高等学校教材

电磁波理论

卢万铮　汪文秉

电子科技大学出版社

电磁波理论

卢万铮　　汪文秉

电子科技大学出版社
·1991·

高等学校教材

电磁波理论

卢万铮　汪文秉

*

电子科技大学出版社出版
（中国成都市建设北路二段五号）
电子科技大学出版社激光照排中心照排
成都东方彩印厂胶印
四川省新华书店发行

*

开本 787×1092　1/16　印张 16.75　版面字数 404 千字
版次 1991 年 5 月第一版　　印次 1991 年 5 月第一次印刷
印数 1－1200 册
中国标准书号 ISBN 7-81016-263-2/TN・95
（15452・145）　　定价：4.30 元

内容提要

本书讲述电磁场方程及其解，包括各向不均匀媒质中的电磁波，光滑物体的散射与绕射，随机媒质中波的散射和传播，各向异性媒质中的电磁波，非线性媒质和非线性波等内容。有些内容在已有的电磁场理论教材中是少见的。

本书内容丰富，注重理论的系统性和完整性，有部分较深的理论并介绍了较多的研究电磁波的数学方法，可供研究生学习使用。

出 版 说 明

根据国务院关于高等学校教材工作分工的规定，我部承担了全国高等学校、中等专业学校工科电子类专业教材的编审、出版的组织工作。由于各有关院校及参与编审工作的广大教师共同努力，有关出版社的紧密配合，从 1978 年到 1985 年，已编审、出版了两轮教材，正在陆续供给高等学校和中等专业学校教学使用。

为了使工科电子类专业教材能更好地适应“三个面向”的需要，贯彻“努力提高教材质量，逐步实现教材多样化，增加不同品种、不同层次、不同学术观点、不同风格、不同改革试验的教材”的精神，我部所属的七个高等学校教材编审委员会和两个中等专业学校教材编审委员会，在总结前两轮教材工作的基础上，结合教育形势的发展和教学改革的需要，制订了 1986～1990 年的“七五”(第三轮)教材编审出版规划。列入规划的教材、实验教材、教学参考书等近 400 种选题。这批教材的评选推荐和编写工作由各编委会直接组织进行。

这批教材的书稿，是从通过教学实践、师生反映较好的讲义中经院校推荐，由编审委员会(小组)评选择优产生出来的。广大编审者、各编审委员会和有关出版社为保证教材的出版和提高教材的质量，作出了不懈的努力。

限于水平和经验，这批教材的编审、出版工作还会有缺点和不足之处，希望使用教材的单位，广大教师和同学积极提出批评建议，共同为不断提高工科电子类专业教材的质量而努力。

机械电子工业部

电子类教材办公室

前　言

本书是根据电磁场与微波技术教材编审委员会电磁场理论编审小组审定的编写大纲，为电磁场与微波技术专业研究生编写的教材。由电磁场理论教材编审小组择优推荐出版。

本教材参考学时数为40学时，主要介绍散射和绕射理论及电磁波在复杂媒质中的传播。为使本书自成系统，第一章概述了电磁场基本方程。第三章详细讨论了求解光滑物体散射和绕射的解析方法。其余各章介绍电磁波在复杂媒质中的传播，包括不均匀媒质、随机媒质、各向异性媒质和非线性媒质。由于每一章的内容都是电磁场理论的一个重要分支，因此书中涉及的内容十分广泛，由于篇幅所限，对很多内容都难以进行深入的讨论，本书所要达到的目的是使学生了解这些领域研究的主要问题及其所用的数学方法(不讨论数值方法)。对于一些重要的方法，如驻相法、鞍点法、Wiener-Hopf 法等在附录中都作了详细介绍。

书中对时谐场用 $\exp(j\omega t)$ 表示。本课程的前修课为研究生的"电磁场理论"。本教材内容略多于40学时的内容，但各章之间具有相当大的独立性，可根据需要进行取舍。

本书由西安交通大学汪文秉和空军电讯工程学院卢万铮合编。第一、三章和附录D由汪文秉编写，其余部分由卢万铮编写。电子科技大学饶克谨教授担任主审，仔细审阅了本书的初稿和修改稿，提出了许多宝贵意见，在此表示感谢。

由于水平有限，加之时间仓促，错误与不妥之处在所难免，敬请读者批评指正。

编　　者

目　录

第一章　电磁场方程及其解

第二章　各向同性不均匀媒质中的电磁波

第三章　光滑物体的散射与绕射

第四章　随机媒质中波的散射和传播

第五章 各向异性媒质中的电磁波

第六章 非线性媒质和非线性波

附 录

第一章　电磁场方程及其解

作为本书的基础，本章概述麦克斯韦方程及其解的唯一性条件；媒质的宏观电磁特性——本构方程；并矢格林函数及麦克斯韦方程解的积分形式。这章内容是本书的基础，前两节内容在一般的电磁场理论教材中都有详细论述，故这里不作详细讨论而只给出其结果。最后将详细讨论散射理论的积分方程。

1.1　麦克斯韦方程及其解的唯一性条件

在电磁波辐射与散射问题中需计算辐射源在外部环境中产生的电磁场。其周围环境特性由介电常数 ε，磁导率 μ 及电导率 σ 决定。ε、μ 和 σ 一般说来是位置 $\vec{r}$ 的函数。设辐射源用电流密度 $\vec{J}(\vec{r},t)$ 及电荷密度 $\rho(\vec{r},t)$ 来表示，且这些函数是连续可微的，则电磁场将由麦克斯韦方程确定

$$\nabla\times\vec{H}=\partial\vec{D}/\partial t+\vec{J}\tag{1.1.1a}$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\partial\vec{B}/\partial t\tag{1.1.1b}$$

$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho\tag{1.1.1c}$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0\tag{1.1.1d}$$

式中 $\vec{E}$ 为电场强度，$\vec{D}$ 为电位移矢量，$\vec{H}$ 为磁场强度，$\vec{B}$ 为磁感应强度。当媒质是各向同性时，ε、μ 和 σ 为标量，它们的关系由媒质的本构关系表示：

$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}\qquad\vec{B}=\mu\vec{H}\qquad\vec{J}=\sigma\vec{E}\tag{1.1.2}$$

当媒质是各向异性时，$\bar{\varepsilon}$ 和 $\bar{\mu}$ 为并矢

$$\vec{D}=\bar{\varepsilon}\cdot\vec{E}\qquad\vec{B}=\bar{\mu}\cdot\vec{H}\tag{1.1.3}$$

一般情况下，$\vec{D}$ 和 $\vec{B}$ 可能同时依赖于 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$

$$\begin{aligned}\vec{D}&=\bar{\varepsilon}\cdot\vec{E}+\bar{\xi}\cdot\vec{H}\\ \vec{B}&=\bar{\zeta}\cdot\vec{E}+\bar{\mu}\cdot\vec{H}\end{aligned}\tag{1.1.4}$$

$\bar{\xi}$ 和 $\bar{\zeta}$ 称为磁电并矢，此时媒质是双各向异性的。本构关系除了用 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 来表示 $\vec{D}$ 和 $\vec{B}$ 外，还可以有其它的表示法，如用 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 来表示 $\vec{D}$ 和 $\vec{H}$

$$\begin{aligned}c\vec{D}&=\bar{P}\cdot\vec{E}+\bar{L}\cdot c\vec{B}\\ \vec{H}&=\bar{M}\cdot\vec{E}+\bar{Q}\cdot c\vec{B}\end{aligned}\tag{1.1.4a}$$

式中 c 为真空中的光速。本构关系(1.1.2)～(1.1.4)表示了同一时刻场量之间的关系，仅在场量变化缓慢时才是有效的。对于迅速变化的场，媒质的特性不仅取决于当前时刻 t 的场，而且与 t 之前的场有关。对于线性的时变媒质，$\vec{D}(t)$ 和 t 之前所有时间的 $\vec{E}(t)$ 间的关系可以写成下面的积分形式

$$\vec{D}(t)=\vec{E}(t)+\int_0^{\infty}f(\tau)\vec{E}(t-\tau)\mathrm{d}\tau\tag{1.1.5}$$

$f(\tau)$ 是时间及媒质特性的函数。上式也可以写成(1.1.2)的形式 $\vec{D}=\hat{\varepsilon}\vec{E}$，$\hat{\varepsilon}$ 是式(1.1.5)中的

积分算子。任何时变场可以用 Fourier 变换展开为单色场的级数，这些单色场与时间的相依关系为 $\exp(j\omega t)$。对于这些单色场，式(1.1.5)可以写成

$$\vec{D}=\varepsilon(\omega)\vec{E} \tag{1.1.5a}$$

函数 $\varepsilon(\omega)$ 定义为

$$\varepsilon(\omega)=1+\int_0^{\infty}f(\tau)\exp(-j\omega\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.1.5b}$$

ε 和 ω 的关系式(1.1.5b)称为色散关系，此时媒质是时间色散或频率色散的，或简称色散的(本书不讨论空间色散的情况)。$\vec{B}$ 和 $\vec{H}$ 也可以有类似的关系。非线性媒质的情况在第六章再讨论。

对式(1.1.1a)两边取散度得

$$\nabla\cdot(\partial\vec{D}/\partial t)+\nabla\cdot\vec{J}=0$$

考虑到式(1.1.1c)有

$$\nabla\cdot\vec{J}=-\partial(\nabla\cdot\vec{D})/\partial t=-\partial\rho/\partial t \tag{1.1.6}$$

这是电荷守恒定律的表达形式。可见麦克斯韦方程中隐含着电荷守恒定律。另外，由式(1.1.1)和(1.1.2)可得 17 个标量方程，由于 $\nabla\cdot\vec{B}=0$ 不独立，故有 16 个标量方程，而未知数正好也是 16 个($\vec{E}$、$\vec{D}$、$\vec{B}$、$\vec{H}$、$\vec{J}$、ρ 等)，问题得到解决。

当场源随时间作正弦变化时，设角频率为 ω，随时间变化的因子为 $\exp(j\omega t)$，则式(1.1.1)和(1.1.2)可写成

$$\nabla\times\vec{H}=j\omega\varepsilon\vec{E}+\vec{J}=j\omega\vec{D}+\vec{J} \tag{1.1.7a}$$

$$\nabla\times\vec{E}=-j\omega\mu\vec{H}=-j\omega\vec{B} \tag{1.1.7b}$$

两个散度方程不再需要，因为 $\nabla\cdot\vec{B}=0$ 可由 $\nabla\times\vec{E}=-j\omega\vec{B}$ 满足；至于 $\nabla\cdot\vec{D}=\rho$，由于 ρ 可由 $\vec{J}$ 决定因而也不再需要了。当媒质导电时，式(1.1.7)仍适用，将(1.1.2)第三式代入可得

$$\nabla\times\vec{H}=j\omega\varepsilon\vec{E}+\sigma\vec{E}=j\omega(\varepsilon+\sigma/j\omega)\vec{E}=j\omega\dot{\varepsilon}\vec{E} \tag{1.1.8}$$

$\dot{\varepsilon}=\varepsilon+\sigma/j\omega$ 称为复介电常数，在以后的应用中常省去上标“·”。

方程(1.1.7)的解的存在性的证明可在 Müller, cl. 的专著*中找到。解的存在性和唯一性可表述如下：在具有可微边界的有限空间中方程(1.1.7)总存在 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 的解，只要 $\vec{E}$ 或 $\vec{H}$ 的切向分量在包围此空间的边界表面上取给定值，或者给定 $\vec{E}$ 及 $\vec{H}$ 的线性组合 $\vec{F}(\vec{r})$ 的切向分量.

$$\vec{F}(\vec{r})=\vec{E}(\vec{r})e(\vec{r})+\vec{H}(\vec{r})h(\vec{r}) \tag{1.1.9}$$

$e,h\neq 0$ 为任意实数，而且这个解是唯一的。

实际情况常是在一均匀媒质中有一不同于周围媒质参数的物体，在此物体的边界上，媒质参数 ε、μ 不连续。这与上面的情况不同，上面 ε、μ 虽然是空间位置的函数，但是连续可微的，因而以上得到的结果不适用。在目前的情况下，在不同媒质交界处，场必须满足边界条件，即 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 在边界面的切向分量连续，即

$$\hat{n}\times\vec{E}_1=\hat{n}\times\vec{E}_2 \qquad \hat{n}\times\vec{H}_1=\hat{n}\times\vec{H}_2 \tag{1.1.10}$$

$\hat{n}$ 为物体表面的法向单位矢量。若物体由金属导体构成，且认为是理想导体，则在其表面有

* Müller, cl. "Foundation of the Mathematical Theory of Electromagnetic Waves", Spring-Verlag Berlin. Heidelberg, New York, 1969.

$$\hat{n} \times \vec{E} = 0 \qquad \hat{n} \times \vec{H} = \vec{J} \tag{1.1.11}$$

此时麦克斯韦方程的解应满足式(1.1.10)或(1.1.11)。

若讨论的区域不是有限的，即边界在无限远，在无限远处仅要求场为零是不够的，还必须要求在有限区域内源辐射的能量在穿过远处边界时是向外发散到无限远的，即要求源及散射体共同形成的场的玻印廷矢量在无限远处方向是向外的。在包括无限远的情况下，为了保证解的唯一性，场必须满足以下条件

$$\lim_{r\to\infty} r[\vec{E}/\sqrt{\mu/\varepsilon} + \hat{n} \times \vec{H}] = 0 \qquad \lim_{r\to\infty} r|\vec{E}| \text{ 有限}$$

$$\lim_{r\to\infty} r[\hat{n} \times \vec{E}/\sqrt{\mu/\varepsilon} - \vec{H}] = 0 \qquad \lim_{r\to\infty} r|\vec{H}| \text{ 有限} \tag{1.1.12}$$

这些条件称为辐射条件。该条件要求在远离场源处，场矢量的幅度至少按 r^{-1} 减小。式中 $\hat{n}=\vec{r}/|\vec{r}|$。

我们还会遇到散射体表面具有肋边或棱角(即表面上存在某些线段，沿这些线段表面的法线方向发生突变)的情况。在这种情况下，肋边或棱角上的场将会出现奇异值，就象静电场在带电体尖端出现奇点一样。为了保证场的唯一性，必须补充新的条件——边缘条件。下面我们给出薄板的边缘条件。如图 1.1.1，板的边缘为 K，其上取一点 A，以 A 为原点取坐标系如图。y 为 A 点上边缘 K 的切线，z 垂直于板表面，$\hat{x}$ 取 $\hat{y}\times\hat{z}$ 方向。A 点的电场强度分量为 $E_x=(\hat{x}\cdot\vec{E})$，$E_y=(\hat{y}\cdot\vec{E})$，$E_z=(\hat{z}\cdot\vec{E})$。$E_y$ 称为切向分量，E_z、E_x 称为法向分量。以 A 为圆心，ρ 为半径在 xz 平面作一圆，则边缘边界条件是 $\vec{E}$、$\vec{H}$ 的切向分量在 K 上有界；而法向分量在 A 点附近以 $\rho^{-\alpha}$ 的量级变化，即奇性是 $\rho^{-\alpha}$ 量级，$\alpha<1$。若板边缘用一半径为 ρ、以边缘为轴的圆柱代替，如图中所示，薄板边缘相当于 $\rho\to0$ 的情况。边缘边界条件的实质是要求穿过环形柱面的功率流在 $\rho\to0$ 时有

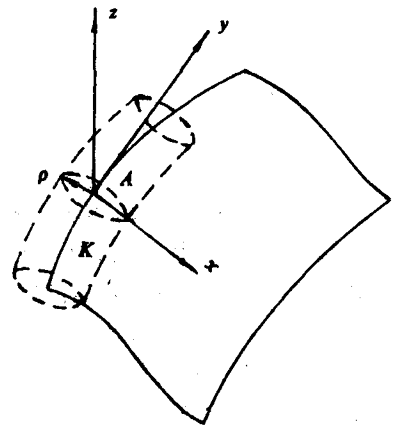

图 1.1.1 说明薄板边缘条件用图

$$\frac{1}{4}\lim_{\rho\to0}\rho[\vec{E}\times\vec{H}^{*}+\vec{E}^{*}\times\vec{H}]_{\rho}=0 \tag{1.1.13}$$

边缘条件也可以从另外的角度来提出*可以要求能量密度在边缘周围空间可积，即在一定区域中能量有限。因为体积单元具有因子 ρ，因此边缘电场强度的平方应具有 $\rho^{-2\alpha}$ 形式的奇异性，$\alpha<1$。由此得到与式(1.1.13)相同的结果。α 的确定可以将场量在边缘周围用 ρ 的级数展开，代入麦克斯韦方程，由薄板表面的边界条件($\vec{E}$ 的切向分量为零)可得只有半阶项，由此知 $\alpha<1/2$**。

* Meixner J., Zs Naturforsh., 3a, 506 (1948).

** Meixner J., Annd. phys. Vol. 6, 2 (1949).

1.2 并矢格林函数及麦克斯韦方程的积分形式

由麦克斯韦方程有

$$\nabla\times\left[\frac{1}{\varepsilon}\nabla\times\vec{H}\right]=j\omega\nabla\times\vec{E}+\nabla\times(\vec{J}/\varepsilon)=\omega^2\mu\vec{H}+\nabla\times(\vec{J}/\varepsilon)\quad(1.2.1a)$$

$$\nabla\times\left[\frac{1}{\mu}\nabla\times\vec{E}\right]=-j\omega\nabla\times\vec{H}=-j\omega(j\omega\varepsilon)\vec{E}-j\omega\vec{J}=\omega^2\varepsilon\vec{E}-j\omega\vec{J}\quad(1.2.1b)$$

对于均匀媒质有

$$\nabla\times\nabla\times\vec{H}=\omega^2\mu\varepsilon\vec{H}+\nabla\times\vec{J}=k^2\vec{H}+\nabla\times\vec{J}\quad(1.2.2a)$$

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E}=\omega^2\mu\varepsilon\vec{E}-j\omega\mu\vec{J}=k^2\vec{E}-j\omega\mu\vec{J}\quad(1.2.2b)$$

现在来求解上述方程。为求有限空间内在边界上满足式(1.1.9)～(1.1.13)所述的边界条件的解，常运用格林函数。格林函数表示一个点源在一定边界条件下所产生的场。借助格林函数可把一微分方程的边值问题转变为一积分方程的问题。还可以利用场方程的线性将一非齐次边界条件的非齐次方程的求解问题化为齐次边界条件下非齐次方程的解和非齐次边界条件下齐次方程的解之和。我们不介绍标量格林函数，主要给出有关并矢格林函数的一些结果。并矢格林函数 $\overline{G}(\vec{r}|\vec{r}')$ 是以下方程的解

$$\nabla\times\nabla\times\overline{G}(\vec{r}|\vec{r}')-k^2\overline{G}(\vec{r}|\vec{r}')=-\overline{I}\delta(\vec{r}-\vec{r}')\quad(1.2.3)$$

$\vec{r}$ 为场点坐标，$\vec{r}'$ 为源点坐标。$\overline{G}(\vec{r}|\vec{r}')$ 由它在某一表面或经过不连续面时必须满足的基本边界条件来进行分类。

在无界空间，媒质均匀的条件下，满足辐射边界条件

$$\lim_{r\to\infty}r[\nabla\times\overline{G}(\vec{r}|\vec{r}')+jk\hat{r}\times\overline{G}(\vec{r}|\vec{r}')]=0\quad(1.2.4)$$

的并矢格林函数用 $\overline{G}_0(\vec{r}|\vec{r}')$ 表示，则

$$\overline{G}_0(\vec{r}|\vec{r}')=\left(\overline{I}+\frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right)G_0(\vec{r}|\vec{r}')\quad(1.2.5)$$

式中 $G_0(\vec{r}|\vec{r}')$ 为无限大均匀媒质中的标量格林函数，它是方程

$$(\nabla^2+k^2)G_0(\vec{r}|\vec{r}')=\delta(\vec{r}-\vec{r}')\quad(1.2.6)$$

在辐射边界条件下的解

$$G_0(\vec{r}|\vec{r}')=\exp[-jk|\vec{r}-\vec{r}'|]/4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|\quad(1.2.7)$$

并矢格林函数求得后，由任意电流分布产生的场可用叠加原理借助积分求得。由矢量格林公式

$$\int_V(\vec{P}\cdot\nabla\times\nabla\times\vec{Q}-\vec{Q}\cdot\nabla\times\nabla\times\vec{P})\mathrm{d}V=\oint_S(\vec{Q}\times\nabla\times\vec{P}-\vec{P}\times\nabla\times\vec{Q})\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

由 $\vec{P}=\vec{E}(\vec{r})$，$\vec{Q}=\overline{G}_0(\vec{r}|\vec{r}')\cdot\hat{a}$，$\hat{a}$ 为一常矢量，则有

$$\int_V\{\vec{E}(\vec{r})\cdot\nabla\times\nabla\times\overline{G}_0(\vec{r}|\vec{r}')\cdot\hat{a}-[\overline{G}_0(\vec{r}|\vec{r}')\cdot\hat{a}]\cdot\nabla\times\nabla\times\vec{E}(\vec{r})\}\mathrm{d}V$$

$$=\oint_S\{[\overline{G}_0(\vec{r}|\vec{r}')\cdot\hat{a}]\times\nabla\times\vec{E}(\vec{r})-\vec{E}(\vec{r})\times\nabla\times[\overline{G}_0(\vec{r}|\vec{r}')\cdot\hat{a}]\}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\quad(1.2.8)$$

S 为均匀媒质中任一闭合表面，$\mathrm{d}\vec{S}$ 取外法线方向。考虑到式(1.2.2)和(1.2.3)，有

$$-\vec{E}(\vec{r}')\cdot\hat{a}=-j\omega\mu\int_V\vec{J}(\vec{r})\cdot\overline{G}_0(\vec{r}|\vec{r}')\cdot\hat{a}\mathrm{d}V$$

$$
-\oint_S \{[\hat{n}\times\nabla\times\vec{E}(\vec{r})]\cdot[\overline{G}_0(\vec{r}|\vec{r}')\cdot\hat{a}]
+[\hat{n}\times\vec{E}(\vec{r})]\cdot\nabla'\times[\overline{G}_0(\vec{r}|\vec{r}')\cdot\hat{a}]\}\mathrm{d}S
$$

将带撇与不带撇的变量交换，考虑到并矢格林函数的对称性，在等式两边约去常矢量 $\hat{a}$ 得

$$
\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r}) = {} & j\omega\mu\int_V \overline{G}(\vec{r}|\vec{r}')\cdot\vec{J}(\vec{r}')\mathrm{d}V' \\
& +\oint_S\{[\hat{n}\times\nabla'\times\vec{E}(\vec{r}')]\cdot\overline{G}_0(\vec{r}|\vec{r}') \\
& +\hat{n}\times\vec{E}(\vec{r}')\cdot\nabla'\times\overline{G}_0(\vec{r}|\vec{r}')\}\mathrm{d}S'
\end{aligned}
\tag{1.2.9}
$$

∇' 表示对带撇号的变量运算。由此获得 $\vec{E}(\vec{r})$ 的表示式。只要知道 $\vec{J}(\vec{r}')$ 及 S 面上的 $\vec{E}(\vec{r}')$ 和 $\vec{H}(\vec{r}')$ 的切向分量，就可以求得 S 面内各点的 $\vec{E}(\vec{r})$。若把 S 面扩展至无穷远，并考虑到 $\vec{J}(\vec{r}')$ 在有限空间，$\vec{E}(\vec{r})$ 及 $\vec{H}(\vec{r})$ 满足辐射条件，则式(1.2.9)中的面积分为零，从而有

$$
\vec{E}(\vec{r}) = j\omega\mu\int_V \overline{G}_0(\vec{r}|\vec{r}')\cdot\vec{J}(\vec{r}')\mathrm{d}V' \tag{1.2.10}
$$

若考虑闭合面 S_1 与 S_2 之间的体积 V(S_2 包围 S_1)，且电流源限定在 S_1 内，则

$$
\vec{E}(\vec{r}) = \int_{S_1+S_2}\{-j\omega\mu[\hat{n}\times\vec{H}(\vec{r}')\cdot\overline{G}_0(\vec{r}|\vec{r}')]+[\hat{n}\times\vec{E}(\vec{r}')]\cdot\nabla'\times\overline{G}_0(\vec{r}|\vec{r}')\}\mathrm{d}S' \tag{1.2.11}
$$

S_1 的法线应取内法线方向。上式考虑了 $\nabla\times\vec{E}=-j\omega\mu\vec{H}$。若 S_2 扩展至无穷，则

$$
\vec{E}(\vec{r}) = \int_{S_1} -\{j\omega\mu[\hat{n}\times\vec{H}(\vec{r}')]\cdot\overline{G}_0(\vec{r}|\vec{r}')-[\hat{n}\times\vec{E}(\vec{r}')\cdot\nabla'\times\overline{G}_0(\vec{r}|\vec{r}')]\}\mathrm{d}S' \tag{1.2.12}
$$

上式已将 S_1 的法线改为外法线方向。

对于磁场强度类似地可得

$$
\begin{aligned}
\vec{H}(\vec{r}) = {} & -\int_V \overline{G}_0(\vec{r}|\vec{r}')\cdot\nabla'\times\vec{J}(\vec{r}')\mathrm{d}V' \\
& +\oint_S\{j\omega\varepsilon\overline{G}_0(\vec{r}|\vec{r}')\cdot[\hat{n}\times\vec{E}(\vec{r}')] \\
& +\nabla'\times\overline{G}_0(\vec{r}|\vec{r}')\cdot[\hat{n}\times\vec{H}(\vec{r}')]\mathrm{d}S'
\end{aligned}
\tag{1.2.13}
$$

若空间存在散射体，设为完纯导体，则在导体表面 S_d 上 $\hat{n}\times\vec{E}(\vec{r})=0$。在这种情况下求麦克斯韦方程的解时仍可应用式(1.2.12)。通常取 S_1 为 S_d，而并矢格林函数仍用 $\overline{G}_0(\vec{r}|\vec{r}')$。但也可以不选用 $\overline{G}_0(\vec{r}|\vec{r}')$，而选用一在 S_d 面上满足 $\hat{n}\times\vec{E}(\vec{r})=0$ 条件的并矢格林函数 $\overline{G}(\vec{r}|\vec{r}')$。应用 $\overline{G}(\vec{r}|\vec{r}')$ 于 S_d 及包围 S_d 的另一闭合面 S_∞ 共同包围的空间 V 中，与前类似地应用矢量格林公式，令 $\vec{Q}=\overline{G}(\vec{r}|\vec{r}')\cdot\hat{a}$，可得

$$
\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r}) = {} & j\omega\mu\int_V \overline{G}(\vec{r}|\vec{r}')\cdot\vec{J}(\vec{r}')\mathrm{d}V' \\
& +\int_{S_d+S_\infty}\{\nabla'\times\overline{G}(\vec{r}|\vec{r}')\cdot[\hat{n}\times\vec{E}(\vec{r}')] \\
& +\hat{n}\times\overline{G}(\vec{r}|\vec{r}')\cdot[-j\omega\mu\vec{H}(\vec{r})]\}\mathrm{d}S'
\end{aligned}
\tag{1.2.14}
$$

令 S_∞ 扩展至无限远并考虑到 $\vec{E}$、$\vec{H}$、$\overline{G}$ 均满足辐射条件，则

$$
\vec{E}(\vec{r}) = j\omega\mu\int_V \overline{G}(\vec{r}|\vec{r}')\cdot\vec{J}(\vec{r}')\mathrm{d}V' + \int_{S_d} -\hat{n}\times\overline{G}(\vec{r}|\vec{r}')\cdot[j\omega\mu\vec{H}(\vec{r}')]\mathrm{d}S'
$$

若 $\hat{n}\times\overline{G}(\vec{r}|\vec{r}')$ 在 S_t 上满足为零的条件，则

$$\vec{E}(\vec{r}) = j\omega\mu\int_V \overline{G}(\vec{r}|\vec{r}')\cdot\vec{J}(\vec{r}')\mathrm{d}V' \tag{1.2.15}$$

对于 $\vec{H}(\vec{r})$，选择并矢格林函数，使它在 S_t 上有 $\hat{n}\times[\nabla\times\overline{G}(\vec{r}|\vec{r}')]=0$，则

$$\vec{H}(\vec{r}) = -\int_V \overline{G}(\vec{r}|\vec{r}')\cdot\nabla\times\vec{J}(\vec{r}')\mathrm{d}V' \tag{1.2.16}$$

式(1.2.15)及(1.2.16)中的并矢格林函数是不同的，但有联系。这里我们看到利用并矢格林函数将(1.2.2)方程的边值问题变成相应边界条件下方程(1.2.3)的边值问题。

1.3 散射理论的积分方程

典型的散射通常是将一媒质为均匀的散射体置于一均匀无限大媒质中，其场量的计算常为求解一个积分方程的问题。下面讨论积分方程的建立。

考虑图 1.3.1 的情况，闭合面 S 把空间分为两个区域，S 面内及 S 面外。面内有源 $\vec{J}_i$，面外有源 $\vec{J}_e$，$\vec{J}_e$ 不在无限远处。由式(1.2.10)有

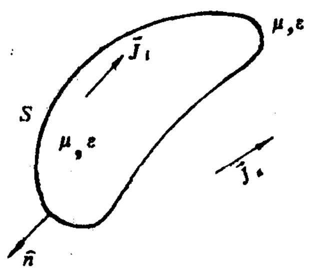

图 1.3.1 闭合面 S 把空间分为两个区域

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= j\omega\mu\int_V \overline{G}_0(\vec{r}|\vec{r}')\cdot\vec{J}\mathrm{d}V' \\ \vec{J}(\vec{r}) &= \vec{J}_i(\vec{r}) + \vec{J}_e(\vec{r})\end{aligned} \tag{1.3.1}$$

也可由式(1.2.12)得 S 面内场及 S 面外场。经过简单的矢量、并矢运算，在 S 面外可得

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) = {} & j\omega\mu\int_V \overline{G}_0(\vec{r}|\vec{r}')\cdot\vec{J}_e\mathrm{d}V' \\ & + \oint_S\{-j\omega\mu[\hat{n}\times\vec{H}(\vec{r}')]G_0(\vec{r}|\vec{r}') \\ & + [\hat{n}\times\vec{E}(\vec{r}')]\times\nabla'G_0(\vec{r}|\vec{r}') \\ & + \frac{1}{j\omega\varepsilon}[\hat{n}\cdot\nabla'\times\vec{H}(\vec{r}')]\nabla'G_0(\vec{r}|\vec{r}')\}\mathrm{d}S'\end{aligned} \tag{1.3.2}$$

在 S 面内有

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) = {} & j\omega\mu\int_V \overline{G}_0(\vec{r}|\vec{r}')\cdot\vec{J}_i\mathrm{d}V' \\ & + \oint_S\{j\omega\mu[\hat{n}\times\vec{H}(\vec{r}')]G_0(\vec{r}|\vec{r}') - [\hat{n}\times\vec{E}(\vec{r}')]\times\nabla'G_0(\vec{r}|\vec{r}') \\ & - \frac{1}{j\omega\varepsilon}[\hat{n}\cdot\nabla'\times\vec{H}(\vec{r}')]\nabla'G_0(\vec{r}|\vec{r}')\}\mathrm{d}S'\end{aligned} \tag{1.3.3}$$

上两式也可直接应用矢量位及标量位求得。式(1.3.2)是我们熟悉的 Huygans 原理的结果。

若 $\vec{r}$ 位于 S 面上，且 $\vec{J}_e$(或 $\vec{J}_i$)已知，则式(1.3.2)和式(1.3.3)是 S 面上场量的积分方程。通过解此方程就可求出 S 面上的 $\vec{E}$(或 $\vec{H}$)，从而可求出空间各点的场强。但若 $\vec{E}(\vec{r})$ 位于 S 面上，会出现 $|\vec{r}-\vec{r}'|=0$ 的情况。对于式(1.3.2)和式(1.3.3)中诸积分项有两类，一类具有 $G_0(\vec{r}|\vec{r}')$ 项，一类具有 $\nabla'G_0(\vec{r}|\vec{r}')$ 项。由于 $G_0(\vec{r}|\vec{r}')$ 具有 $1/|\vec{r}-\vec{r}'|$ 形式的奇性，因此当 $\vec{r}$ 趋于 $\vec{r}'$ 时积分为趋于一极限值的旁义积分。对于包含 $\nabla'G_0(\vec{r}|\vec{r}')$ 的项则并非如此。这些积分的形式为 $\int_S f(\vec{r}')\nabla'G_0(\vec{r}|\vec{r}')\mathrm{d}S'$。当 $\vec{r}$ 在 S 面上时，我们在 $\vec{r}$ 点附近取一小环，小环半径为 A，

法线方向为 z。考察 $\vec{r}'$ 在小环上当环半径 A 趋于零时上述积分是否趋于一个极限(图 1.3.2)。$\vec{r}'$ 的坐标为 (A,φ,z)，坐标原点为 $\vec{r}$，则

$$\nabla G_0(\vec{r}|\vec{r}') = \left(\hat{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \hat{\varphi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)G_0(\vec{r}|\vec{r}')$$

$$G_0(\vec{r}|\vec{r}') = \exp[-jk|\vec{r}-\vec{r}'|]/4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|$$

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = (\rho^2+z^2)^{1/2}$$

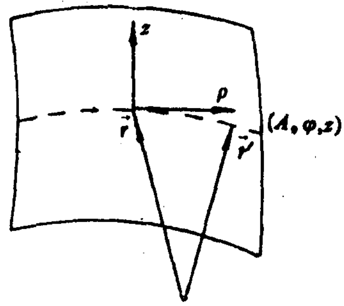

图 1.3.2　$\vec{r}$ 点附近的小环及局部坐标系

对于 ∇G_0 的 S 面的切向分量，仍是一个存在极限的旁义积分。但对于法向分量即 z 分量则不然。其最高阶奇性项为 $2z/(\rho^2+z^2)^{3/2}$，故 A 很小时

$$\begin{aligned}\int_S f(\vec{r}')\nabla_z G_0(\vec{r}|\vec{r}')\mathrm{d}S' &\approx f(\vec{r})\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^A \rho\mathrm{d}\rho 2z/(\rho^2+z^2)^{3/2} \\ &= f(\vec{r})2\pi\left.\frac{-z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\right|_0^A \\ &= f(\vec{r})2\pi z\left[\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{A^2+z^2}}\right]\end{aligned}$$

当 $z\to 0$ 时

$$\lim_{z\to 0} f(\vec{r})2\pi z\left[\frac{1}{|z|} - \frac{1}{A}\right] = f(\vec{r})\frac{2\pi z}{|z|} \tag{1.3.4}$$

可见从 $+z$ 或 $-z$ 趋于零时极限不等，故积分不连续。这种情况下我们取此条件下积分从两侧趋近时所得极限的算术平均值。取 $\vec{r}$ 位于 S 面上，将式(1.3.2)减去式(1.3.3)得

$$\begin{aligned}&j\omega\mu\int_V \overline{G}_0(\vec{r}|\vec{r}')\cdot(\vec{J}_a - \vec{J}_i)\mathrm{d}V' - 2j\omega\mu\oint_S[\hat{n}\times\vec{H}(\vec{r}')]G_0(\vec{r}|\vec{r}')\mathrm{d}S' \\ &+ 2\oint_S[\hat{n}\times\vec{E}\times\nabla' G_0(\vec{r}|\vec{r}')\mathrm{d}S' + \frac{2}{j\omega\varepsilon}\oint_S[\hat{n}\cdot\nabla\times\vec{H}(\vec{r}')]\nabla' G_0(\vec{r}|\vec{r}')\mathrm{d}S' = 0\end{aligned} \tag{1.3.5}$$

因为由式(1.3.1)有

$$j\omega\mu\int_V \overline{G}_0(\vec{r}|\vec{r}')\cdot(\vec{J}_a - \vec{J}_i)\mathrm{d}V' = -\vec{E}(\vec{r}) + 2j\omega\mu\int_V \overline{G}_0(\vec{r}|\vec{r}')\cdot\vec{J}_a\mathrm{d}V'$$

或

$$j\omega\mu\int_V \overline{G}_0(\vec{r}|\vec{r}')\cdot(\vec{J}_a - \vec{J}_i)\mathrm{d}V' = \vec{E}(\vec{r}) - 2j\omega\mu\int_V \overline{G}_0(\vec{r}|\vec{r}')\cdot\vec{J}_i\mathrm{d}V'$$

故得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\vec{E}(\vec{r}) - j\omega\mu\int_V \overline{G}_0(\vec{r}|\vec{r}')\cdot\vec{J}_i\mathrm{d}V' \\ &= -\frac{1}{2}\vec{E}(\vec{r}) + j\omega\mu\int_V \overline{G}_0(\vec{r}|\vec{r}')\cdot\vec{J}_a\mathrm{d}V' \\ &= j\omega\mu\oint_S[\hat{n}\times\vec{H}(\vec{r}')]G_0(\vec{r}|\vec{r}')\mathrm{d}S' - \oint_S[\hat{n}\times\vec{E}(\vec{r})]\times\nabla' G_0(\vec{r}|\vec{r}')\mathrm{d}S' \\ &\quad - \frac{1}{j\omega\varepsilon}\oint_S[\hat{n}\cdot\nabla\times\vec{H}(\vec{r}')]\nabla' G_0(\vec{r}|\vec{r}')\mathrm{d}S'\end{aligned} \tag{1.3.6}$$

对于散射问题，辐射源总在闭合面外，而散射体位于闭合面内，散射体的本构参数 μ、ε 与外部空间不同。而 S 面通常取散射体的外表面。当散射体不存在时辐射源产生的场

$$\vec{E}_0 = j\omega\mu \int_V \overline{G}_0(\vec{r}|\vec{r}') \cdot \vec{J}_s \mathrm{d}V'$$

通常称为投射波或一次波。当散射体存在时，并假设散射体的存在不影响源电流的分布，则在 S 面上场的切向分量为

$$\vec{E}_t(\vec{r}) = 2\vec{E}_{0t}(\vec{r}) - 2j\omega\mu \oint_{S_t} [\hat{n} \times \vec{H}(\vec{r}')] G_0(\vec{r}|\vec{r}') \mathrm{d}S' + 2\oint_S (\hat{n} \times \vec{E}) \times \nabla' G_0(\vec{r}|\vec{r}') \mathrm{d}S' + \frac{2}{j\omega\varepsilon} \oint_{S_t} [\hat{n} \cdot \nabla \times \vec{H}(\vec{r}')] \nabla' G_0(\vec{r}|\vec{r}') \mathrm{d}S' \tag{1.3.7}$$

下标 t 均表示切向分量。上式是关于 $\vec{E}$ 的切向分量的积分方程。对于 $\vec{H}$ 的切向分量类似地可写为

$$\vec{H}_t(\vec{r}) = 2\vec{H}_{0t}(\vec{r}) + 2j\omega\varepsilon \oint_{S_t} [\hat{n} \times \vec{E}(\vec{r}')] G_0(\vec{r}|\vec{r}') \mathrm{d}S' - 2\oint_{S_t} [\hat{n} \times \vec{H}(\vec{r}')] \times \nabla' G_0(\vec{r}|\vec{r}') \mathrm{d}S' - \frac{2}{j\omega\mu} \oint_{S_t} \nabla' G_0(\vec{r}|\vec{r}') [\hat{n} \cdot \nabla \times \vec{E}(\vec{r})] \mathrm{d}S' \tag{1.3.8}$$

由于介质散射体内也有场，故还须讨论内表面的场。将式(1.3.6)用于由散射体媒质充满的无限空间，在散射体内表面，因为 $\vec{J}_i = 0$，故在 S 面上的场为

$$\vec{E}_t(\vec{r}) = 2j\omega\mu \oint_{S_t} [\hat{n} \times \vec{H}(\vec{r}')] G_i(\vec{r}|\vec{r}') \mathrm{d}S' - 2\oint_{S_t} (\hat{n} \times \vec{E}) \times \nabla' G_i(\vec{r}|\vec{r}') \mathrm{d}S' - \frac{2}{j\omega\varepsilon} \oint_{S_t} \nabla' G_i(\vec{r}|\vec{r}') [\hat{n} \cdot \nabla \times \vec{H}(\vec{r})] \mathrm{d}S' \tag{1.3.9}$$

$$\vec{H}_t(\vec{r}) = 2j\omega\varepsilon \oint_{S_t} [\hat{n} \times \vec{E}(\vec{r}')] G_i(\vec{r}|\vec{r}') \mathrm{d}S' - 2\oint_{S_t} [\hat{n} \times \vec{H}(\vec{r}')] \times \nabla' G_i(\vec{r}|\vec{r}') \mathrm{d}S' - \frac{2}{j\omega\mu} \oint_{S_t} \nabla' G_i(\vec{r}|\vec{r}') [\hat{n} \cdot \nabla \times \vec{E}(\vec{r})] \mathrm{d}S' \tag{1.3.10}$$

式(1.3.9)～(1.3.10)中的 μ、ε 应为散射体的媒质参量。至此，我们获得了求解散射问题的四个积分方程。介质散射体的散射问题可由这些方程及界面边界条件求解。

若散射体为理想导体，则 $E_t \doteq 0$，由式(1.3.8)得

$$\vec{H}_t(\vec{r}) = 2\vec{H}_{0t}(\vec{r}) - 2\oint_{S_t} [\hat{n} \times \vec{H}(\vec{r}')] \times \nabla' G_0(\vec{r}|\vec{r}') \mathrm{d}S' \tag{1.3.11}$$

由式(1.3.7)有

$$2\vec{E}_{0t}(\vec{r}) - 2j\omega\mu \oint_{S_t} [\hat{n} \times \vec{H}(\vec{r}')] G_0(\vec{r}|\vec{r}') \mathrm{d}S' + \frac{2}{j\omega\varepsilon} \oint_{S_t} \nabla' G_0(\vec{r}|\vec{r}') [\hat{n} \cdot \nabla \times \vec{H}(\vec{r}')] \mathrm{d}S' = 0 \tag{1.3.12}$$

散射问题的严格求解可归结为求解前述积分方程。用数值方法计算散射量很多是以此为出发点。

第二章 各向同性不均匀媒质中的电磁波

要研究非均匀媒质中电磁场的准确特性是很困难的，当媒质不导电时，对简谐场，无源区的麦克斯韦方程为

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E} \tag{2.0.1a}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \tag{2.0.1b}$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon\vec{E}) = 0 \tag{2.0.1c}$$

$$\nabla \cdot (\mu\vec{H}) = 0 \tag{2.0.1d}$$

式中 ε 和 μ 均为空间位置的函数。取(2.0.1a)的旋度代入(2.0.1b)，取(2.0.1b)的旋度代入(2.0.1a)，得 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 所分别满足的微分方程

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu}\nabla \times \vec{E}\right) = \omega^2\varepsilon\vec{E} \tag{2.0.2a}$$

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\varepsilon}\nabla \times \vec{H}\right) = \omega^2\mu\vec{H} \tag{2.0.2b}$$

对一般的非铁磁媒质 $\mu=\mu_0=\text{const.}$，此时式(2.0.2a)成为

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \omega^2\varepsilon\mu_0\vec{E} \tag{2.0.3}$$

由式(2.0.1c)

$$\nabla \cdot (\varepsilon\vec{E}) = \varepsilon\nabla \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \nabla\varepsilon = 0$$

考虑到矢量恒等式 $\nabla\times\nabla\times\vec{E}=\nabla\nabla\cdot\vec{E}-\nabla^2\vec{E}$，则式(2.0.3)成为

$$\nabla^2\vec{E} + \omega^2\varepsilon\mu_0\vec{E} = -\nabla(\vec{E} \cdot \nabla\varepsilon/\varepsilon) \tag{2.0.4}$$

这就是非均匀媒质中场矢量 $\vec{E}$ 所满足的方程。右端项的存在是此方程求解的一大障碍，即使右端项不存在方程也不容易求解，因为 ε 是空间位置的函数，只有对某些特殊形式的 ε 可以求得方程的严格解，一般的情况则需要求助于近似解。

2.1 瑞利-高斯近似

当 ε 和 ε_0 相差不大，即 $|\varepsilon/\varepsilon_0-1|\ll1$ 时，可用下面的方法进行求解。把麦克斯韦方程写成如下形式

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu_0\vec{H} \tag{2.1.1}$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\varepsilon_0\vec{E} + j\omega(\varepsilon-\varepsilon_0)\vec{E} \tag{2.1.2}$$

这种形式的方程与含有电流密度 $\vec{J}_e=j\omega(\varepsilon-\varepsilon_0)\vec{E}$ 的均匀媒质中的方程相同。即不均匀媒质中的场可以看成外部源在介质 ε_0、μ_0 中的场 $\vec{E}_0$、$\vec{H}_0$ 和等效源——极化电流 $\vec{J}_e=\partial\vec{P}/\partial t=j\omega\cdot(\varepsilon-\varepsilon_0)\vec{E}$ 在介质 ε_0、μ_0 中的场 $\vec{E}'$、$\vec{H}'$ 的叠加。根据均匀媒质中的场方程可以算出 $\vec{J}_e$ 产生的场，则总场为

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + (\nabla\nabla\cdot + k_0^2)\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V(\varepsilon-\varepsilon_0)\vec{E}G_0(\vec{r}|\vec{r}')\mathrm{d}V' \tag{2.1.3}$$