高等学校教学用书

高等数学

GAODENG SHUXUE

（二）

第一卷 高等代数

初稿

南京大学数学天文学系编

人民教育出版社

高等学校教学用书

高等数学

GAODENG SHUXUE

(二)

第一卷 高等代数

初稿

南京大学数学天文学系编

人民教育出版社

高等数学(二)是南京大学数学天文学系在教学改革中集体編成的两部主要基础課程的新教材[高等数学(一)和高等数学(二)]中的一部。它是把以往的方程式論、綫代数、常微分方程、积分方程和数学物理方程等五門課程中有用的內容和若干新添的材料結合起来的一个有机整体。全书共分:高等代数,常微分方程与积分方程、数学物理方程等三卷。第一卷高等代数包括行列式与綫性代数方程組、綫性規划、方程式論、綫性空間与綫性变换、若当法式、二次齐式与酉空間等六章。在这一卷里除了給讀者提供一定程度的坚实理論基础,为以后各卷作好准备外,还包含許多数値方法和联系实际的內容,使讀者能由此获得初步解决与代数学有关的实际問題的能力。

本书可作为綜合大学数学、計算数学、力学等专业的教材。其他如物理、天文、气象等专业以及工科大学等均可参考。

簡装本說明

目前 850×1168 毫米規格紙張較少,本书暫以 787×1092 毫米規格紙張印刷,定价相应减少 20%。希鉴諒。

高 等 数 学

(二)

第一卷 高等代数

初 稿

南京大学数学天文学系編

人民教育出版社出版 高等学校教学用书編輯部 北京宣武門內承恩寺7号

(北京市书刊出版业营业許可証出字第2号)

北京京华印书局印装

北京科技发行所发行

各地新华书店經售

統一书号 13010·900 开本 787×1092 1/32 印張 10 26/16

字数 260,000 印数 00001—20,000 定价(5)半 0.86

1960 年11月第1版 1960 年11月北京第1次印刷

序言

自从国务院陆定一副总理在第二届第二次全国人民代表大会上做了"教学必须改革"的报告以来，南京大学数学天文学系的全体师生在党的领导下展开了轰轰烈烈的教学改革运动。由于大家解放了思想，明确了方向，打破了旧框框，消除了顾虑，同时采取了反复討論，虚实并举，以虚带实的工作方法，最后終于訂出新的教学計划和教学大綱，并且发动了广大师生，根据我国建設需要，以及总路綫和大跃进的精神，集体编写成功两部教材，高等数学(一)，(二)，向江苏省文教群英会和全国文教群英会献礼。

高等数学(二)是把以往的方程式論，綫代数，常微分方程，积分方程和数学物理方程等五門課程中的有用內容和若干新添进去的材料，有机地結合起来的一門新課程。通过这門課程可以使学生掌握方程的基本理論和解法。我們知道从生产实际，工程技术以及和数学有关的各門学科中常常会提出各种各样的方程来，一般說，遇到最多的是下列几种方程：代数方程，微分方程，差分方程和积分方程。就問題的性質来說，代数方程較微分方程、积分方程簡单。就同一类方程的解法来說，綫性方程較非綫性方程易解。因此本书在次序安排上就采取先簡后繁，先易后难的办法。这种办法事实上也符合于数学发展的历史过程和人們的認識过程。全书分为三卷，第一卷高等代数，以代数方程为中心；第二卷是常微分方程，差分方程，一阶偏微分方程和积分方程；第三卷是数学物理方程。在第一卷里，前半部讲綫性代数方程組，高次方程和高次方程組，綫性規划則作为綫性代数方程組理論的应用而加入。后半部讲綫代数的基本理論，这一部分教材一方面可以給前面已学过

的綫性方程組的理論以更深刻的解释，另一方面也为后面将要学习的微分方程提供必需的准备知識；因为当微分方程中不論是自变数或者未知函数的个数多于一个时，我們总得采取适当的变换把方程化成較簡单的标准形式，然后才便于求解。在第二卷里面先講綫性常微分方程和可积分的常微分方程，引出建立存在与唯一性定理的必要性；在集中介紹了这些定理以后，就用变换群的观点总結了前半部的內容，然后立刻轉向非綫性和不可积分的方程的研究。为了这个目的，我們介紹了定性方法，数值方法和解析方法，而在定性方法中較全面地添加了現代化的內容，以适合工程技术上的需要。积分方程篇幅不多，但希望能达到承上启下的目的。第三卷数学物理方程的安排方式亦大致与第二卷相类似，其在現代化方面主要表現于混合型方程和非綫性偏微分方程的添加。就联系实际这一点来說，与旧教材相比，我們在綫性代数方程組后面添加了綫性規划大意，在常微分方程部分添加了不少的振动理論和差分方程大意，在各类方程中皆添加了数値解法和許多联系实际的例題，以增强学生解决实际問題的能力。本书在理論上比以往的教材也有所提高，但有若干定理的証明予以适当的推迟或略去，例如代数学基本定理述而不証，留待高等数学(一)第二卷用复变数来証明；关于特征函数的展开定理在几个不同的地方都碰得到，但仍推到泛函分析中去証明；常微分方程的存在定理則集中在一起解决等等。我們認为这样做是符合多、快、好、省的精神的。就前后联系密切配合来說，我們初步做到了以下各点：1）特征值問題貫穿在整个課程之中，从代数方程到数学物理方程；2）振动問題貫穿在第二与第三卷之中；3）在常微分方程部分把綫性方程提前，在积分方程中先講退化核；这都是为了加强它們与第一卷綫代数的联系；4）把常微分方程边値問題和彈性体的振动問題作为积分方程的应用，以加强常微分方程、积分方程和数学物理方程

之間的联系。此外，对于如何与其他課程如高等数学(一)、物理学……等的配合問題我們也予以适当的安排和注意，以免产生重复或脫节的現象。

自然，这部教材还是刚刚編成，由于我們的思想水平和业务水平都还不高，其中一定会有許多考慮不周，照顧不够，安排不当，深淺不宜的地方，我們非常乐于接受来自各方面的批評和建議，以求将来把这部教材編写得更完善，更适合国家的需要，賜教請寄北京人民教育出版社高教用书編輯部轉。

南京大学数学天文学系

1960年5月

目　录

序　言

第一章　行列式与綫性代数方程組

第二章　綫性規划

第三章　方程式論

第四章 綫性空間与綫性变换

第五章 若当法式

第六章 二次齐式与酉空間

第一章 行列式与綫性代数方程組

§1 行列式

我們在中學里已經知道怎样解两个未知数的一次方程組（今后改称綫性方程組。在高等数学(一)中讀者不久就会看到，下面的每一个方程代表一条直綫，这就是"綫性"两字的来由。）：

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1, \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2。\end{cases} \tag{1}$$

例如，可以用消去法消去变数 y 或 x 而得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x=b_1a_{22}-a_{12}b_2,$$

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})y=a_{11}b_2-b_1a_{21}。$$

因此，如果 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，則(1)的解可以写成

$$x=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \quad y=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}; \tag{2}$$

而且这組解是唯一的，这样，以后凡遇形如(1)的方程組，我們都可以利用公式(2)来直接算出它的解，而不必每次都做一遍消去法了。但公式(2)并不是很容易記忆的。为了更好地帮助我們記忆这两个公式，可以采用行列式的記号。

假定 a, b, c, d 是任意的四个数，把这四个数排成一个正方形，再用两条直綫括起来，就得到一个行列式：

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

严格地說，这个行列式应該叫做一个"二阶行列式"，因为它有两行和两列（横排叫行，纵排叫列）。这个行列式中的四个数 a, b, c, d 叫做它的元素（或簡称元），我們規定

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc, \tag{3}$$

即，二阶行列式的值是它的左上角元素乘右下角元素所得之积，减去右上角元素乘左下角元素所得之积，式子 $ad-bc$ 叫做行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 的完全展式（或简称展式）。如果两个行列式的值相等，我們就說这两个行列式相等（不管它們的元素之間有什么关系）。

利用行列式的記号，公式(2)就可写成

$$x=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{4}$$

我們看到，(2)式中的分子与分母事实上都是行列式，它們的分母是由方程(1)的系数按原来的位置所排成的行列式，而分子是把相应的系数换成(1)式右方的常数后所得的行列式，这样一来，如果記得行列式的定义，公式(2)就容易記忆了。

本节的目的是要引伸二阶行列式的概念，使得上面所述的規律不但能用于解两个未知数的綫性方程組，而且也能用于解任何 n 个未知数的綫性方程組。

1.1 行列式的定义——递归式的定义 在三元綫性方程組

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{5}$$

的情况，求解的步驟比二元綫性方程組(2)麻煩得多，可是我們仍然能够用消去法求出解来。（詳細計算从略，下面只写結果）。

如果規定三阶行列式的值为

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3c_2b_1-c_1b_2a_3-$$

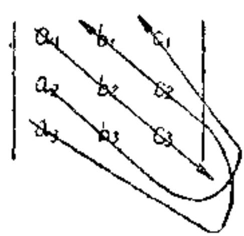
$$-c_2b_3a_1-c_3a_2b_1$$

那末在上式右边不等于零的情况，(5)的解就可写成

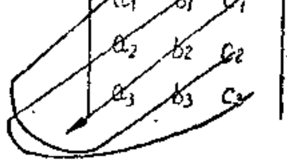
$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},\quad x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}.$$

我們看到，这个解在形式上与(4)很相象，它們的分母也是原来方程組的系数所排成的行列式，而分子則是把分母的行列式中，有关的列换成方程(5)右方的常数后所得的行列式。

注意，一个三阶行列式的展式一共有 $3!=6$ 項，每一項都是三个数之积。各項的符号可以用两个图来表示，在下图每条綫上的三个数之积取正号；



而下图每条綫上三个数之积取負号。



于是所述的三阶行列式的值就是这六項的代数和。

此外，一个三阶行列式还可写成三个二阶行列式乘上适当的数所得之积的代数和。就是，容易驗証，

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

由此，我們給出行列式的值的定义如下：(按第一行展开)

1) 一阶行列式 $|a_{11}| = a_{11}$ (注意，这里不是絕对值的記号而是行列式的記号)，

2) 二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，

3) 三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

4) n 阶行列式①

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} - \cdots$$

$$+ (-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j} + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n}$$

这里的 M_{11} 是从 D 中划去第一行第一列后所得的 $n-1$ 阶行列式，M_{12} 是 D 中划去第一行第二列后所得的 $n-1$ 阶行列式，其余仿此类推。用归納法不难証明一个 n 阶行列式的完全展式一共有 $n!$ 項。

1.2 行列式的子式，代数余子式，按行或按列展开　在 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

① 以后有时也簡記为 $D = |a_{ij}|$.

中任意划去 k 行和 k 行后，剩下来的元素按原来的次序排列成为一个 $n-k$ 阶的行列式 M。另一方面，位于划去的行列相交之点的元素全体则成一 k 阶行列式 N。我們称 M 是 N 的余子式，而 M, N 分别称为 D 的 $n-k$ 阶和 k 阶子式。显然可見，N 也是 M 的余子式。設划去的 k 行是 D 的第 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 行，划去的 k 列是 D 的 $j_1, j_2, \cdots, j_k$ 列，則

$$(-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1\cdots+j_k}M=(-1)^m M$$

称为 N 在 D 中的代数余子式，显然可見，$(-1)^m N$ 是 M 在 D 中的代数余子式。特别，当划去元素 a_{ij} 所在的行和列以后，我們得到 a_{ij} 的余子式是 $n-1$ 阶行列式，以后記成 M_{ij}，而 a_{ij} 的代数余子式是

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

例 在

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中划去二行，三行，二列，四列，便得二阶子式

$$M=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix},$$

而 M 的余子式是

$$N=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix},$$

M 的代数余子式是

$$(-1)^{2+3+2+4}N=-N.$$

回到 §1.1 的行列式的定义，可写

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12},\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n},$$

就是說，行列式等于第一行的諸元素与它們的代数余子式的乘积之和，这叫做行列式按第一行展开的展式。由下面的定理可以看出，要計算行列式的值可以把它按任意一行展开。

定理 1 n 阶行列式等于它的任一行的諸元素与它們的代数余子式的乘积之和。

証 （用数学归納法）本定理对二阶行列式显然正确；因为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=$$

$$=a_{21}(-a_{12})+a_{22}(a_{11})=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}.$$

今設本定理对 $n-1$ 阶行列式正确，要証明它对 n 阶行列式也正确。

設 $D=|a_{ij}|$ 是一个 n 阶行列式。为簡便計，我們以 $M_1, M_2, \cdots, M_n$，来表示 D 中 $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}$ 的余子式而以 $N_1, N_2, \cdots, N_n$ 表 D 中 $a_{k1}, \cdots, a_{kn}$ 的余子式($k>1$)，因此 M_j, N_j 都是 $n-1$ 阶的行列式。由行列式的定义，

$$D=a_{11}M_1-a_{12}M_2+a_{13}M_3-\cdots+(-1)^{n+1}a_{1n}M_n \qquad (6)$$

我們要証明，D 也等于

$$(-1)^{k+1}a_{k1}N_1+(-1)^{k+2}a_{k2}N_2+\cdots+(-1)^{k+n}a_{kn}N_n. \qquad (7)$$

注意，如果把(6)与(7)中的一切 $n-1$ 阶行列式都展开后，(6)与(7)就都是 $n!$ 項之和；已知每一項都是 n 个数的乘积，因此，要証

明(6)等于(7)，只需証明，这两个展式中的各項对应地相等就行了。更具体地說，我們要証明(7)的展式中，一切含 a_{11} 的項合起来应該正好等于 $(-1)^{1+j}M_j$。

我們先看含 a_{11} 的項。显然，N_1 中不含 a_{11}；对于 $j>1$，

$$N_j=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots\cdots a_{1j-1} & a_{1j+1}\cdots\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k-1,1}\cdots a_{k-1,j-1} & a_{k-1,j+1}\cdots a_{k-1,n} \\ a_{k+1,1}\cdots a_{k+1,j-1} & a_{k+1,j+1}\cdots a_{k+1,n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots\cdots a_{nj-1} & a_{nj+1}\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

按第一行展开得到：

$$N_j=a_{11}D_{j1}-a_{12}D_{j2}+\cdots$$

这里

$$D_{j1}=\begin{vmatrix} a_{22}\cdots\cdots a_{2,j-1} & a_{2,j+1}\cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k-1,2}\cdots a_{k-1,j-1} & a_{k-1,j+1}\cdots a_{k-1,n} \\ a_{k+1,2}\cdots a_{k+1,j-1} & a_{k+1,j+1}\cdots a_{k+1,n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n2}\cdots\cdots a_{n,j-1} & a_{n,j+1}\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

于是(7)中一切含 a_{11} 的項可归納成

$$a_{11}((-1)^{k+2}a_{k2}D_{21}+\cdots+(-1)^{k+n}a_{kn}D_{n1}) \tag{8}$$

再把 M_1 按第 $k-1$ 行展开，得到：

$$M_1=\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \\ a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{k-1+2-1}a_{k2}\begin{vmatrix} a_{23}\cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{k-1,3}\cdots a_{k-1,n} \\ \\ a_{k+1,3}\cdots a_{k+1,n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n3}\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{k-1+3-1}a_{k3}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k-1,2} & a_{k-1,4} & \cdots & a_{k-1,n} \\ a_{k+1,2} & a_{k+1,4} & \cdots & a_{k+1,n} \\ a_{n2} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots$$

$$+(-1)^{k-1+n-1}a_{kn}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k-1,2} & a_{k-1,3} & \cdots & a_{k-1,n-1} \\ a_{k+1,2} & a_{k+1,3} & \cdots & a_{k+1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}=$$

$$=(-1)^{k+2}a_{k2}D_{21}+\cdots+(-1)^{k+n}a_{kn}D_{n1}$$

这与(8)式括号內的表示式是一致的。因此(6)与(7)的完全展式中，一切含 a_{11} 的項是对应地相等的。同理可証两个展式中一切含 $a_{12},a_{13},\cdots,a_{1n}$ 的項也都对应地相等，所以(6)等于(7)。定理 1 証毕。

我們已經解决了按任一行来展开行列式的問題，下面要討論按任一列来展开的問題。在討論按任一列展开以前，需要轉置行列式的概念。

定义　設

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是一个 n 阶行列式，則

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$