1}\cdots a_{t_n n}$$

內的 a_{2r_2} 移到第二位, a_{3r_3} 移到第三位, …, 也有同样的結果; 因此,把 $a_{t_1 1}a_{t_2 2}\cdots a_{t_n n}$ 重排为 $a_{1r_1}a_{2r_2}\cdots a_{nr_n}$ 时,第二个附标排列的反序个数增加的値等于第一个附标排列的反序个数减少的値, 但第一个附标是由排列 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 改排成 $1, 2, \cdots, n$; 而第二个附标是由排列 $1, 2, \cdots, n$ 改排成 $r_1, r_2, \cdots, r_n$; 所以

$$[t_1, t_2, \cdots, t_n] = [r_1, r_2, \cdots, r_n].$$

当然 $r_1, r_2, \cdots r_n$ 也是 $1, 2, \cdots, n$ 的一种排列。容易看出式(9)右方的两个不同的項 $a_{t_1 1}\cdots a_{t_n n}$ 和 $a_{t'_1 1}\cdots a_{t'_n n}$ 不会变成同一个 $a_{1r_1}\cdots a_{nr_n}$。因此当 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 取 $1, 2, \cdots, n$ 的一切可能的排列时, 相应地也就使 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 取 n 个数碼的一切可能排列, 于是

$$D' = \sum_{(t_1, \cdots, t_n)} (-1)^{[t_1, \cdots, t_n]} a_{t_1 1}\cdots a_{t_n n} =$$
$$= \sum_{(r_1, \cdots, r_n)} (-1)^{[r_1, \cdots, r_n]} a_{1r_1}\cdots a_{nr_n} = D.$$

有了这条定理,就一个行列式的値而言,行和列处在同等的地位,对行成立的定理, 对列也同样成立, 因此在下面証明行列式的基本性質时,只要証明它对行成立就够了。

定理 3　行列式的任意两行(列)互相交换后,行列式只改变符号,而絕对値不变。

証　先証相邻两行互换后行列式只改变符号,把行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}\cdots\cdots a_{in} \\ a_{i+1,1}\cdots\cdots a_{i+1,n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

的第 i 行和第 $i+1$ 行互换后，得到行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i+1,1}\cdots\cdots a_{i+1,n} \\ a_{i1}\cdots\cdots a_{in} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 $$D_1=\sum_{(s_1,\cdots,s_n)}(-1)^{[s_1,\cdots,s_{i-1},s_i,s_{i+1},s_{i+2},\cdots,s_n]}a_{1s_1}\cdots$$

$$\cdots a_{i+1s_i}a_{is_{i+1}}\cdots a_{ns_n}=$$

$$=\sum_{(s_1,\cdots,s_n)}(-1)^{[s_1,\cdots,s_{i-1},s_{i+1},s_i,s_{i+2},\cdots,s_n]}a_{1s_1}\cdots$$

$$\cdots a_{is_i}a_{i+1s_{i+1}}\cdots a_{ns_n}.$$

由于

$$[s_1,\cdots,s_{i-1},s_{i+1},s_i,\cdots,s_n]=[s_1,\cdots,s_{i-1},s_i,s_{i+1},\cdots,s_n]\pm 1,$$

所以

$$D_1=-\sum_{(s_1,\cdots,s_n)}(-1)^{[s_1,\cdots,s_n]}a_{1s_1}\cdots a_{ns_n}=-D.$$

现在再考虑不相邻的两行互换的情况。假定交换第 i 行与第 $i+k$ 行，这种交换的结果也可以通过 $2k-1$ 次交换相邻的行来达

到。即，先託第 i 行与第 $i+1$ 行交换，然后託第 $i+1$ 行与 $i+2$ 行交换，……，第 $i+k-1$ 行与第 $i+k$ 行交换。这时，原来的第 i 行已經换到第 $i+k$ 行上了。現在再託第 $i+k-1$ 行与第 $i+k-2$ 行交换，然后託第 $i+k-2$ 行与 $i+k-3$ 行交换，……，第 $i+1$ 行与第 i 行交换。于是，原来的第 $i+k$ 行换到第 i 行上。所述的 $2k-1$ 次相邻两行交换的結果，事实上就是把第 i 行与第 $i+k$ 行交换，而夹在它們之間的各行保持不动。每交换一次就改一次号，交换 $2k-1$ 次应該改 $2k-1$ 次号，因为 $2k-1$ 是奇数，所以实际上只改了一次号。

1.2 行列式的子式·代数余子式 为了計算行列式之值，还須引入行列式的子式和代数余子式的概念。自 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

中任意划去 k 行和 k 列后，剩下来的元素按原来的次序排列成为一个 $n-k$ 阶的行列式 M。另一方面，位于划去的行列相交之点的元素全体則成一 k 阶行列式 N。我們称 M 是 N 的余子式，而 M, N 分别称为 D 的 $n-k$ 阶和 k 阶子式。显然可見，N 也是 M 的余子式。設划去的 k 行是 D 的第 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 行，划去的 k 列是 D 的 $j_1, j_2, \cdots, j_k$ 列，則

$$(-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k}M=(-1)^m M$$

称为 N 在 D 中的代数余子式。显然可見，$(-1)^m N$ 是 M 在 D 中的代数余子式。特別，当划去元素 a_{ij} 所在的行和列以后，我們得到 a_{ij} 的余子式是 $n-1$ 阶行列式，以后記成 M_{ij}，而 a_{ij} 的代数余子式是

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

例 在

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中划去二行，三行，二列，四列，便得二阶子式

$$M=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix},$$

而M的余子式是

$$N=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix},$$

M的代数余子式是

$$(-1)^{2+3+2+4}N=-N.$$

现在来証明一个很重要的定理，即

定理 4 在行列式 D 的展开式中含有元素 a_{ij} 的一切項之和等于 $a_{ij}A_{ij}$。

証 先考慮 $i=j=1$ 的情况，在D的展开式(8)中含有 a_{11} 的一切項之和可写成

$$a_{11}\sum_{(s_2,\cdots,s_n)}(-1)^{[1,s_2,\cdots,s_n]}a_{2s_2}\cdots\cdots a_{ns_n},$$

这里 $s_2,\cdots\cdots,s_n$ 是数碼 $2, 3, \cdots\cdots, n$ 的一种排列，$\sum\limits_{(s_2,\cdots,s_n)}$ 表示对所有这样的排列求和。显然

$$[1, s_2, \cdots\cdots, s_n]=[s_2, \cdots\cdots, s_n].$$

于是 a_{11} 的系数为

$$\sum_{(s_2,\cdots,s_n)}(-1)^{[s_2,\cdots,s_n]}a_{2s_2}\cdots a_{ns_n}=M_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=A_{11}.$$