技 工 学 校 教 材

初中毕业程度适用

数 学

第二分册

全国技工学校教材編审委員会編

中 国 工 业 出 版 社

本书是由全国技工学校教材编审委员会組織編写及审定的。

本书是以原二年制技工学校教材：几何、代数、三角为基础，根据1961年新編的数学教学大綱重新編写的。为了更好的貫彻党的教学方針和技工培訓目标，同时也为了汇集大跃进以来各地技工学校教学改革中的一些成果，因此在內容上，有了很大的变更，基本上已不再分几何，代数和三角而自成体系。

本书按两个分册出版。第一分册包括八章，主要內容有：相似形、三角函数初步、幂与根、函数、一次函数与直綫、二次方程、二次函数与二次曲綫、指数与对数等；第二分册包括七章，主要內容有三角函数、复数、数列与極限、直綫与平面、多面体与旋轉体、綫性規划的初步知識等。本书为第二分册。本书还附有数学用表一本，包括14个表，主要內容有三角函数表、三角函数对数表、平方数及平方根表、立方根表、求积公式表、各制常用計量单位換算表等等。

本书可作为初中毕业程度适用的二年制技工学校的数学教材。

本书是由刘立中，李振华二同志执笔編写的。

数　学

第二分册

全国技工学校教材編审委員会編

＊

中国工业出版社出版（[illegible]）

（北京市书刊出版业营业许可证出字第110号）

中国工业出版社第一印刷厂印刷

新华书店科技发行所发行·各地新华书店經售

＊

开本 787×1092 [illegible]·印张 $9\frac{3}{4}$·字数 216,000

1961年9月北京第一版·1961年9月北京第一次印刷

印数 00001—54,442·定价（7—1）0.73元

統一书号：15165·1068（[illegible]）

目　录

第九章　三角函数

1　同角三角函数間的关系

§94　同角三角函数間的关系

根据§14和§16中所讲的任意角三角函数的定义及应用单位圆求三角函数的方法，可以求得同角三角函数的相互关系式，現在分述如下：

1.　从图 9-1 直角三角形OPM中得：

$$OM^2+MP^2=OP^2,$$

或　$$|x|^2+|y|^2=1,$$

即　$$x^2+y^2=1。$$

∵　$$\sin\alpha=y,\quad \cos\alpha=x;$$

所以求得

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$。

若P点与A或A′点重合，則

$|x|=1$，$y=0$；

仍得

$x^2+y^2=1+0=1$。

若P点与B或B′点重合，則

$|y|=1$，$x=0$，

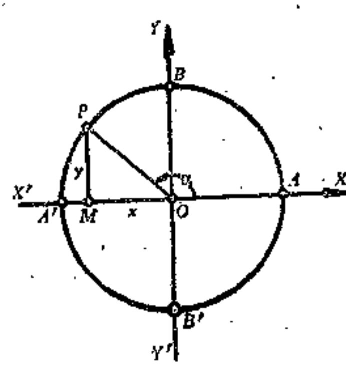

图 9-1

仍得　$$x^2+y^2=0+1=1,$$

∴　$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1。\qquad (1)$$

因此这一关系式对于角 α 的任何值都能成立。

2. $$\mathrm{tg}\alpha=\frac{y}{x},\quad \mathrm{ctg}\alpha=\frac{x}{y},$$

但 $$\sin\alpha=y,\quad \cos\alpha=x,$$

因此得 $$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\qquad (2)$$

$$\mathrm{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}。\qquad (3)$$

3. $$\sin\alpha\cdot\mathrm{cosec}\alpha=\frac{y}{r}\cdot\frac{r}{y}=1。\qquad (4)$$

由(4)得 $$\sin\alpha=\frac{1}{\mathrm{cosec}\alpha};\quad \mathrm{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}。$$

$$\cos\alpha\cdot\sec\alpha=\frac{x}{r}\cdot\frac{r}{x}=1。\qquad (5)$$

由(5)得 $$\cos\alpha=\frac{1}{\sec\alpha};\quad \sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}。$$

$$\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}=1。\qquad (6)$$

由(6)得 $$\mathrm{ctg}\alpha=\frac{1}{\mathrm{ctg}\alpha};\quad \mathrm{ctg}\alpha=\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}。$$

4. 用$\cos^2\alpha$或$\sin^2\alpha$分别去除等式$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$的两端，便得

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha},$$

$$\mathrm{tg}^2\alpha+1=\sec^2\alpha。\qquad (7)$$

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha},$$

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\operatorname{cosec}^2\alpha。\qquad (8)$$

因为，当 $\alpha=180°K+90°$ 时 $\operatorname{tg}\alpha$ 和 $\sec\alpha$ 不存在；而当 $\alpha=180°K$ 时，$\operatorname{ctg}\alpha$ 和 $\operatorname{cosec}\alpha$ 不存在，所以：

（1）在等式（2）、（5）、（7）中，除了 $\alpha=180°K+90°$ 外，对于 α 的其他一切值都成立。

（2）在等式（3）、（4）、（8）中，除了 $\alpha=180°K$ 外，对于 α 的其他一切值都成立。

（3）在等式（6）中，除了 $\alpha=90°K$ 外，对于 α 的其他一切值都成立。

上面八个关系式叫作三角函数的基本恒等式。它們可以分为三类：

（1）、（7）、（8）三个式子叫平方关系；

（2）、（3）二个式子叫比例关系；

（4）、（5）、（6）三个式子叫倒数关系。

例1　化简 $\dfrac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha-\cos\alpha}{1+\sin^2\alpha-\sin\alpha-\cos^2\alpha}$。

解：

$$\frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha-\cos\alpha}{1+\sin^2\alpha-\sin\alpha-\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{\cos\alpha(2\sin\alpha-1)}{(1-\cos^2\alpha)+\sin^2\alpha-\sin\alpha}$$

$$=\frac{\cos\alpha(2\sin\alpha-1)}{\sin\alpha(2\sin\alpha-1)}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha。$$

例2　化简　$\sec^2\alpha+\dfrac{\sin^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}-\dfrac{\cos^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}-\operatorname{tg}^2\alpha$。

解：　原式$=\sec^2\alpha+\dfrac{\sin^2\alpha}{\sec^2\alpha}-\dfrac{\cos^2\alpha}{\operatorname{cosec}^2\alpha}-\operatorname{tg}^2\alpha$

$$=1+\operatorname{tg}^2\alpha+\frac{\sin^2\alpha}{\sec^2\alpha}-\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{cosec}^2\alpha}-\operatorname{tg}^2\alpha$$

$$=1+\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\cos^2\alpha\sin^2\alpha=1。$$

利用三角函数的基本恒等式可以証明三角恒等式。但三角恒等式变化多端，不可能用几条具体规定来解决所有类型的証題。下面我們归納出来的几点，仅供参考用，对証明一般題或有所帮助。（以下几点方法仅仅帮助学生在开始証恒等式习題时，知道如何下手，等到熟练后，可用簡便方法来証明，不必拘泥于下面方法）

1．　一般由复杂一端开始証明，使和简单一端相同；或从两端同时証明。

2．　式中仅含有正弦和余弦，则可利用$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$这个公式，以及代数中的因式分解、通分和分母有理化等方法来变化原式。例如$\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)\times(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=2\sin^2\alpha-1=1-2\cos^2\alpha$；

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\alpha-\cos\alpha)=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha;$$

$$\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}=\sqrt{\frac{(1-\sin\alpha)^2}{(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)}}=\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha};$$

或　$\sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}=\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$等等，最后再通分或析因和化簡等，使式子証得左右两端相等。

3．　如果等式中三角函数不只是正弦和余弦，则可以用同角三角函数关系式，把正切、余切、正割和余割（不一定全包括）变为正弦和余弦，然后通分、化簡、整理等。

4. 如果将式子已变为含有正弦和余弦，經过整理后仍得不到結果，那末就将正弦变为余弦，或将余弦变为正弦。

例 3　求証　$\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\sin^2\alpha$。

証明：$\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\sin^2\alpha$

$$=\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha(1-\cos^2\alpha)}{\cos^2\alpha}$$

$=\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\sin^2\alpha$。

∵左＝右，∴　原式成立。

例 4　求証　$\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}{\sec\alpha+\operatorname{cosec}\alpha}=\sin\alpha-\cos\alpha$。

証明：$\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}{\sec\alpha+\operatorname{cosec}\alpha}=\dfrac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\dfrac{1}{\cos\alpha}+\dfrac{1}{\sin\alpha}}=\dfrac{\dfrac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}}{\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}}$

$$=\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\alpha-\cos\alpha)}{(\sin\alpha+\cos\alpha)}$$

$=\sin\alpha-\cos\alpha$。

∵　左＝右，∴　原式成立。

§95　已知一个角函数的值，求其他各三角函数的值

根据§94公式，我們可以根据角的一个三角函数值，計算其余的三角函数值，現在通过下面的例子来掌握它的一般計算方法。

例 1　已知 $\cos\alpha=\dfrac{12}{13}$，計算角 α 的其余各三角函数值。

解：$\because \quad \sec\alpha=\dfrac{1}{\cos\alpha}$，

$$\sec\alpha=\frac{1}{\dfrac{12}{13}}=\frac{13}{12}。$$

从公式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，

得 $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\pm\sqrt{1-\left(\dfrac{12}{13}\right)^2}$

$$=\pm\sqrt{\frac{13^2-12^2}{13^2}}=\pm\sqrt{\frac{25}{13^2}}=\pm\frac{5}{13}。$$

$$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{1}{\pm\dfrac{5}{13}}=\pm\frac{13}{5}。$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\pm\dfrac{5}{13}}{\dfrac{12}{13}}=\pm\frac{5}{12}。$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\pm\frac{12}{5}。$$

应該注意到：在解決这类問題时，若遇到开方，就必須在根号前面加上“±”号。因为就已知函数値来看，角 α 可能終止在两个不同象限內，所以 α 的其他函数値就可能是正値或負値。例如上例中：

1. 若角 α 終止在第一象限，則

$$\sin\alpha=\frac{5}{13};\quad \operatorname{cosec}\alpha=\frac{13}{5};$$

$$\cos\alpha=\frac{12}{13};\qquad \sec\alpha=\frac{13}{12};$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{5}{12};\qquad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{12}{5}。$$

2． 若角 α 終止在第Ⅳ象限，則

$$\sin\alpha=-\frac{5}{13};\ \operatorname{cosec}\alpha=-\frac{13}{5};$$

$$\cos\alpha=\frac{12}{13};\qquad \sec\alpha=\frac{13}{12};$$

$$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{5}{12};\qquad \operatorname{ctg}\alpha=-\frac{12}{5}。$$

例 2　已知 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{7}{8}$，若 $180°<\alpha<270°$，計算其余的各三角函数值，准确到0.01。

解：
$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=1:\frac{7}{8}=\frac{8}{7}\approx1.14;$$

$$\sec\alpha=-\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=-\sqrt{1+\left(\frac{7}{5}\right)^2}$$

$$=-\frac{\sqrt{113}}{8}\approx-1.33;$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sec\alpha}=\frac{1}{-1.33}\approx-0.75;$$

$$\sin\alpha=\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{7}{8}\cdot(-0.75)\approx-0.66;$$

$$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{1}{-0.66}\approx-1.52。$$

从这个例子說明了，若指明了角的区間，那么开方时只要根据角的終边所在的象限，由三角函数符号規則，就可以决定根号前面应取正号或負号。

例 3 已知 $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{3}{4}$，且$\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$，求角$\alpha$的其他三角函数值。

解： 由例 2 看来，这种方法是較为繁杂的。为了計算簡便起見，我們可以用下面的方法来計算。

根据已知条件作出了角α的終边，在終边上取$(3,-4)$的点M；由 $x=3$，$y=-4$，可得 $r=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$（图 9-2）。

我們另外作一个与直角三角形 MON 全等的直角三角形 ABC（图 9-3），根据銳角三角函数定义写出三角函数值的絕对值，再按照角α的所在象限来确定所求三角函数值的符

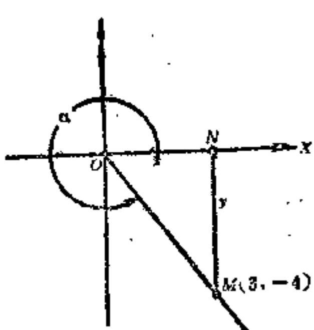

图 9-2

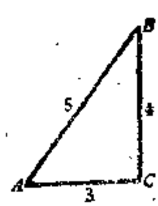

图 9-3

号。例如，$\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$，可知除$\cos\alpha$及$\sec\alpha$为正外，其他的三角函数都为负值。由图 9-2 和图 9-3 可得：

$$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{4}{3}，\cos\alpha=\frac{3}{5}，\sec\alpha=\frac{5}{3}，$$

$$\sin\alpha=-\frac{4}{5}，\quad \operatorname{cosec}\alpha=-\frac{5}{4}。$$

习 题 三 十

（1）化简下列各式：

① $\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}$；

② $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$；

③ $\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}$；

④ $(a\sin\alpha+b\cos\alpha)^2+(a\cos\alpha-b\sin\alpha)^2$；

⑤ $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}+\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}\quad(0<\alpha<2\pi)$。

（2）已知 $\operatorname{ctg}\alpha=2$，求 $\left(\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}\right)^2$ 的值。

（3）当 $\alpha=\frac{3\pi}{4}$时，計算$\frac{\sin^2\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha\sin\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha\cos\alpha-\operatorname{cosec}\alpha(1-2\sin^2\alpha)}$的值。

（4）已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=n$，求：

① $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$；② $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$的值。

（5）証明下列各恒等式：

① $\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{ctg\alpha+ctg\beta}=tg\alpha\cdot tg\beta$;

② $\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta=1$;

③ $\dfrac{\sec\alpha-\cos\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha-\sin\alpha}=tg^3\alpha$;

④ $\dfrac{tg^2\alpha-ctg^2\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\sec^2\alpha+\operatorname{cosec}^2\alpha$;

⑤ $\dfrac{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}{1+\sin\alpha\cos\alpha}=\cos\alpha-\sin\alpha$。

(6) 已知 $\sin\alpha=-\dfrac{24}{25}$，計算 α 角的其他各三角函数值。

(7) 已知 $\cos\alpha=-\dfrac{9}{41}$，設$90°<\alpha<180°$，計算 α 角的其他各三角函数值。

(8) 設 $\cos\alpha=-\dfrac{52}{173}$ 且$0°<\alpha<180°$，計算$tg\alpha-\sec\alpha$。

(9) 設 $tg\alpha=2$，計算$\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$。

(10) 已知 $tg\alpha=n$，求$\sin\alpha$和$\cos\alpha$。

(11) 已知 $\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{n}}{n+1}$，求$tg\alpha$。

(12) 用$\cos\alpha$来表示角 α 的其他各三角函数。

I 加法定理及其推論

§96 加法定理

定理1 对于任何自变量 α 和 β 有下列四种关系式：

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta。$$

应該注意到：$\sin(\alpha+\beta)\neq\sin\alpha+\sin\beta$； $\cos(\alpha+\beta)\neq\cos\alpha+\cos\beta$等等，只有当$\alpha$和$\beta$是某些特殊角时这些式子才能成立。

1. 我們首先証明公式：

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$成立。

在单位圓上作出从OX軸到OA的角α，和从OX軸到OB的角β（图9-4），則角$\alpha-\beta$是从OB到OA的角。

設A点的坐标为x_1、y_1，B点的坐标为x、y，則

$$x_1=\cos\alpha;$$
$$y_1=\sin\alpha;$$
$$x=\cos\beta;$$
$$y=\sin\beta。$$

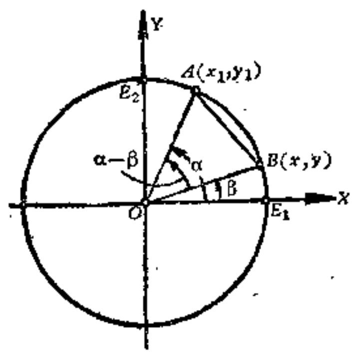

图 9—4

引AB弦并根据余弦定理从三角形OAB計算它的长，得

$$AB^2=OB^2+OA^2-2\cdot OB\cdot OA\cdot\cos(\alpha-\beta);$$

但因 OB=OA=1，所以

$$AB^2=2-2\cos(\alpha-\beta)。\qquad(1)$$

根据两点距离公式

$$\begin{aligned}AB^2&=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2\\&=(\cos\beta-\cos\alpha)^2+(\sin\beta-\sin\alpha)^2\\&=\cos^2\beta-2\cos\alpha\ \cos\beta+\cos^2\alpha+\sin^2\beta\\&\quad-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\alpha,\end{aligned}$$

$$\therefore\quad AB^2=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)。\qquad(2)$$

从等式（1）与等式（2）得：

$$2-2\cos(\alpha-\beta)=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta),$$

$$\therefore\quad \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta。\qquad (3)$$

对于α和β为任何角度时，都可以証明等式（3）成立（証明从略）。

由此可以推出：

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos[\alpha-(-\beta)]=\cos\alpha\cdot\cos(-\beta)$$
$$+\sin\alpha\cdot\sin(-\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta。\qquad (4)$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta。$$

上面这两个公式就是余弦加法定理。

例　計算 $\cos15°$，$\cos75°$。

解：　$\cos15°=\cos(60°-45°)=\cos60°\cos45°$

$$+\sin60°\sin45°=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\approx\frac{1.4142+2.4495}{4}\approx0.9659。$$

$$\cos75°=\cos(30°+45°)=\cos30°\cos45°$$

$$-\sin30°\sin45°=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\approx\frac{2.4495-1.4142}{4}\approx0.2588。$$

2．推求正弦加法定理：

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$成立。

$$\because\quad \sin(\alpha+\beta)=\cos[90°-(\alpha+\beta)]=\cos[(90°$$
$$-\alpha)-\beta]=\cos(90°-\alpha)\cos\beta+\sin(90°-\alpha)\sin\beta。$$