



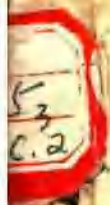
技工学校教材

初中毕业程度适用

数 学

第二分册

全国技工学校教材编审委员会编



中国工业出版社

本书是由全国技工学校教材编审委员会组织编写及审查的。

本书是以原二年制技工学校教材：几何、代数、三角为基础，根据1961年新编的数学教学大纲重新编写的。为了更好的贯彻党的教学方针和技工培训目标，同时也为了汇集大跃进以来各地技工学校教学改革中的一些成果，因此在内容上，有了很大的变更，基本上已不再分几何、代数和三角而自成体系。

本书按两个分册出版。第一分册包括八章，主要内容有：相似形、三角函数初步、幂与根、函数、一次函数与直线、二次方程、二次函数与二次曲线、指数与对数等；第二分册包括七章，主要内容有三角函数、复数、数列与极限、直线与平面、多面体与旋转体、线性规划的初步知识等。本书为第二分册。本书还附有数学用表一本，包括14个表，主要内容有三角函数表、三角函数对数表、平方数及平方根表、立方根表、求积公式表、各制常用计量单位换算表等等。

本书可作为初中毕业程度适用的二年制技工学校的数学教材。

本书是由刘立中、李展华三同志执笔编写的。

数 学

第 二 分 册

全国技工学校教材编审委员会编

※

中国工业出版社出版（北京朝阳门内大街26号）

北京市图书馆、中国科学院图书馆、中国科学院图书馆（100号）

中国工业出版社第三印刷厂印刷

新华书店科技发行所发行，各地新华书店经售

※

开本787·1092 $\frac{1}{32}$ ·印张37 $\frac{1}{4}$ ·字数216,000

1961年9月北京第一版·1961年9月北京第一次印刷

印数00001—54,442·定价（7—11）0.73元

统一书号：15165·1068：·Ⅱ—200

目 录

第九章 三角函数	1
I 同角三角函数间的关系	1
§ 91 同角三角函数间的关系	1
§ 92 已知一个角函数值,求其他各三角函数值	5
II 加法定理及其推论	10
§ 96 加法定理	10
§ 97 倍角的三角函数	17
§ 98 半角的三角函数	21
§ 99 三角函数的和差化积	33
III 三角函数的周期性和三角函数	41
§ 100 三角函数的周期性	41
§ 101 三角函数的图象	43
§ 102 反三角函数的概念	63
IV 三角方程	73
§ 103 解简单三角方程	73
§ 104 三角方程的各种解法	74
第十章 数列	86
I 数列的基本概念	88
§ 105 数列的定义	88
§ 106 数列的分类	88
II 等差数列	90
§ 107 等差数列定义	90
§ 108 等差数列的通项公式	91
§ 109 等差数列前 n 项和的公式	93
III 等比数列	97
§ 110 等比数列定义	97
§ 111 等比数列的通项公式	98
§ 112 等比数列前 n 项和的公式	101
§ 113 数列的极限	103
§ 114 无穷递缩等比数列各项和	103

第十一章 复数	115
I 复数的概念及其运算	115
§ 115 复数的概念	115
§ 116 复数的加法和减法	118
II 复数的三角形式及其运算	122
§ 117 复数的三角形式	122
§ 118 复数的乘法和乘方	125
§ 119 复数的除法	128
§ 120 复数的开方	130
III 复数的指数形式及其运算	134
§ 121 复数的指数形式	134
§ 122 复数的指数形式的运算	136
第十二章 直线和平面	143
I 空间的直线和平面	143
§ 123 平面的基本概念	143
§ 124 关于空间的作图	147
§ 125 空间两直线的相关位置	148
II 直线与平面	151
§ 126 直线与平面的相关位置	151
§ 127 平行于平面的直线	152
§ 128 垂直于平面的直线	153
§ 129 平面的斜线	156
III 平面与平面	159
§ 130 平面与平面的相关位置	159
§ 131 平行平面	160
§ 132 二面角	163
§ 133 垂直平面	165
§ 134 多面角	167
第十三章 多面体	179
I 棱柱、棱锥、棱台	179
§ 135 多面体	179

§ 136	棱柱	181
§ 137	平行六面体	185
§ 138	棱锥	188
§ 139	棱台	194
§ 140	直棱柱的直观图的画法	199
§ 141	正棱锥、正棱台的直观图的画法	203
II	棱柱、棱锥与棱台的体积	207
§ 142	关于体积的概念	207
§ 143	长方体的体积	208
§ 144	祖暅原理	212
§ 145	棱柱的体积	213
§ 146	棱锥与棱台的体积	215
第十四章	旋轉体	235
I	圆柱、圆锥、圆台	235
§ 147	柱面与锥面	235
§ 148	圆柱	237
§ 149	圆锥	249
§ 150	圆台	257
II	球	267
§ 151	球面与球	267
§ 152	球缺、球冠、球台与球带的概念	269
§ 153	球、球冠、球带的面积	270
§ 154	球、球缺、球台的体积	274
附录		281
第十五章	线性规划的初步知识	281
§ 155	概說	281
§ 156	物资调运工作中的图上作业法	283
§ 157	物资调运工作中的表上作业法	291
§ 158	生产能力合理分配問題	297
§ 159	工业材料合理下料問題	301
§ 160	結束語	305

第九章 三角函数

1 同角三角函数间的关系

§ 94 同角三角函数间的关系

根据 § 14 和 § 16 中所讲的任意角三角函数的定义及应用单位圆求三角函数的方法，可以求得同角三角函数的相互关系式，现在分述如下：

1. 从图 9-1 直角三角形 OPM 中得：

$$OM^2 + MP^2 = OP^2,$$

$$\text{或} \quad |x|^2 + |y|^2 = 1,$$

$$\text{即} \quad x^2 + y^2 = 1.$$

$$\therefore \quad \sin \alpha = y, \quad \cos \alpha = x;$$

所以求得

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

若 P 点与 A 或 A' 点重

合，则

$$|x| = 1, \quad y = 0;$$

仍得

$$x^2 + y^2 = 1 + 0 = 1.$$

若 P 点与 B 或 B' 点重

合，则

$$|y| = 1, \quad x = 0,$$

仍得

$$x^2 + y^2 = 0 + 1 = 1,$$

$$\therefore \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

(1)

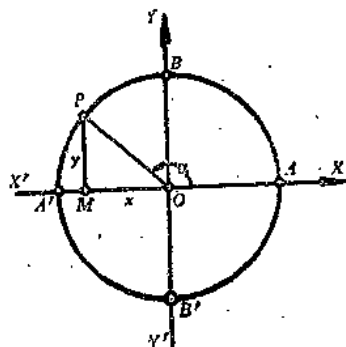


图 9-1

因此这一关系式对于角 α 的任何值都能成立。

$$2. \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y},$$

$$\text{但} \quad \sin \alpha = y, \quad \cos \alpha = x,$$

$$\text{因此得} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad (2)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \quad (3)$$

$$3. \quad \sin \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha = \frac{y}{r} \cdot \frac{r}{y} = 1. \quad (4)$$

$$\text{由(4)得} \quad \sin \alpha = \frac{1}{\operatorname{cosec} \alpha}; \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

$$\cos \alpha \cdot \sec \alpha = \frac{x}{r} \cdot \frac{r}{x} = 1. \quad (5)$$

$$\text{由(5)得} \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sec \alpha}; \quad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y} = 1. \quad (6)$$

$$\text{由(6)得} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}.$$

4. 用 $\cos^2 \alpha$ 或 $\sin^2 \alpha$ 分别去除等式 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 的两端, 使得

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha},$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha. \quad (7)$$

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha},$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha. \quad (8)$$

因为，当 $\alpha = 180^\circ K + 90^\circ$ 时 $\operatorname{tg} \alpha$ 和 $\sec \alpha$ 不存在；而当 $\alpha = 180^\circ K$ 时， $\operatorname{ctg} \alpha$ 和 $\operatorname{cosec} \alpha$ 不存在，所以：

(1) 在等式(2)、(5)、(7)中，除了 $\alpha = 180^\circ K + 90^\circ$ 外，对于 α 的其他一切值都成立。

(2) 在等式(3)、(4)、(8)中，除了 $\alpha = 180^\circ K$ 外，对于 α 的其他一切值都成立。

(3) 在等式(6)中，除了 $\alpha = 90^\circ K$ 外，对于 α 的其他一切值都成立。

上面八个关系式叫作三角函数的基本恒等式。它们可以分为三类：

(1)、(7)、(8)三个式子叫平方关系；

(2)、(3)二个式子叫比例关系；

(4)、(5)、(6)三个式子叫倒数关系。

例1 化简 $\frac{2\sin \alpha \cdot \cos \alpha - \cos \alpha}{1 + \sin^2 \alpha - \sin \alpha - \cos^2 \alpha}.$

解：

$$\begin{aligned} & \frac{2\sin \alpha \cdot \cos \alpha - \cos \alpha}{1 + \sin^2 \alpha - \sin \alpha - \cos^2 \alpha} \\ &= \frac{\cos \alpha (2\sin \alpha - 1)}{(1 - \cos^2 \alpha) + \sin^2 \alpha - \sin \alpha} \\ &= \frac{\cos \alpha (2\sin \alpha - 1)}{\sin \alpha (2\sin \alpha - 1)} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha. \end{aligned}$$

例2 化简 $\sec^2 \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} - \operatorname{tg}^2 \alpha.$

$$\begin{aligned}
 \text{解: 原式} &= \sec^2 \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{\sec^2 \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha}{\operatorname{cosec}^2 \alpha} - \operatorname{tg}^2 \alpha \\
 &= 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{\sec^2 \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha}{\operatorname{cosec}^2 \alpha} - \operatorname{tg}^2 \alpha \\
 &= 1 + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha = 1.
 \end{aligned}$$

利用三角函数的基本恒等式可以证明三角恒等式。但三角恒等式变化多端，不可能用几条具体规定来解决所有类型的题目。下面我们归纳出来的几点，仅供参考用，对证明一般题或有所帮助。（以下几点方法仅仅帮助学生在开始证明等式习题时，知道如何下手，等到熟练后，可用简便方法来证明，不必拘泥于下面方法）

1. 一般由复杂一端开始证明，使和简单一端相同；或从两端同时证明。

2. 式中仅含有正弦和余弦，则可利用 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 这个公式，以及代数中的因式分解、通分和分母有理化等方法来变化原式。例如 $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \times (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 2\sin^2 \alpha - 1 = 1 - 2\cos^2 \alpha$ ；

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin \alpha - \cos \alpha) = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha;$$

$$\sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}} = \sqrt{\frac{(1 - \sin \alpha)^2}{(1 + \sin \alpha)(1 - \sin \alpha)}} = \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha};$$

$$\text{或 } \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}} = \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} \text{ 等等，最后再通分或析因和}$$

化简等，使式子证得左右两端相等。

3. 如果等式中三角函数不只是正弦和余弦，则可以用同角三角函数关系式，把正切、余切、正割和余割（不一定全包括）变为正弦和余弦，然后通分、化简、整理等。

4. 如果将式子已变为含有正弦和余弦，经过整理后仍得不到结果，那末就将正弦变为余弦，或将余弦变为正弦。

例3 求证 $\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha \cdot \sin^2\alpha$ 。

$$\text{证明: } \operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \sin^2\alpha$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sin^2\alpha - \sin^2\alpha \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha(1 - \cos^2\alpha)}{\cos^2\alpha} \\ &= \operatorname{tg}^2\alpha \cdot \sin^2\alpha. \end{aligned}$$

$\therefore$ 左 = 右, $\therefore$ 原式成立。

例4 求证 $\frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha}{\sec\alpha + \operatorname{cosec}\alpha} = \sin\alpha - \cos\alpha$ 。

$$\begin{aligned} \text{证明: } \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha}{\sec\alpha + \operatorname{cosec}\alpha} &= \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\sin\alpha}} = \frac{\frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\cos\alpha \sin\alpha}}{\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha \sin\alpha}} \\ &= \frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)(\sin\alpha - \cos\alpha)}{(\sin\alpha + \cos\alpha)} \\ &= \sin\alpha - \cos\alpha. \end{aligned}$$

$\therefore$ 左 = 右, $\therefore$ 原式成立。

§95 已知一个角函数的值，求其他各三角函数的值

根据 §94 公式，我们可以根据角的一个三角函数值，计算其余的三角函数值，现在通过下面的例子来掌握它的一般计算方法。

例1 已知 $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$ ，计算角 α 的其余各三角函数

值。

$$\text{解: } \because \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha},$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\frac{12}{13}} = \frac{13}{12}.$$

$$\text{从公式 } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

$$\begin{aligned} \text{得 } \sin \alpha &= \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} \\ &= \pm \sqrt{\frac{13^2 - 12^2}{13^2}} = \pm \sqrt{\frac{25}{13^2}} = \pm \frac{5}{13}. \end{aligned}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{\pm \frac{5}{13}} = \pm \frac{13}{5}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\pm \frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \pm \frac{5}{12}.$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \pm \frac{12}{5}.$$

应该注意到：在解决这类问题时，若遇到开方，就必须
在根号前面加上“±”号。因为就已知函数值来看，角 α 可
能终止在两个不同象限内，所以 α 的其他函数值就可能是正
值或负值。例如上例中：

1. 若角 α 终止在第一象限，则

$$\sin \alpha = \frac{5}{13}; \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{13}{5};$$

$$\cos \alpha = \frac{12}{13}; \quad \sec \alpha = \frac{13}{12};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{12}{5}.$$

2. 若角 α 終止在第IV象限, 則

$$\sin \alpha = -\frac{5}{13}; \quad \operatorname{cosec} \alpha = -\frac{13}{5};$$

$$\cos \alpha = \frac{12}{13}; \quad \sec \alpha = \frac{13}{12};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{12}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{12}{5}.$$

例2 已知 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{8}$, 若 $180^\circ < \alpha < 270^\circ$, 計算其余的各三角函数值, 准确到0.01。

$$\text{解: } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = 1 : \frac{7}{8} = \frac{8}{7} \approx 1.14;$$

$$\begin{aligned} \sec \alpha &= -\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = -\sqrt{1 + \left(\frac{7}{8}\right)^2} \\ &= -\frac{\sqrt{113}}{8} \approx -1.23; \end{aligned}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sec \alpha} = \frac{1}{-1.23} \approx -0.75;$$

$$\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{7}{8} \cdot (-0.75) \approx -0.66;$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = -\frac{1}{\sin \alpha} = -\frac{1}{-0.66} \approx -1.52.$$

从这个例子说明了，若指明了角的区间，那么开方时只要根据角的终边所在的象限，由三角函数符号规则，就可以决定根号前面应取正号或负号。

例3 已知 $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{3}{4}$ ，且 $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ ，求角 α

的其他三角函数值。

解：由例2看来，这种方法是较为繁杂的。为了计算简便起见，我们可以用下面的方法来计算。

根据已知条件作出了角 α 的终边，在终边上取 $(3, -4)$ 的点M；由 $x = 3$ ， $y = -4$ ，可得 $r = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

(图9-2)。

我们另外作一个与直角三角形MON全等的直角三角形ABC(图9-3)，根据锐角三角函数定义写出三角函数值的绝对值，再按照角 α 的所在象限来确定所求三角函数值的符

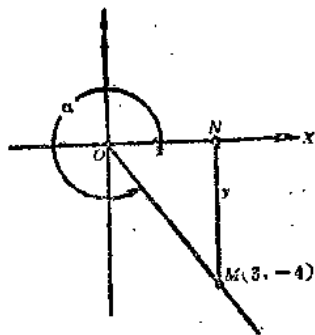


图 9-2

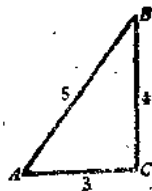


图 9-3

号。例如， $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ ，可知除 $\cos\alpha$ 及 $\sec\alpha$ 为正外，其他的三角函数都为负值。由图 9-2 和图 9-3 可得：

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3}, \quad \cos\alpha = \frac{3}{5}, \quad \sec\alpha = \frac{5}{3},$$

$$\sin\alpha = -\frac{4}{5}, \quad \operatorname{cosec}\alpha = -\frac{5}{4}.$$

习 题 三 十

(1) 化简下列各式：

① $\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} \cdot \frac{1}{\cos^2\alpha};$

② $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta};$

③ $\frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha}{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha};$

④ $(a \sin\alpha + b \cos\alpha)^2 + (a \cos\alpha - b \sin\alpha)^2;$

⑤ $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} + \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} \quad (0 < \alpha < 2\pi).$

(2) 已知 $\operatorname{ctg}\alpha = 2$ ，求 $\left(\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}\right)^2$ 的值。

(3) 当 $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ 时，计算 $\frac{\sin^3\alpha \cos\alpha + \cos^3\alpha \sin\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha \cos\alpha - \operatorname{cosec}\alpha(1-2\sin^2\alpha)}$

的值。

(4) 已知 $\sin\alpha + \cos\alpha = n$ ，求：

① $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$ ；② $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$ 的值。

(5) 证明下列各恒等式：

$$(1) \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta} = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta;$$

$$(2) \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta + \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta = 1;$$

$$(3) \frac{\sec \alpha - \cos \alpha}{\operatorname{cosec} \alpha - \sin \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha;$$

$$(4) \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \sec^2 \alpha + \operatorname{cosec}^2 \alpha;$$

$$(5) \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{1 + \sin \alpha \cos \alpha} = \cos \alpha - \sin \alpha.$$

(6) 已知 $\sin \alpha = -\frac{24}{25}$, 計算 α 角的其他各三角函数值。

(7) 已知 $\cos \alpha = -\frac{9}{41}$, 設 $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, 計算 α 角的其他各三角函数值。

(8) 設 $\cos \alpha = -\frac{52}{173}$ 且 $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, 計算 $\operatorname{tg} \alpha - \sec \alpha$ 。

(9) 設 $\operatorname{tg} \alpha = 2$, 計算 $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$ 。

(10) 已知 $\operatorname{tg} \alpha = n$, 求 $\sin \alpha$ 和 $\cos \alpha$ 。

(11) 已知 $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{n}}{n+1}$, 求 $\operatorname{tg} \alpha$ 。

(12) 用 $\cos \alpha$ 来表示角 α 的其他各三角函数。

I 加法定理及其推論

§ 96 加法定理

定理 1. 对于任何自变量 α 和 β 有下列四种关系式:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta;$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta.$$

應該注意到： $\sin(\alpha + \beta) \neq \sin\alpha + \sin\beta$ ； $\cos(\alpha + \beta) \neq \cos\alpha + \cos\beta$ 等等，只有当 α 和 β 是某些特殊角时这些式子才能成立。

1. 我們首先証明公式：

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta \text{ 成立.}$$

在单位圓上作出从OX軸到OA的角 α ，和从OX軸到OB的角 β (图 9-4)，則角 $\alpha - \beta$ 是从OB到OA的角。

設A点的坐标为 x_1 、 y_1 ，B点的坐标为 x 、 y ，則

$$x_1 = \cos\alpha;$$

$$y_1 = \sin\alpha;$$

$$x = \cos\beta;$$

$$y = \sin\beta.$$

引AB弦并根据余弦定理从三角形OAB計算它的长，得

$$AB^2 = OB^2 + OA^2$$

$$- 2 \cdot OB \cdot OA \cdot \cos(\alpha - \beta);$$

但因 $OB = OA = 1$ ，所以

$$AB^2 = 2 - 2\cos(\alpha - \beta). \quad (1)$$

根据两点距离公式

$$\begin{aligned} AB^2 &= (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 \\ &= (\cos\beta - \cos\alpha)^2 + (\sin\beta - \sin\alpha)^2 \\ &= \cos^2\beta - 2\cos\alpha \cos\beta + \cos^2\alpha + \sin^2\beta \\ &\quad - 2\sin\alpha \sin\beta + \sin^2\alpha, \end{aligned}$$

$$\therefore AB^2 = 2 - 2(\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta). \quad (2)$$

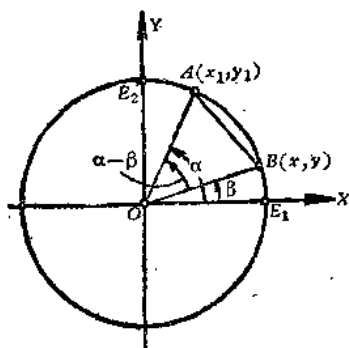


图 9-4

从等式(1)与等式(2)得:

$$\begin{aligned} 2-2\cos(\alpha-\beta) &= 2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta), \\ \therefore \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta. \end{aligned} \quad (3)$$

对于 α 和 β 为任何角度时, 都可以证明等式(3)成立(证明从略)。

由此可以推出:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos[\alpha-(-\beta)] = \cos\alpha \cdot \cos(-\beta) \\ &\quad + \sin\alpha \cdot \sin(-\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta. \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta; \\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta. \end{aligned}$$

上面这两个公式就是余弦加法定理。

例 计算 $\cos 15^\circ$, $\cos 75^\circ$ 。

解: $\cos 15^\circ = \cos(60^\circ - 45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ$

$$\begin{aligned} &+ \sin 60^\circ \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \approx \frac{1.4142 + 2.4495}{4} \approx 0.9559. \end{aligned}$$

$\cos 75^\circ = \cos(30^\circ + 45^\circ) = \cos 30^\circ \cos 45^\circ$

$$\begin{aligned} &- \sin 30^\circ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \approx \frac{2.4495 - 1.4142}{4} \approx 0.2588. \end{aligned}$$

2. 推求正弦加法定理:

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ 成立。

$$\begin{aligned} \therefore \sin(\alpha+\beta) &= \cos[90^\circ - (\alpha+\beta)] = \cos[(90^\circ - \alpha) - \beta] \\ &= \cos(90^\circ - \alpha)\cos\beta + \sin(90^\circ - \alpha)\sin\beta. \end{aligned}$$