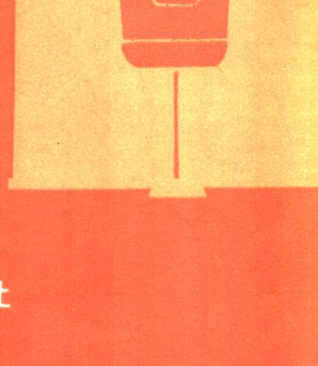
·高等学校教学用书·

最优化原理与方法

（修订本）

GAODENG XUEXIAO JIAOXUE YONGSHU



冶金工业出版社

高 等 学 校 教 学 用 书

最优化原理与方法

（修订版）

东北工学院 薛嘉庆 编

冶 金 工 业 出 版 社

（京）新登字036号

高等学校教学用书
最优化原理与方法
（修订版）
东北工学院　薛嘉庆　编
*
冶金工业出版社出版
（北京北河沿大街嵩祝院北巷39号）
新华书店总店科技发行所发行
冶金工业出版社印刷厂印刷
*
850×1168　1/32　印张　$10\frac{7}{8}$　字数　286　千字
1992年8月第二版　1992年8月第四次印刷
印数00,001～2,900册

ISBN 7-5024-1058-9
O·19(课)　定价3.40元

修订版前言

本书初版以来，接近十年了。现在根据我们对工科研究生和应用数学专业本科生进行教学的经验，结合学科的新发展和兄弟院校师生的反映，对全书加以修订。我们删减了一些相对次要的论述，增添了一些必要的新内容，使全书的理论体系更臻完善，也更切合教学和实际应用的需要。主要的修改有：将原第五章的基本内容精简并入第三章；增写了多目标最优化方法（现第九章）和乘子法（现第八章第三节）；重写了线性规划(现第五章)。这样修改以后，初版第六、七、八、九各章的内容，在修订版中就相应列入第五、六、七、八各章。由于水平所限，本书仍然难免存在各种缺点，欢迎读者批评指正。借此机会，谨向所有对本书提出过改进意见的同行和读者们表示衷心的感谢。

编者

1991年8月

第一版前言

最优化是从所有可能方案中选择最合理的一种以达到最优目标的学科。达到最优目标的方案是最优方案，搜寻最优方案的方法是最优化方法，这种方法的数学理论就是最优化理论。最优化理论和方法是近二、三十年随着电子计算机的普遍应用而发展起来的。正因为最优化的宗旨是追求最优目标，这就决定了它应用的广泛性。可以说，在国民经济各部门和科学技术的各个领域中普遍存在着最优化问题，最优化问题的解决就意味着在相同条件下将获得最优的方案，得到最高的经济效益。目前，最优化在物质调运、自动控制、机械设计、采矿冶金、经济管理和系统工程等方面都已得到卓有成效的应用。我们相信，随着最优化的普及，它将会发挥越来越大的作用。

本书系统地讲述了最优化的基本方法及其理论，可以作为数学专业以及理工科其它专业高年级学生和研究生的教材，也可供高等学校教师、工程技术人员和科研人员自学参考。

编写本书时考虑到以下几点：

（一）力求通俗易懂，深入浅出，适于教学和自学。具有一般微积分、线性代数基础知识的读者都能读懂本书。但是，为照顾到理论的完整性，少部分内容涉及较深的数学知识和复杂的数学推导，书中用*加以注明或列入书末的附录中。这部分内容是写给对最优化理论感兴趣的读者的。每章末配有适量习题，书末附有答案或提示。

（二）在内容上主要选取了经过实践证明比较有效的那样一些方法，凡是选入的方法，都从它的基本想法讲起，详尽论述其理论根据，并有完整的公式推导。使读者对整个算法及其每一步骤的由来尽可能有透彻的了解。

（三）在“实用”二字上下功夫，同时注重理论。对于每种方法都有详细的算法描述，对于较复杂的算法附有框图。在此基础上，读者不难自行编出计算机程序或者读懂由其它文献查来的现成程序。

在我们已经指明某种算法具有收敛性的前提下，从实用的角度出发，关于收敛性的证明就是无关紧要的了。而有关这部分理论一般都是比较繁琐的。根据本书的编写原则，这部分内容不作重点，只是对于几种基本算法的收敛性作了证明。但是，定性地指出每种算法的收敛速度，以供读者选用算法时参考。

本书共分九章，第一章介绍有关最优化的基本概念和数学预备知识，是全书的基础。第二章介绍直线搜索技术，是最优化方法的重要支柱。第三章和第六章是最优化中理论成熟、方法有效的部分。以上四章是初学者必读的内容。至于第四章和第五章是全书相对独立的部分，可以选读。第七章至第九章讲述非线性的约束最优化理论和方法。作为教材，本书可用七十学时讲完。

在本书的编写过程中，得到了南京大学何旭初教授的热情鼓励和指点，在此致以真挚的谢意！

本书的审稿者是东北工学院潘德惠教授和谢绪恺教授，他们在百忙中抽出宝贵的时间认真地审阅了全部稿件，提出不少改进意见。编者向他们表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，书中错误和缺点在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

1982年9月

目　　录

第一章　最优化问题与数学预备知识

最优化，顾名思义，就是追求最好结果或最优目标的学问。大家都有体会，办事情做工作一般总有多种方案可供选择，人们总是设法从中选择能获得最好结果的那一种方案。例如，从甲地到乙地有公路、水路、铁路、航空四种走法。如果我们追求的目标是省钱，那末只要比较一下这四种走法的票价，并且从中选择最便宜的那一种走法就可以了。再如，某种产品有m个产地，有n个销地。如果每个产地的产量和每个销地的销量以及每个产地到各个销地的路程、运费单价都是已知的，那末就存在一个问题：如何调运产品使得总运费最省。以上两个例题都是最优化问题，不过后一个问题，就不是我们直观所能解决的了。

概括地说，所谓最优化就是从所有可能方案中选择最合理的一种以达到最优目标的学科。达到最优目标的方案是最优方案，搜寻最优方案的方法是最优化方法，这种方法的数学理论就是最优化理论。

凡是追求最优目标的数学问题都属于最优化问题。作为最优化问题，至少有两个要素：第一个是可能的方案；第二个是追求的目标。而且后者是前者的“函数”。如果第一个要素与时间无关，那末称为静态最优化问题；否则称为动态最优化问题。本书仅讨论静态问题。

本章将要介绍最优化问题的基本类型以及有关章节所需要的预备知识。

§1.1　经典极值问题

最简单的最优化问题在微积分中已经遇到，就是函数极值问

题。

例1.1 对边长为 a 的正方形铁板，在四个角处剪去相等的正方形以制成方形无盖水槽，问如何剪法使水槽的容积最大？

解 设剪去的正方形边长为 x（图1-1）。与此相应的水槽的容积为

$$f(x)=(a-2x)^2x$$

令
$$f'(x)=2(a-2x)\cdot(-2)\cdot x+(a-2x)^2$$
$$=(a-2x)(a-6x)=0$$

由此解出两个驻点：

$$x=\frac{1}{2}a \text{ 和 } x=\frac{1}{6}a$$

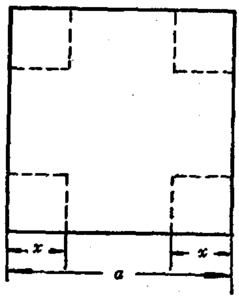


图 1-1

第一个驻点不合实际意义，这是因为剪去4个边长为$\frac{1}{2}a$的正方形相当于将铁板全部剪去。现在来判别第二个驻点是否为极大点。因为

$$f''(x)=24x-8a$$

$$f''\left(\frac{a}{6}\right)=-4a<0$$

说明 $x=\frac{a}{6}$是极大点。结论是，每个角剪去边长为$\frac{a}{6}$的正方形可使所制成的水槽容积最大。 □

例1.2 把半径为1的实心金属球熔化后，铸成一个实心圆柱体，问圆柱体取什么尺寸才能使它的表面积最小？

解 设所铸成的圆柱体的底面半径为 r，高为 h。本问题可以描述成：

$$\min\ 2\pi rh+2\pi r^2$$

满足于
$$\pi r^2h=\frac{4}{3}\pi$$

或 $$r^2h-\frac{4}{3}=0$$

可以采用 Lagrange 乘子法求解这个带有等式约束的函数极值问题。Lagrange 函数是

$$L(r,h,\lambda)=2\pi rh+2\pi r^2-\lambda\left(r^2h-\frac{4}{3}\right)$$

分别对r,h,λ求偏导数，并令其等于零，有

$$\frac{\partial L}{\partial r}=2\pi h+4\pi r-\lambda 2rh=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial h}=2\pi r-\lambda r^2=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=-r^2h+\frac{4}{3}=0$$

由第一、第二两个方程得 $h=2r$，再与第三个方程联立解出

$$r=\sqrt[3]{\frac{2}{3}},\qquad h=2\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$$

此时圆柱体的表面积是$6\pi\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$。 □

以上两个例题都是微积分中典型的极值问题，它们虽然简单，可是代表了经典最优化的两种类型问题及其解法。

第一，无约束极值问题：

$$\min\ f(x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{1.1}$$

$$[\text{或}\ \max\ f(x_1,x_2,\cdots,x_n)]$$

这里的$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是定义在n维空间上的可微函数。

求极值点的方法是：从如下的含有n个未知数$x_1,x_2,\cdots,x_n$的非线性方程组

$$\begin{aligned}&f'_{x_1}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0\\&f'_{x_2}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0\\&\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\&f'_{x_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0\end{aligned} \tag{1.2}$$

中解出驻点，然后判定或验证这些驻点是不是极值点。

第二，具有等式约束的极值问题：

$$\min f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{1.3}$$

$$[\text{或 } \max f(x_1, x_2, \cdots, x_n)]$$

满足于
$$h_j(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0,$$
$$j = 1, 2, \cdots, l \ (l < n)$$

通常采用 Lagrange 乘子法来求解。即把这个问题转化为求 Lagrange 函数

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l)$$

$$= f(x_1, x_2, \cdots, x_n) - \sum_{j=1}^{l} \lambda_j h_j(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

的无约束极值问题。

众所周知，上述极值问题的求解都归结为非线性方程组的求解，只有在极特殊的情形下才能手解出来（指不用电子计算机求解）。正因为如此，通常微积分课本中为数不多的极值题目也大都限制在一元和二元的范围内。

关于极值问题的研究已有几百年的历史了，最早可以追溯到 Descartes和Fermat。随着微积分的成熟，极值理论日趋完善。当代电子计算机出现之后，人们解题的能力空前增强。实际中提出了很多庞大而复杂的极值问题，变量与约束的个数不是几个，而是几十个、几百个、甚至上千个；约束也不限于等式，还出现了不等式。近二、三十年来，人们已经创立了新的理论和方法来求解这种大型问题，这就是近代最优化理论和方法。相对而言，我们把微积分中的极值理论称为“经典”最优化理论。

最优化是一门崭新的学科，有关的理论和方法还没有完善，有许多问题有待解决，目前正处于迅速发展之中。

最优化又称数学规划，它包含线性规划、非线性规划、动态规划、整数规划、几何规划等分支。本书仅涉及前两个分支。

§1.2 最优化问题实例

最优化在物质调运、自动控制、机械设计、采矿冶金、经济管理等科学技术的各个领域中都得到重要的应用。这里列举专业性不强的几个实例。

1.2.1 多参数曲线拟合问题

已知热敏电阻R依赖于温度t的函数关系为

$$R = x_1 \exp\left(\frac{x_2}{t+x_3}\right) \tag{1.4}$$

其中x_1，x_2和x_3是待定的参数。通过实验，测得t和R的15组数据列于表1-1中。

表 1-1

i	t_i	R_i	i	t_i	R_i
1	50	34780	9	90	8261
2	55	28610	10	95	7030
3	60	23650	11	100	6005
4	65	19630	12	105	5147
5	70	16370	13	110	4427
6	75	13720	14	115	3820
7	80	11540	15	120	3307
8	85	9744			

问题是，如何确定参数x_1，x_2和x_3。

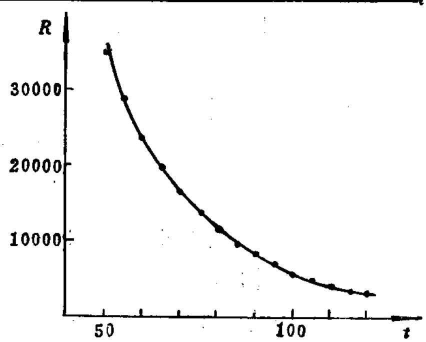


图 1-2

可以设想，对参数x_1，x_2，x_3任意给定一组数值，就由(1.4)确定了R对于t的一个函数关系式。在几何上它对应一条曲线。这条曲线不一定正好通过那些测量点，一般都要产生“偏差”(图1-2)。我们用所有测量点沿铅垂方向到曲线的距离平方和作为这种“偏差”的

度量，即

$$S=\sum_{i=1}^{15}\left[R_i-x_1\exp\left(\frac{x_2}{t_i+x_3}\right)\right]^2$$

显然，偏差S越小，说明曲线拟合得越好，参数值选择得越好。因此，我们的问题转变为三维空间中的无约束最优化问题，即

$$\min\sum_{i=1}^{15}\left[R_i-x_1\exp\left(\frac{x_2}{t_i+x_3}\right)\right]^2$$

1.2.2 生产利润最高问题

某工厂生产n种产品。每种产品都需要m道工序。

已知：（1）第j种单位产品在第i道工序上加工所需要的工时是a_{ij}；

（2）第j种单位产品的利润是c_j；

（3）由于设备的限制，第i道工序每月最多可提供的总工时是b_i。

我们的问题是，如何规划各种产品的数量，使得每月获得的利润最高。

设用x_j表示每月生产第j种产品的数量。因为第j种产品的单位利润是c_j，所以这种产品提供的利润是c_jx_j。显然，总利润应该是$c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_jx_j+\cdots+c_nx_n$。

约束条件有两类：

（1）各工序总工时的限制。

我们知道，生产数量为x_j的第j产品所需第i道工序的工时为$a_{ij}x_j$，而生产这n种产品所需第i道工序的总工时应为

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{ij}x_j+\cdots+a_{in}x_n$$

按已知条件（3），这个和不超过b_i，即

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{ij}x_j+\cdots+a_{in}x_n\leqslant b_i$$

这类约束共有m个。令上式中的下标$i=1,2,\cdots,m$即可得到。

（2）各变量是非负的，即

$$x_j\geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,n$$

综上所述，可以得到生产利润最高问题的如下描述：

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

满足于
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \quad i=1,2,\cdots,m$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j=1,2,\cdots,n$$

1.2.3 两杆桁架的最优设计问题

考虑由空心圆杆所构成的对称两杆桁架（图1-3）。已知：桁架顶点承受的负载为$2p$，支座之间的水平距离为$2L$，圆杆的壁厚为B。此外还已知以下参数：杆的比重为ρ，弹性模量为E，屈服极限为σ。问题是，如何选定圆杆的平均直径d和桁架高度h使得桁架的重量最轻。

桁架的总重量为
$$w=2\pi\rho d B\sqrt{L^2+h^2}$$

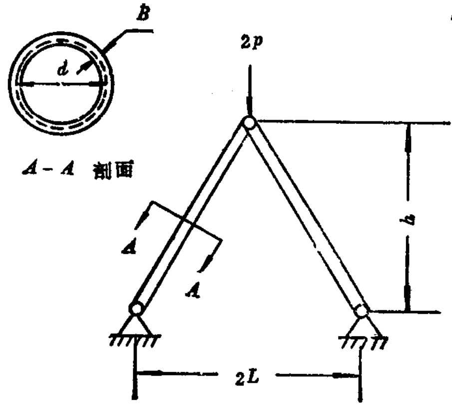


图 1-3

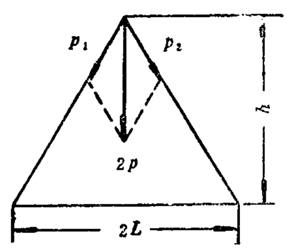


图 1-4

其中变量d和h必须满足以下约束：

（1）圆杆中压应力小于等于材料的屈服极限。由图1-4不难算出负载$2p$在一个杆上的分力为$p_1=\dfrac{p\sqrt{L^2+h^2}}{h}$，而杆的截面积为$\pi d B$，因此压应力为$\dfrac{p\sqrt{L^2+h^2}}{\pi d h B}$。由此得到强度约束