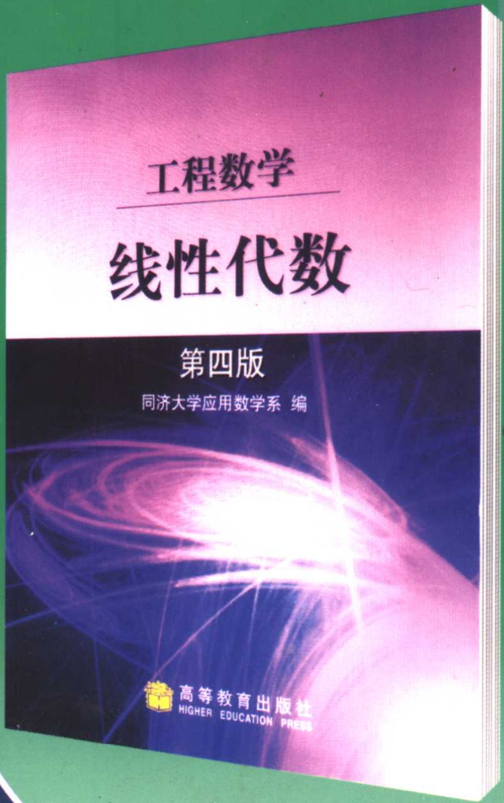
高等学校优秀教材辅导丛书
GAO DENG XUE XIAO YOU XIU JIAO CAI FU DAO CONG SHU

主编 母丽华 徐晶

线性代数
知识要点与习题解析



哈尔滨工程大学出版社

高等学校优秀教材辅导丛书

线性代数
知识要点与习题解析

（配同济大学第四版教材·高教版）

主　编　母丽华　徐　晶
主　审　王　锋

哈尔滨工程大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数知识要点与习题解析/母丽华,徐晶主编.
哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2005
ISBN 7-81073-701-5

Ⅰ.线… Ⅱ.①母…②徐… Ⅲ.线性代数-高等
学校-教学参考资料 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 057055 号

内 容 简 介

本书内容主要包括:行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵及二次型、线性空间与线性变换共六章。每章均由知识要点、书后习题解析、同步训练题及其解答构成。

本书是与同济大学应用数学系编写的《线性代数》(第四版)教材配套使用的,除可供非数学专业的理工科本科生使用外,也可供报考非数学专业硕士研究生的考生复习时使用。

哈尔滨工程大学出版社出版发行
哈尔滨市南通大街145号 哈尔滨工程大学11号楼
发行部电话:(0451)82519328 邮编:150001
新华书店经销
黑龙江省教育厅印刷厂印刷

*

开本 787mm×960mm 1/16 印张 12.25 字数 224 千字
2005年7月第1版 2005年7月第1次印刷
印数:1—3 000册
定价:16.00元

前言

线性代数是工科数学的重要组成部分,是理工科学生学习其他课程的基础,也是许多专业研究生入学考试的必考科目。为了帮助广大学生扎实掌握线性代数的知识要点,提高解题能力,我们精心编写了这本书。本书与同济大学应用数学系编写的《线性代数》(第四版)教材同步。在编写过程中,由于编者精选同步训练题,归纳每类题的特点,详细介绍解题方法,因此可以说本书是一本简捷、易懂的教学辅导书。

本书共分六章,分别是:第 1 章行列式;第 2 章矩阵及其运算;第 3 章矩阵的初等变换与线性方程组;第 4 章向量组的线性相关性;第 5 章相似矩阵及二次型;第 6 章线性空间与线性变换。每章又分知识要点、书后习题解析、同步训练题三个部分。

全书由母丽华、徐晶担任主编,由哈尔滨工程大学理学院王锋担任主审。

由于作者水平所限,本书不足、疏漏之处难免,恳请读者批评指正。

编　者

2005 年 7 月

Contents

目录

第1章 行列式

知识要点

1. 了解行列式的定义和性质；
2. 掌握二阶与三阶行列式的计算方法；
3. 会计算简单的 n 阶行列式；
4. 掌握克莱姆法则.

其中，重点是二阶与三阶行列式的计算法和克莱姆法则；难点是 n 阶行列式的计算.

1.1 n 阶行列式的定义

1.1.1 全排列和逆序

把 n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 个元素的全排列（简称排列）.

n 个不同元素的所有排列的种数用 P_n 表示. n 元排列的种数有 $P_n = n!$ 个. 在 n 元排列中，只有排列 $123\cdots n$ 特殊，它是按数的大小次序，由小到大从前往后排列的，称它为标准次序. 其他任何一个 n 元排列都一定出现较小的数 i 排在大数 j 之后的情形，这时称 i 与 j 构成排列的一个逆序. 一个排列中所有逆序的总和称为这个排列的逆序数.

计算排列的逆序数的方法：

设 n 个元素为 1 至 n 这 n 个自然数，设 $p_1p_2\cdots p_n$ 为这 n 个自然数的一个排列，考虑元素 $p_i(i = 1,2,\cdots,n)$，如果比 p_i 大的且排在 p_i 前面的元素有 t_i 个，就说 p_i 这个元素的逆序数是 t_i，全体元素的逆序数总和

$$t = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{i=1}^{n} t_i$$

称为这个排列的逆序数.

逆序数为奇数的排列叫做奇排列,逆序数为偶数的排列叫做偶排列.

在排列中,将任意两个元素对调,其余的元素不动,这种做出新排列的过程叫做对换.将相邻两个元素对调,叫做相邻对换.

对换改变排列的奇偶性.奇排列调成标准排列的对换次数为奇数,偶排列调成标准排列的对换次数为偶数.

1.1.2 n 阶行列式的定义

定义 设有 n^2 个数,排成 n 行 n 列的表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

做出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积,并冠以符号 $(-1)^t$,得到形如

$$(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

的项,其中 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,t 为这个排列的逆序数.由于这样的排列共有 $n!$ 个,把这 $n!$ 项的代数和称为 n 阶行列式,即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

简记作 $\det(a_{ij})$,数 a_{ij} 称为行列式 D 的元素.

1.2 行列式的性质与计算

1.2.1 行列式的性质

性质 1 行列式与它的转置行列式相等.

由此性质可知,行列式中的行与列具有同等的地位.凡是对行成立的行列式的性质对列也同样成立,反之亦然.

性质 2 互换行列式的两行(列),行列式变号.

推论 如果行列式有两行(列)完全相同,则此行列式的值为零.

性质 3 行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k,等于用数 k 乘此

行列式.

推论 行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

性质4 行列式中如果有两行(列)元素成比例,则此行列式为零.

性质5 如果行列式中某列(行)中各元素均为两项之和,即 $a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}(i=1,2,\cdots,n)$,则行列式等于两个行列式之和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j}+c_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2j}+c_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj}+c_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & c_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & c_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质6 把行列式的某一列(行)的各元素乘以同一数然后加到另一列(行)对应的元素上去,行列式不变.

在 n 阶行列式中,把元素 a_{ij} 所在的第i行和第j列划去后,留下来的 $n-1$ 阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij}, $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

性质7 行列式的值等于任一行(列)的所有元素分别与它们所对应的代数余子式的乘积之和.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$$

$$= a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$$

$$(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$$

性质8 行列式的任何一行(列)的元素,与另一行(列)的对应元素的代数余子式的乘积之和必为零,即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \quad (i\neq j)$$

或

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0 \quad (i \neq j)$$

我们可以利用行列式的性质简化行列式的计算.为了以后计算方便,我们引用以下符号:

(1) 以 r_i 表示行列式的第 i 行,以 c_i 表示第 i 列;交换 i,j 两行记作 $r_i \leftrightarrow r_j$,交换 i,j 两列记作 $c_i \leftrightarrow c_j$;

(2) 第 i 行(或列)乘以 k,记作 $r_i \times k$(或 $c_i \times k$);

(3) 第 i 行(或列)提出公因子 k,记作 $r_i \div k$(或 $c_i \div k$);

(4) 用 k 乘以第 j 行(或列)加到第 i 行(或列)上,记作 $r_i + kr_j$(或 $c_i + kc_j$).

1.2.2 行列式的计算

(1) 用对角线法则计算行列式,它只适用于二阶与三阶行列式.

(2) 用 n 阶行列式的定义计算行列式.显然有:

上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

对角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

另外

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{(n-1)2}a_{n1}$$

(3) 利用行列式的性质计算行列式.

(4) 利用行列式按某一行(列) 展开定理计算 n 阶行列式.

(5) 利用数学归纳法计算行列式.

(6) 利用递推公式计算 n 阶行列式.

(7) 利用范德蒙德行列式的结论计算特殊的行列式.

(8) 利用升阶(加边) 法计算 n 阶行列式.

(9) 化三角形法计算 n 阶行列式.

在实际计算中,常常根据行列式的具体特点,采用相应的方法(有时是几种方法结合使用).

1.3 拉普拉斯定理

1.3.1 拉普拉斯展开定理

定理 在 n 阶行列式 D 中,任意取出 $k(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ 行,由这 k 行元素所组成的一切 k 级余子式(共有 C_n^k 个,简记为 $t = C_n^k$) 与它们的代数余子式的乘积的和等于行列式 D.

$$D = M_1A_1 + M_2A_2 + \cdots + M_tA_t = \sum_{i=1}^{t} M_iA_i$$

1.3.2 利用拉普拉斯展开的两个特殊情形

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{vmatrix} = (-1)^{mn} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

1.4 克莱姆法则

1.4.1 非齐次线性方程组

如果非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式不等于0,即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

那么,方程组有惟一解.其为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

其中,$D_j(j = 1,2,\cdots,n)$是把系数行列式D中第j列的元素用方程组右端的自由项代替后所得的n阶行列式,即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & b_1 & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(j-1)} & b_2 & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(j-1)} & b_n & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

克莱姆法则可叙述为:

(1) 如果非齐次线性方程组的系数行列式$D \neq 0$,则此方程组一定有解,且解惟一;

(2) 如果非齐次线性方程组无解或有两个不同的解,则它的系数行列式必为零.

1.4.2　齐次线性方程组

如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数行列式 $D \neq 0$,则齐次线性方程组只有零解.若系数行列式 $D = 0$,那么方程组有非零解.两个结论反之也成立.

书后习题解析

1.利用对角线法则计算下列三阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$;　(2) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$;　(4) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

解　(1) $D = 2\times(-4)\times3 + 1\times8\times1 + 0\times(-1)\times(-1)$

$$-1\times(-4)\times(-1) - 0\times1\times3 - 2\times8\times(-1) = -4;$$

(2) $D = acb + bac + bac - c^3 - b^3 - a^3 = 3abc - a^3 - b^3 - c^3$;

(3) $D = bc^2 + ab^2 + a^2c - a^2b - b^2c - ac^2 = (a-b)(b-c)(c-a)$;

(4) $D = x(x+y)y + xy(x+y) + (x+y)xy - (x+y)^3 - y^3 - x^3$

$$= -2(x^3 + y^3).$$

2.按自然数从小到大为标准次序,求下列各排列的逆序数.

(1)1 2 3 4;(2)4 1 3 2;(3)3 4 2 1;(4)2 4 1 3;(5)$1\ 3\ \cdots\ (2n-1)2\ 4\ \cdots\ (2n)$;(6)$1\ 3\ \cdots\ (2n-1)(2n)(2n-2)\ \cdots\ 2$.

解　(1) 此排列为标准排列,逆序数为0;

(2) 此排列 4 的逆序数为 0,1 的逆序数为 1,3 的逆序数为 1,2 的逆序数为 2,所以此排列的逆序数为 $0+1+1+2=4$;

(3) 因为 3 的逆序数为 0,4 的逆序数为 0,2 的逆序数为 2,1 的逆序数为 3,所以此排列的逆序数为 $0+0+2+3=5$;

(4) 因为 2 的逆序数 0,4 的逆序数为 0,1 的逆序数为 2,3 的逆序数为 1,所以此排列的逆序数为 $0+0+2+1=3$;

(5) 因为前 n 个数的逆序数为 0,后 n 个数的逆序数分别为 $(n-1),(n-2),\cdots,1,0$,所以此排列的逆序数为 $(n-1)+(n-2)+\cdots+1+0=\dfrac{n(n-1)}{2}$;

(6) 因为前 n 个数的逆序数都为 0,后 n 个数的逆序数分别为 $0,2,4,\cdots,(2n-2)$,所以此排列的逆序数为 $0+2+4+\cdots+(2n-2)=n(n-1)$.

3.写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项.

解 四阶行列式 $D=\sum\limits_{j_1j_2j_3j_4}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$,其中 $j_1j_2j_3j_4$ 是 1,2,3,4 的一个排列,令 $j_1=1,j_2=3$,则 j_3j_4 分别是 2,4 的某些排列,于是含 $a_{11}a_{23}$ 的项有两项,分别为 $-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 和 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$.

4.计算下列各行列式.

(1) $\begin{vmatrix}4&1&2&4\\1&2&0&2\\10&5&2&0\\0&1&1&7\end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix}2&1&4&1\\3&-1&2&1\\1&2&3&2\\5&0&6&2\end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix}-ab&ac&ae\\bd&-cd&de\\bf&cf&-ef\end{vmatrix}$; (4) $\begin{vmatrix}a&1&0&0\\-1&b&1&0\\0&-1&c&1\\0&0&-1&d\end{vmatrix}$.

解 (1) $$\begin{vmatrix}4&1&2&4\\1&2&0&2\\10&5&2&0\\0&1&1&7\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-10r_2]{r_1-4r_2}\begin{vmatrix}0&-7&2&-4\\1&2&0&2\\0&-15&2&-20\\0&1&1&7\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第一列展开}}-\begin{vmatrix}-7&2&-4\\-15&2&-20\\1&1&7\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1}-\begin{vmatrix}-7&9&45\\-15&17&85\\1&0&0\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第三行展开}}-\begin{vmatrix}9&45\\17&85\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2-5c_1}-\begin{vmatrix}9&0\\17&0\end{vmatrix}=0$$

(2) $$\begin{vmatrix}2&1&4&1\\3&-1&2&1\\1&2&3&2\\5&0&6&2\end{vmatrix}\xlongequal{r_2+r_1}\begin{vmatrix}2&1&4&1\\5&0&6&2\\1&2&3&2\\5&0&6&2\end{vmatrix}\xlongequal{r_2=r_4}0$$

(3) $$\begin{vmatrix}-ab&ac&ae\\bd&-cd&de\\bf&cf&-ef\end{vmatrix}\xlongequal{\text{每行提取公因式}}adf\begin{vmatrix}-b&c&e\\b&-c&e\\b&c&-e\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{每列提取公因式}}abcdef\begin{vmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3+r_1]{r_2+r_1}abcdef\begin{vmatrix}-1&1&1\\0&0&2\\0&2&0\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第一列展开}}-abcdef\begin{vmatrix}0&2\\2&0\end{vmatrix}$$

$$=4abcdef$$

(4) $$\begin{vmatrix}a&1&0&0\\-1&b&1&0\\0&-1&c&1\\0&0&-1&d\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第一行展开}}a\begin{vmatrix}b&1&0\\-1&c&1\\0&-1&d\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-1&1&0\\0&c&1\\0&-1&d\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{第二项按第一列展开}]{\text{第一项按第一行展开}}ab\begin{vmatrix}c&1\\-1&d\end{vmatrix}-a\begin{vmatrix}-1&1\\0&d\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}c&1\\-1&d\end{vmatrix}=ab(cd+1)+ad+(cd+1)$$

$$=abcd+ab+cd+ad+1$$

5.证明：

(1) $$\begin{vmatrix}a^2&ab&b^2\\2a&a+b&2b\\1&1&1\end{vmatrix}=(a-b)^3;$$

(2) $$\begin{vmatrix}ax+by&ay+bz&az+bx\\ay+bz&az+bx&ax+by\\az+bx&ax+by&ay+bz\end{vmatrix}=(a^3+b^3)\begin{vmatrix}x&y&z\\y&z&x\\z&x&y\end{vmatrix};$$

(3) $$\begin{vmatrix}a^2&(a+1)^2&(a+2)^2&(a+3)^2\\b^2&(b+1)^2&(b+2)^2&(b+3)^2\\c^2&(c+1)^2&(c+2)^2&(c+3)^2\\d^2&(d+1)^2&(d+2)^2&(d+3)^2\end{vmatrix}=0;$$

(4) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

$$\cdot (a+b+c+d);$$

(5) $$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n .$$

证明 (1) 左边 $\overset{c_2 - c_1}{\underset{c_3 - c_1}{=\!=}} \begin{vmatrix} a^2 & a(b-a) & b^2 - a^2 \\ 2a & b-a & 2(b-a) \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$$\overset{\text{按第三行展开}}{=\!=} \begin{vmatrix} a(b-a) & (b+a)(b-a) \\ b-a & 2(b-a) \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{各行提公因子}}{=\!=} (b-a)^2 \begin{vmatrix} a & a+b \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)^2(a-b) = (a-b)^3 = \text{右边}$$

(2) 按行列式性质 左边 $= \begin{vmatrix} ax & ay+bz & az+bx \\ ay & az+bx & ax+by \\ az & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & ay+bz & az+bx \\ bz & az+bx & ax+by \\ bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} ax & ay & az+bx \\ ay & az & ax+by \\ az & ax & ay+bz \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ax & bz & az+bx \\ ay & bx & ax+by \\ az & by & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} by & ay & az+bx \\ bz & az & ax+by \\ bx & ax & ay+bz \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & bz & az+bx \\ bz & bx & ax+by \\ bx & by & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ax & ay & az \\ ay & az & ax \\ az & ax & ay \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ax & ay & bx \\ ay & az & by \\ az & ax & bz \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ax & bz & az \\ ay & bx & ax \\ az & by & ay \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} ax & bz & bx \\ ay & bx & by \\ az & by & bz \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & ay & az \\ bz & az & ax \\ bx & ax & ay \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & ay & bx \\ bz & az & by \\ bx & ax & bz \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} by & bz & az \\ bz & bx & ax \\ bx & by & ay \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & bz & bx \\ bz & bx & by \\ bx & by & bz \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{提取公因子}} a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0$$

$$+ b^3\begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix} = (a^3 + b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} = \text{右边}$$

(3) 左边 $\xlongequal[\substack{c_3 - c_1 \\ c_4 - c_1}]{c_2 - c_1} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4 - 3c_2]{c_3 - 2c_2} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 6 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 6 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 6 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 6 \end{vmatrix}$

$= 0 =$ 右边

(4) 左边 $\xlongequal[\substack{c_3 - c_1 \\ c_4 - c_1}]{c_2 - c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a & d-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ a^4 & b^4-a^4 & c^4-a^4 & d^4-a^4 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{\text{按第一行展开}} \begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ b^4-a^4 & c^4-a^4 & d^4-a^4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{各列提取公因子}} (b-a)(c-a)(d-a)$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+a & c+a & d+a \\ (b+a)(b^2+a^2) & (c+a)(c^2+a^2) & (d+a)(d^2+a^2) \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3 - c_1]{c_2 - c_1} (b-a)(c-a)(d-a)$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+a & c-b & d-b \\ (b+a)(b^2+a^2) & (c-b)(c^2+bc+b^2+a^2+ab+ac) & (d-b)(d^2+db+b^2+a^2+ab+ad) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c^2+bc+b^2+a^2+ab+ac & d^2+db+b^2+a^2+ab+ad \end{vmatrix}$$