

高等学校教学用书

# 高等数学

GAODENG SHUXUE

(二)

第一卷 高等代数

初稿

南京大学数学天文学系編

人民教育出版社

高等学校教学用书



高 等 数 学

GAODENG SHUXUE

(二)

第一卷 高等代数

初 稿

南京大学数学天文学系编

人民教育出版社

高等数学(二)是南京大学数学天文学系在教学改革中集体編成的两部主要基础課程的新教材[高等数学(一)和高等数学(二)]中的一部。它是把以往的方程式論、綫代数、常微分方程、积分方程和数学物理方程等五門課程中有用的内容和若干新添的材料結合起来的一个有机整体。全书共分:高等代数、常微分方程与积分方程、数学物理方程等三卷。第一卷高等代数包括行列式与綫性代数方程組、綫性规划、方程式論、綫性空間与綫性变换、若当法式、二次齐式与酉空間等六章。在这一卷里除了給讀者提供一定程度的坚实理論基础,为以后各卷作好准备外,还包含許多数值方法和联系实际的内容,使讀者能由此获得初步解决与代数学有关的实际問題的能力。

本书可作为綜合大学数学、計算数学、力学等专业的教材。其他如物理、天文、气象等专业以及工科大学等均可参考。

## 簡 裝 本 說 明

目前 850×1168 毫米規格紙張較少,本书暫以 787×1092 毫米規格紙張印刷,定价相应减少 20%。希諒察。

## 高 等 数 学

(二)

第一卷 高等代数

初 稿

---

南京大学数学天文学系編

人民教育出版社出版 高等数学数学用書編輯部  
北京宣武門內大街27号

(北京市書刊出版业登記許可證出字第2号)

北京京華印書局印裝

北京科技發行所發行

各地新华书店經售

---

統一書号 13010·900 开本 787×1092<sup>1/16</sup> 印張 10<sup>45</sup>/<sub>16</sub>  
字數 280,000 印數 00001—20,000 定價(5) 0.86  
1960年11月第1版 1960年12月北京第1次印刷

## 序 言

自从国务院陆定一副总理在第二届第二次全国人民代表大会上做了“教学必须改革”的报告以来，南京大学数学天文学系的全体师生在党的领导下展开了轰轰烈烈的教学改革运动。由于大家解放了思想，明确了方向，打破了旧框框，消除了顾虑，同时采取了反复讨论，虚实并举，以虚带实的工作方法，最后终于订出新的教学计划和教学大纲，并且发动了广大师生，根据我国建设需要，以及总路线和大跃进的精神，集体编写成功两部教材，高等数学(一)，(二)，向江苏省文教群英会和全国文教群英会献礼。

高等数学(二)是把以往的方程式论，线代数，常微分方程，积分方程和数学物理方程等五门课程中的有用内容和若干新添进去的材料，有机地结合起来的一门新课程。通过这门课程可以使學生掌握方程的基本理论和解法。我們知道从生产实际，工程技术以及和数学有关的各门学科中常常会提出各种各样的方程来，一般說，遇到最多的是下列几种方程：代数方程，微分方程，差分方程和积分方程。就问题的性质来说，代数方程较微分方程、积分方程简单。就同一类方程的解法来说，线性方程较非线性方程易解。因此本书在次序安排上就采取先简后繁，先易后难的办法。这种办法事实上也符合于数学发展的历史过程和人们的认识过程。全书分为三卷，第一卷高等代数，以代数方程为中心；第二卷是常微分方程，差分方程，一阶偏微分方程和积分方程；第三卷是数学物理方程。在第一卷里，前半部讲线性代数方程组，高次方程和高次方程组，线性规划则作为线性代数方程组理论的应用而加入。后半部讲线代数的基本理论。这一部分教材一方面可以給前面已学过

的綫性方程組的理論以更深刻的解釋，另一方面也為後面將要學習的微分方程提供必需的準備知識；因為當微分方程中不論是自變數或者未知函數的個數多於一個時，我們總得採取適當的變換把方程化成較簡單的标准形式，然後才便於求解。在第二卷裏面先講綫性常微分方程和可積分的常微分方程，引出建立存在與唯一性定理的必要性；在集中介紹了這些定理以後，就用變換群的观点總結了前半部的內容，然後立刻轉向非綫性和不可積分的方程的研究。為了這個目的，我們介紹了定性方法，數值方法和解析方法，而在定性方法中較全面地添加了現代化的內容，以適合工程技術上的需要。積分方程篇幅不多，但希望能達到承上啟下的目的。第三卷數學物理方程的安排方式亦大致與第二卷相類似，其在現代化方面主要表現於混合型方程和非綫性偏微分方程的添加。就聯繫實際這一點來說，與舊教材相比，我們在綫性代數方程組後面添加了綫性規劃大意，在常微分方程部分添加了不少的振動理論和差分方程大意，在各類方程中皆添加了數值解法和許多聯繫實際的例題，以增強學生解決實際問題的能力。本書在理論上比以往的教材也有所提高，但有若干定理的證明予以適當的推遲或略去，例如代數學基本定理述而不證，留待高等數學(一)第二卷用複變數來證明；關於特征函數的展開定理在幾個不同的地方都碰得到，但仍推到泛函分析中去證明；常微分方程的存在定理則集中在一起解決等等。我們認為這樣做是符合多、快、好、省的精神的。就前後聯繫密切配合來說，我們初步做到了以下各點：1) 特征值問題貫穿在整個課程之中，從代數方程到數學物理方程；2) 振動問題貫穿在第二與第三卷之中；3) 在常微分方程部分把綫性方程提前，在積分方程中先講退化核；這都是為了加強它們與第一卷綫性代數的聯繫；4) 把常微分方程邊值問題和彈性體的振動問題作為積分方程的應用，以加強常微分方程、積分方程和數學物理方程

之間的联系。此外，对于如何与其他課程如高等数学(一)、物理学……等的配合問題我們也予以适当的安排和注意，以免产生重复或脫节的现象。

自然，这部教材还是刚刚編成，由于我們的思想水平和业务水平都还不高，其中一定会有許多考虑不周，照顾不够，安排不当，深淺不宜的地方，我們非常乐于接受来自各方面的批評和建議，以求将来把这部教材編写得更完善，更适合国家的需要，賜教請寄北京人民教育出版社高教用书編輯部轉。

南京大学数学天文学系

1960年5月

# 目 录

## 序 言

### 第一章 行列式与线性代数方程组

|   |    |
|---|----|
| § 1. 行列式 .....  | 1  |
| 1.1 行列式的定义——递归式的定义(2) 1.2 行列式的子式,代数余子式,按行或按列展开(4) 1.3 行列式的性质(12) 1.4 克莱姆法则(25) 1.5 行列式的保值变换与两条有关的定理(28) 1.6 行列式的另一种定义(33) |    |
| § 2. 向量和矩阵 .....  | 35 |
| 2.1 向量及其基本运算(36) 2.2 线性相关与线性组合(37) 2.3 向量空间与子空间(40) 2.4 矩阵和它的秩(47) 2.5 矩阵的初等变换(50) 2.6 矩阵代数(56) 2.7 方阵的乘法和逆方阵(58)         |    |
| § 3. 线性代数方程组 .....  | 63 |
| 3.1 非齐次方程组(64) 3.2 消去法(67) 3.3 对称矩阵的情况(73) 3.4 齐次方程组(77)  |    |
| § 4. 线性代数方程组的数值解法 .....   | 80 |
| 4.1 直接法(82) 4.2 迭代法(92)   |    |

### 第二章 线性规划

|  |     |
|--|-----|
| § 1. 问题的提出 .....   | 98  |
| § 2. 表上作业法 .....   | 102 |
| 2.1 闭回路的理论(104) 2.2 检验数(108) 2.3 独立与非独立未知数的互换(111) 2.4 表上作业法的具体步骤(113) 2.5 产销不平衡的情形(124) |     |
| § 3. 图上作业法 .....   | 125 |
| § 4. 一般线性规划问题 .....  | 132 |
| 4.1 一般线性规划问题的标准化(132) 4.2 凸集法(134) 4.3 迭代法(138)  |     |

### 第三章 方程式论

|                      |     |
|----------------------|-----|
| § 1. 多项式的因式与倍式 ..... | 147 |
|----------------------|-----|

- 1.1 数域与数环(147) 1.2 多项式的概念(148) 1.3 多项式的运算及其性质(149) 1.4 最高公因式与最低公倍式(151) 1.5 多项式分解为不可约因式的积(156)
- § 2. 方程的一般性质 .....159
- 2.1 方程的根(多项式的零点)(159) 2.2 重根及其求法(160) 2.3 方程的变形(160) 2.4 根与系数的关系(162)
- § 3. 实数域上的多项式 .....164
- 3.1 实系数多项式(164) 3.2 实根计算的预备知识(168) 3.3 实根的界(170) 3.4 实根的近似计算(175) 3.5 林士姆-赵荫楠法(182) 3.6 罗伯斐夫斯基法(186)
- § 4. 高次联立方程组 .....192
- 4.1 结式(192) 4.2 用消去法解联立方程组(197) 4.3 解高次方程组的牛顿法(200)

## 第四章 线性空间与线性变换

- § 1. 线性空间 .....203
- 1.1 线性空间的概念(203) 1.2 维数与底(206) 1.3 子空间(209) 1.4 子空间的交与和(210) 1.5 线性空间的同构(214)
- § 2. 线性变换及其矩阵 .....216
- 2.1 线性变换及其运算(216) 2.2 线性变换的矩阵表示式(219) 2.3 群的概念(224) 2.4 相似矩阵(226) 2.5 不变子空间(230)
- § 3. 特征多项式与最小多项式 .....233
- 3.1 线性变换的多项式与最小多项式(233) 3.2 特征多项式及特征向量(236) 3.3 哈密顿-凯莱定理(240)

## 第五章 若当法式

- § 1. 若当法式及其存在性 .....243
- 1.1 根子空间(243) 1.2 根子空间的底(248) 1.3 若当法式的存在性(250) 1.4 若当法式的初步应用(251)
- § 2. 若当法式的求法 .....254
- 2.1 多项式矩阵及其初等变换(254) 2.2 初等因式与不变因式(257) 2.3 矩阵的若当法式(263) 2.4 矩阵在实数域上的法式(265)
- § 3. 特征根的近似计算 .....270
- 3.1 但尼列夫斯基法(271) 3.2 绝对值最大的特征根的求法(278) 3.3 克雷洛夫法(280) 3.4 兰左斯法(285)

## 第六章 二次齐式与酉空间

- § 1. 实二次齐式在满秩线性变换下的标准式 .....292



|                             |                             |
|-----------------------------|-----------------------------|
| 1.1 二次齐式及其矩阵表达式(292)        | §2 化二次齐式为标准式(295)           |
| 1.3 惯性定理(297)               | 1.4 有定二次齐式(299)             |
| § 2. 欧几里德空间与酉空间 .....       | 303                         |
| 2.1 欧氏空间的定义和例子(303)         | 2.2 向量的模和夹角(305)            |
|                             | 2.3 正交性(308)                |
|                             | 2.4 正交补空间与线性方程组可解的几何意义(312) |
|                             | 2.5 欧氏空间的同构(315)            |
|                             | 2.6 酉空间(316)                |
| § 3. 正交变换群和酉变换群 .....       | 318                         |
| 2.1 正交变换的概念(318)            | 3.2 正交变换的特性(319)            |
|                             | 3.3 正交方阵(320)               |
|                             | 3.4 正交变换的几何意义(321)          |
|                             | 3.5 酉变换与酉矩阵(324)            |
| § 4. 实二次齐式在正交变换下的标准式 .....  | 326                         |
| 4.1 化二次齐式为标准式的正交变换的存在性(326) | 4.2 正交变换的实际求法(330)          |
|                             | 4.3 二次曲面在正交变换下的标准式(335)     |
|                             | 4.4 同时化任一二次齐式(337)          |
|                             | 4.5 凯尔密特二次齐式(339)           |

# 第一章 行列式与线性代数方程组

## §1 行列式

我們在中学里已經知道怎样解两个未知数的一次方程組（今后改称线性方程組。在高等数学（一）中讀者不久就会看到，下面的每一个方程代表一条直綫，这就是“线性”两字的来由。）：

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \quad (1)$$

例如，可以用消去法消去变数  $y$  或  $x$  而得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = b_1a_{22} - a_{12}b_2,$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

因此，如果  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ ，則(1)的解可以写成

$$x = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad y = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}; \quad (2)$$

而且这組解是唯一的，这样，以后凡遇形如(1)的方程組，我們都可以利用公式(2)来直接算出它的解，而不必每次都做一遍消去法了。但公式(2)并不是很容易记忆的。为了更好地帮助我們记忆这两个公式，可以采用行列式的記号。

假定  $a, b, c, d$  是任意的四个数，把这四个数排成一个正方形，再用两条直綫括起来，就得到一个行列式！

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

严格地说，这个行列式应该叫做一个“二阶行列式”，因为它有两行和两列（橫排叫行，纵排叫列）。这个行列式中的四个数  $a, b, c, d$  叫做它的元素（或簡称元），我們規定

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \quad (3)$$

即，二阶行列式的值是它的左上角元素乘右下角元素所得之积，减去右上角元素乘左下角元素所得之积，式子  $ad - bc$  叫做行列式  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$  的完全展式（或简称展式）。如果两个行列式的值相等，我们就说这两个行列式相等（不管它们的元素之间有什么关系）。

利用行列式的记号，公式(2)就可写成

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \quad (4)$$

我们看到，(2)式中的分子与分母事实上都是行列式，它们的分母是由方程(1)的系数按原来的位置所排成的行列式，而分子是把相应的系数换成(1)式右方的常数后所得的行列式，这样一来，如果记得行列式的定义，公式(2)就容易记忆了。

本节的目的是要引伸二阶行列式的概念，使得上面所述的规律不但能用于解两个未知数的线性方程组，而且也能用于解任何  $n$  个未知数的线性方程组。

### 1.1 行列式的定义——递归式的定义 在二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (5)$$

的情况，求解的步骤比二元线性方程组(2)麻烦得多，可是我们仍然能够用消去法求出解来。（详细计算从略，下面只写结果）。

如果规定三阶行列式的值为

$$\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3c_2b_1 - c_1b_2a_3 -$$

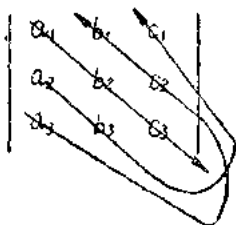
$$-c_2 b_3 a_1 - c_3 a_2 b_1$$

那末在上式右边不等于零的情况, (5)的解就可写成

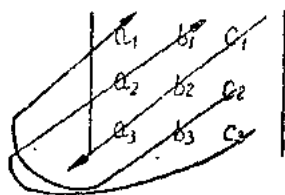
$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

我們看到, 这个解在形式上与(4)很相象, 它們的分母也是原来方程組的系数所排成的行列式, 而分子则是把分母的行列式中, 有关的列换成方程(5)右方的常数后所得的行列式。

注意, 一个三阶行列式的展式一共有  $3! = 6$  項, 每一項都是三个数之积。各項的符号可以用两个图来表示, 在下图每条綫上的三个数之积取正号;



而下图每条綫上三个数之积取負号。



于是所述的三阶行列式的值就是这六項的代数和。

此外, 一个三阶行列式还可写成三个二阶行列式乘上适当的数所得之积的代数和。就是, 容易验证,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

由此,我們給出行列式的值的定义如下:(按第一行展开)

1) 一阶行列式  $|a_{11}| = a_{11}$  (注意,这里不是绝对值的記号而是行列式的記号),

2) 二阶行列式  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ,

3) 三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

4) n阶行列式<sup>①</sup>

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} - \cdots \\ + (-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j} + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n}$$

这里的  $M_{11}$  是从  $D$  中划去第一行第一列后所得的  $n-1$  阶行列式,  $M_{12}$  是  $D$  中划去第一行第二列后所得的  $n-1$  阶行列式, 其余仿此类推。用归纳法不难証明一个  $n$  阶行列式的完全展式一共有  $n!$  項。

1.2 行列式的子式, 代数余子式, 按行或按列展开 在  $n$  阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

① 以后有时也簡記为  $D = |a_{ij}|$ 。

中任意划去  $k$  行和  $k$  列后, 剩下的元素按原来的次序排列成为一个  $n-k$  阶的行列式  $M$ 。另一方面, 位于划去的行列相交之点的元素全体则成一  $k$  阶行列式  $N$ 。我们称  $M$  是  $N$  的余子式, 而  $M, N$  分别称为  $D$  的  $n-k$  阶和  $k$  阶子式。显然可见,  $N$  也是  $M$  的余子式。设划去的  $k$  行是  $D$  的第  $i_1, i_2, \dots, i_k$  行, 划去的  $k$  列是  $D$  的  $j_1, j_2, \dots, j_k$  列, 则

$$(-1)^{i_1 + \dots + i_k + j_1 + \dots + j_k} M = (-1)^{nk} N$$

称为  $N$  在  $D$  中的代数余子式, 显然可见,  $(-1)^{nk} N$  是  $M$  在  $D$  中的代数余子式。特别, 当划去元素  $a_{ij}$  所在的行和列以后, 我们得到  $a_{ij}$  的余子式是  $n-1$  阶行列式, 以后记成  $M_{ij}$ , 而  $a_{ij}$  的代数余子式是

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

例 在

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中划去二行, 三行, 二列, 四列, 便得二阶子式

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix}$$

而  $M$  的余子式是

$$N = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$M$  的代数余子式是

$$(-1)^{2+3+2+4} N = -N.$$

回到 § 1.1 的行列式的定义, 可写

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},$$

$$\dots\dots\dots \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n},$$

就是說，行列式等于第一行的諸元素与它們的代数余子式的乘积之和，这叫做行列式按第一行展开的展式。由下面的定理可以看出，要計算行列式的值可以把它按任意一行展开。

**定理 1**  $n$  阶行列式等于它的任一行的諸元素与它們的代数余子式的乘积之和。

**証** (用数学归纳法)本定理对二阶行列式显然正确; 因为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \\ = a_{21}(-a_{12}) + a_{22}(a_{11}) = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22}.$$

今設本定理对  $n-1$  阶行列式正确，要証明它对  $n$  阶行列式也正确。

設  $D = |a_{ij}|$  是一个  $n$  阶行列式。为簡便計，我們以  $M_1, M_2, \dots, M_n$  来表示  $D$  中  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$  的余子式而以  $N_1, N_2, \dots, N_n$  表  $D$  中  $a_{k1}, \dots, a_{kn}$  的余子式 ( $k > 1$ )，因此  $M_j, N_j$  都是  $n-1$  阶的行列式。由行列式的定义，

$$D = a_{11}M_1 - a_{12}M_2 + a_{13}M_3 - \dots + (-1)^{n+1}a_{1n}M_n \quad (6)$$

我們要証明， $D$  也等于

$$(-1)^{k+1}a_{k1}N_1 + (-1)^{k+2}a_{k2}N_2 + \dots + (-1)^{k+n}a_{kn}N_n. \quad (7)$$

注意，如果把(6)与(7)中的一切  $n-1$  阶行列式都展开，(6)与(7)就都是  $n!$  項之和；已知每一項都是  $n$  个数的乘积，因此，要証

明(6)等于(7), 只需証明, 这两个展式中的各項对应地相等就行了。更具体地說, 我們要証明(7)的展式中, 一切含  $a_{11}$  的項合起来應該正好等于  $(-1)^{1+j}M_{j0}$ 。

我們先看含  $a_{11}$  的項。显然,  $N_1$  中不含  $a_{11}$ ; 对于  $j > 1$ ,

$$N_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k-1,1} & \cdots & a_{k-1,j-1} & a_{k-1,j+1} & \cdots & a_{k-1,n} \\ a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,j-1} & a_{k+1,j+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

按第一行展开得到:

$$N_j = a_{11}D_{j1} - a_{12}D_{j2} + \cdots$$

这里

$$D_{j1} = \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k-1,2} & \cdots & a_{k-1,j-1} & a_{k-1,j+1} & \cdots & a_{k-1,n} \\ a_{k+1,2} & \cdots & a_{k+1,j-1} & a_{k+1,j+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

于是(7)中一切含  $a_{11}$  的項可归納成

$$a_{11}((-1)^{k+2}a_{k2}D_{21} + \cdots + (-1)^{k+n}a_{kn}D_{n1}) \quad (8)$$

再把  $M_1$  按第  $k-1$  行展开, 得到:

$$M_1 = \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{k-1+k-1} a_{k2} \begin{vmatrix} a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k-1,3} & \cdots & a_{k-1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k+1,3} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots$$



$$\begin{aligned}
 & + (-1)^{k-1+k-1} a_{kk} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k-1,2} & a_{k-1,1} & \cdots & a_{k-1,n} \\ a_{k+1,2} & a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots \\
 & + (-1)^{k-1+n-1} a_{kn} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k-1,2} & a_{k-1,3} & \cdots & a_{k-1,n-1} \\ a_{k+1,2} & a_{k+1,3} & \cdots & a_{k+1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix} \\
 & = (-1)^{k+2} a_{k2} D_{21} + \cdots + (-1)^{k+n} a_{kn} D_{n1}
 \end{aligned}$$

这与(8)式括号内的表示式是一致的。因此(6)与(7)的完全展式中,一切含 $a_{11}$ 的项是对应地相等的。同理可证两个展式中一切含 $a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}$ 的项也都对应地相等,所以(6)等于(7)。定理1证毕。

我們已經解决了按任一行来展开行列式的问题,下面要讨论按任一列来展开的问题。在讨论按任一列展开以前,需要转置行列式的概念。

定义 設

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是一个 $n$ 阶行列式, 則

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$