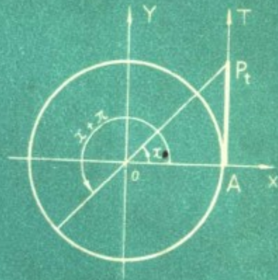
数学进修用书



邬耀宗

三角函数

ANJIAOHANSHU

浙江人民出版社

数学进修用书

三角函数

邬耀宗

浙江人民出版社

内 容 提 要

本书详细地叙述了三角函数和反三角函数的定义、性质以及三角函数间、反三角函数间的关系，加法定理的推论，三角方程和三角方程组及其解法等基本内容，最后还联系实际，简要地介绍了三角函数在几个主要方面的应用。各章选有习题。可供中学师生、工农青年学习、进修。

数学进修用书

三 角 函 数

郛耀宗

浙江人民出版社出版

舟山地区印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

开本 787×1092 1/32 印张 4,125 字数 93,000

1979年7月第一版

1979年7月第一次印刷

印数：1— 60,000

统一书号：7103·1057

定 价：0.35 元

目　　录

第一章　基本知识

在这本书里，我们将要研究三角函数的一些理论，公式和解题方法。在研究这些理论的时候，需要涉及到一些函数重要性质，因此，在这一章里，我们先来研究这些性质。

§1.1　函数的概念

我们知道，函数的定义可以这样叙述：

设M和N是两个集合，这两个集合的元素可以是任何事物。如果集合M中的每一个元素x，有集合N中的某一元素y与它对应，这时就称y是x的函数。通常用$y=f(x)$或$y=\varphi(x)$等等来表示，括号前的字母"f"或"φ"只表示x对y的对应规律。集合M称之为函数的定义域；而对应的集合N，称之为函数的值域。集合M中的元素x称为变数值；对应的集合N中的元素y称为函数值。

上述函数的基本概念，是基于对应和集合的概念上的，但这两个概念是被取作基本概念，即不再用另外的概念来说明它。

在函数的定义中"如果集合M中的每一个元素x，有集合N中的某一元素y与它对应"这句话应予以注意。它是说，取定一个元素x，就确定了一个元素y与之对应，并不要求对于不同的元素x，y也取不同的元素。因此，$y=c$（常数）也不违背定义，即$y=c$是一个函数。

例1.　函数$y=\sin x$，可以取所有实数的集合作为函数的定义域。函数的值域为$|y|\leqslant 1$.

例2. 函数

$$y=f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时,} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时。}\end{cases}$$

叫做狄利克来 (Dirichlet) 函数，此函数如当 $x=-2$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{7}$时，函数值 y 为 1；当 $x=\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π 时，函数值为零。因此，函数的定义域是所有实数的集合，函数的值域是两个元素所组成的集合，记作 $\{0,1\}$。

§1.2 数 区 间

数区间是指介于某两个实数之间的全体实数，而那两个实数叫做数区间的端点。

设 a 与 b 是任意的两个实数，而且 $a<b$. 我们称所有满足条件

$$a\leqslant x\leqslant b$$

的实数 x 的集合，为以 a,b 为端点的闭区间。用符号 $[a,b]$ 来表示。其几何意义是数轴上介于两个已知点 a 及 b 中间所有点的集合，连 a,b 本身也包括在内。如图1·1所示。

图 1·1

所有满足条件

$$a<x<b$$

的实数 x 的集合，称之为 a, b 为端点的开区间。用符号 (a,b) 表示。它在数轴上表示为介于两个已知点 a 及 b 中间所有点的

集合，但 a,b 本身不包括在内。如图1·2所示。

图 1·2

另外，我们对满足

$$a<x\leqslant b \quad \text{或} \quad a\leqslant x<b$$

的实数 x 的集合叫做半开区间。用符号 $(a,b]$ 或 $[a,b)$ 表示，其几何意义如图1·3所示。

图 1·3

下面我们引进两个符号 $+\infty$（正无穷大）和 $-\infty$（负无穷大），它们不是数，可以认为 $+\infty$ 是大于任何实数，$-\infty$ 是小于任何实数。这样一来，对于 x 能取任意实数，就可以用不等式 $-\infty<x<+\infty$ 来表示。为与上述一致，称所有实数的集合为从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的开区间，以 $(-\infty,\ +\infty)$ 来表示。

同样，$[a,+\infty)$ 是表示 $x\geqslant a$ 的实数的集合；$(-\infty,b]$ 是 $x\leqslant b$ 的所有实数的集合。而 $(a,+\infty)$ 是 $x>a$ 的所有实数的集合；$(-\infty,b)$ 是 $x<b$ 的所有实数的集合。

在三角函数里，主要用的是两种类型的数区间，即：开区间和闭区间．例如，函数 $y=\cos x$ 的定义域可以是闭区间 $[0,\pi]$，而函数 $\operatorname{ctg} x$ 的定义域可以是开区间 $(0,\pi)$.

§1.3 函数的几种特性

现在我们从函数的变化过程来研究函数的几种特性.

一、单值函数和多值函数

如果变数值 x 在定义域 M 内每取得一确定值时，只有唯一确定的函数值 y 与之对应，则 y 就叫做 x 的单值函数。如果对应于每一个 x 值的 y 不止一个值，y 就叫做 x 的多值函数。

例如

$$y=x^3,\qquad y=\sin x,$$
$$y=\log_a x\quad (a>0, a\neq 1, x>0)$$

是单值函数。而

$$y^2=x$$

是多值（双值）函数（图1·4），它的定义域为 $[0,+\infty)$，对于任何正数 $x_0>0$，相应地可以得到两个 y 值 $\sqrt{x_0}$ 和 $-\sqrt{x_0}$.

多值函数可以分解为几个单值函数，每一个单值函数叫做多值函数的单值支。如上面的函数 $y^2=x$，就可以分解为两个单值支

$$y=\sqrt{x},\qquad y=-\sqrt{x}.$$

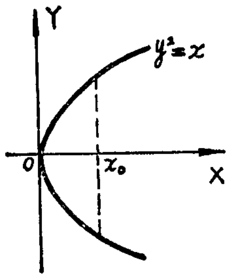


图 1·4

二、有界函数

若集合 M 是属于函数 $f(x)$ 的定义域内集合，如果对于集合 M 内所有的 x，能够找到一个正数 k，使得不等式

$$|f(x)|<k$$

成立，则函数 $f(x)$ 在集合 M 上为有界。若 k 不存在，便说函数 $f(x)$ 在集合 M 内是无界的。

设集合 M 是属于函数 $f(x)$ 的定义域内集合，如果对于集合 M 内所有的 x 存在一个数 P（不必是正的），使得不等式

$$f(x)<P\quad (\text{或 } f(x)>P)$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在集合M上有上界（或有下界）。

特别，当集合M与函数 $f(x)$ 的定义域相一致时，并且如果存在一个数 P，使得对于函数 $f(x)$ 的定义域里的所有 x 都小于P时，则称函数 $f(x)$ 有上界。

同样，可以给出函数 $f(x)$ 有下界及有界的定义。

例3． 函数 $y=-\dfrac{1}{x^2}$ 为有上界．如零就是一个上界．这是因为它对于定义域内的所有 x 的值，都成立不等式 $-\dfrac{1}{x^2}<0$.

例4． 函数 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 为有下界。据上例知道，零就是一个下界。

例5． 函数 $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ 为有界。显然，2是一个上界；同时零是一个下界。

三、单调函数

若函数 $f(x)$ 在它的定义域里的集合M上，取任意两个不同的变数值，对应有两个不同的函数值，并且较大的变数值，对应着较大（小）的函数值，则称此函数在此集合M内是增（减）函数.

即：

若 $x_1<x_2$，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则 $f(x)$ 是增函数；

若 $x_1<x_2$，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则 $f(x)$ 是减函数。

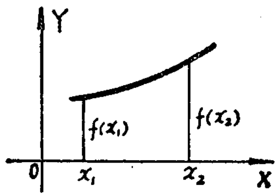
函数 $f(x)$ 在上述集合M上为增函数或减函数，则称此函数是在此集合上的单调函数*。

---

* 这里所述的单调函数，即为通常所谓"狭义"的单调函数。如果 x_1, x_2 为 $f(x)$ 定义域中任意的值，且 $x_1<x_2$ 时有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$ 为"广义"的单调函数。

我们也可以定义集合M与函数$f(x)$的定义域相一致时的**单调**函数。

增或减函数的几何意义是这样的，增函数的图形是沿横轴正向上升的，如图1·5 (a) 所示；减函数的图形是沿横轴正向下降的，如图1·5 (b) 所示。



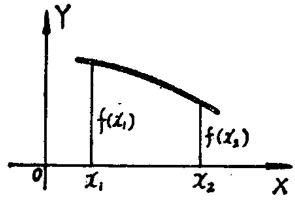


图1·5

例6. 试证函数 $y=2x+3$ 为增函数。

【证】 因为若 x_1 及 x_2 为任意两个变数值，且有 $x_1<x_2$，

则 $\qquad y_1=2x_1+3, \qquad y_2=2x_2+3,$

由此 $\qquad y_1-y_2=2(x_1-x_2)<0.$

所以 $\qquad y_1<y_2.$

例7. 函数 $y=3-2x$ 为减函数。(证明同上题)

例8. 函数 $y=x^2$ 在开区间 $-\infty<x<+\infty$ 内不是单调函数。但在区间 $-\infty<x\leqslant0$ 内是减函数，而在区间 $0\leqslant x<+\infty$ 内是增函数(图1·6)。

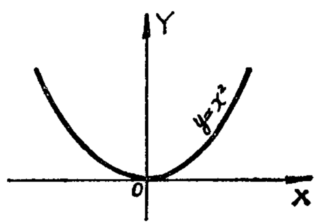


图 1·6

四、偶函数与奇函数

若不论x为函数$f(x)$的定义域内什么值，$-x$也属于这定义域，并且对于这个函数的定义域内

所有 x：

如果等式

$$f(-x)=f(x)$$

都成立时，则称函数 $f(x)$ 为偶函数；

如果等式

$$f(-x)=-f(x)$$

都成立时，则称函数 $f(x)$ 为奇函数。

例如，函数

$y=\cos x$ 及 $y=|x|$，都是偶函数；

函数

$y=\sin x$ 及 $y=\dfrac{1}{x}$，都是奇函数；

函数 $y=\sin x+\cos x$ 及 $y=\sqrt{x}$，
既非奇函数，也非偶函数。后者是因为如 $x=1$ 属于定义域，而 $x=-1$ 则不属于定义域。

奇函数 $f(x)$ 的图形，是关于原点成对称的。因为对于这个图形（图 1·7）上的每一个点 $M_1(x, f(x))$，都对应着同一图形上的一点 $M_2(-x, f(-x))$，它是关于原点与 M_1 成对称的。事实上，这些点一对对地横坐标异号，而纵坐标 $f(x)$ 及 $f(-x)$ 由于条件 $f(-x)=-f(x)$ 亦为异号，于是，线段

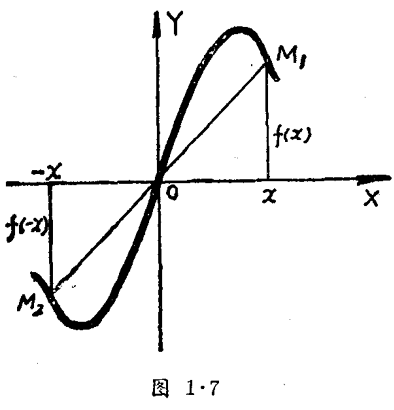


图 1·7

M_1M_2的中点的坐标为

$$\frac{x+(-x)}{2}=0,$$

$$\frac{f(x)+f(-x)}{2}=0.$$

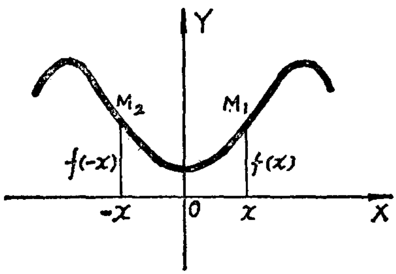


图 1·8

这与原点完全一致。

偶函数$f(x)$的图形，是对称于y轴的。因为$f(-x)=f(x)$，所以若$M_1(x,f(x))$是图形上的点，则和它对称于y轴的点$M_2(-x,f(-x))$也在图形上（图 1·8）。

五、周期函数

若存在一个正数l，它对于函数$f(x)$的定义域里任意x，使等式

$$f(x)=f(x+l)=f(x-l)$$

都成立，则称函数$f(x)$为周期函数，而数l为它的周期。

由这定义推得：若$f(x)$是周期为l的函数，而x为它的定义域中的一点，则同时$x\pm l$亦必然属于该定义域。同理，把x改为$x\pm l$，则有

$$f(x\pm 2l)=f(x\pm l)=f(x).$$

由此知$x\pm 2l$也属于这定义域，而数$2l$也为$f(x)$的周期。

同样可推得，$x \pm kl$（其中 k 是任意整数）也和 x 一起属于函数 $f(x)$ 的定义域，并且下列等式成立：

$$f(x+kl)=f(x),$$

其中 kl 与 l 同为周期。

如果 l 为函数 $f(x)$ 正的周期中之最小的正数，则称 l 为 $f(x)$ 的最小正周期，简称周期。知道了一个周期函数 $f(x)$ 的最小正周期，如为 l，则要求出这函数的定义域内所有的函数值，只要求得在半开区间 $[0,l)$ 或 $(0,l]$ 上的函数值就够了。

另外，要作出周期函数的图形，也只要作出半开区间 $(0,l]$ 上的图形就行了，其他每个半开区间 $(kl,(k+1)l]$ 的图形，可由 $(0,l]$ 上已作好了的图形，沿着 x 轴平移 kl 的距离而得到（图 1·9）。

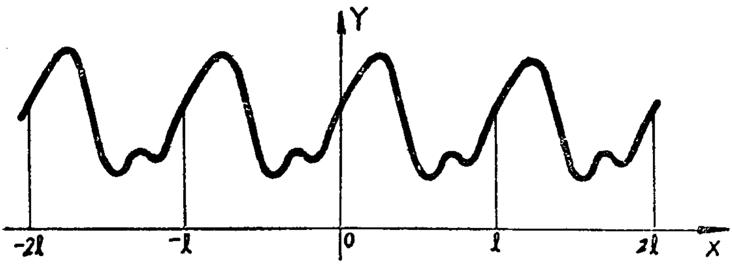


图 1·9

§1.4 反 函 数

设所给 y 是 x 的函数：

$$y=f(x)$$

在这个函数关系中，按照函数的定义，给定每一个变数值，对应着唯一的一个函数值*。

---

* 本书不考虑多值函数。

反过来，如果我们把 y 当作变数值，也有对每一个 y，仅对应着唯一的一个 x，此时，x 就成为 y 的函数，记作

$$x=\varphi(y),$$

我们称这样的函数 φ 为原来函数 f 的反函数；而 f 称为直接函数。反过来说也可以，所以可认为这两个函数互为反函数。

要找出 $\varphi(y)$，须从 $y=f(x)$ 中解出 x 来。例如，

若 $$y=f(x)=x^3,$$

则 $$x=\varphi(y)=\sqrt[3]{y}.$$

下面我们给出反函数的一般定义：

设集合 M 是包含于函数 $f(x)$ 的定义域内的一个集合，在集合 M 上来考察 $f(x)$，对于变数值的集合 M，对应地得到一个函数 $y(y=f(x))$ 值的集合 N，从集合 N 内取任意值 y，都有 M 中唯一的 x 的值和它对应，这种对应关系就确定了函数 $x=\varphi(y)$，这个函数 $\varphi(y)$，称为 $f(x)$ 在集合 M 上的反函数。

特别是集合 M 可以与函数的定义域相一致。这时，我们就称 $\varphi(y)$ 为 $f(x)$ 的在定义域上的反函数。

但是一般说来，要使 $y=f(x)$ 化为 $x=\varphi(y)$ 形式是不一定可能的。这是因为把 y 当作变数值时，对每一个 y 也许对应着几个或者无限多个 x. 例如函数 $y=x^2$，当 $y=4$ 时，有两个变数值：$x_1=2$，及 $x_2=-2$. 函数 $y=\sin x$，当 $y=0$ 时，有无限多个变数值：$x=k\pi(k=0, \pm1, \pm2, \cdots\cdots)$.

在怎样的条件下，函数 $f(x)$ 的反函数 $\varphi(y)$ 才能是单值的呢？对这个问题，我们有下面两个定理。

定理 单调函数有反函数。

【证】 为了确定起见，命 $y=f(x)$ 是增函数，则根据增函数定义，较大的变数值，对应于较大的函数值。即 $x_1<x_2$，

有 $y_1<y_2$. 若给定一个 y_1，一定有一个变数值 x_1 和它对应，使 $f(x_1)=y_1$. 因为 $y=f(x)$ 是增函数，可见 x 的不同值 x_1 与 x_2，不可能有同一个值 $y=y_1$ 和它们对应（如果 $x_1<x_2$，则 $f(x_1)<f(x_2)\neq y_1$；如果 $x_1>x_2$，则 $f(x_1)>f(x_2)\neq y_1$）. 因此，反对应是单值的，就可以定义 x 是 y 的函数。

减函数情况的证明，与此类似。

定理 增（减）函数的反函数，仍为增（减）函数。

【证】 若 $y=f(x)$ 是增函数，讨论其反函数 $x=\varphi(y)$.

设 $y_1<y_2$，又 $x_1=\varphi(y_1)$，$x_2=\varphi(y_2)$，则依函数 $\varphi(y)$ 本身的定义，必同时有

$$y_1=f(x_1),\qquad y_2=f(x_2),$$

于是，如果 $x_1>x_2$，则根据函数 $f(x)$ 的增大性，必有 $y_1>y_2$，违反了原来的假定。

其次，也不能 $x_1=x_2$，因为这样就有 $y_1=y_2$，也是违反原来假设的。

因此，只有 $x_1<x_2$ 是可能的，这就说明 $\varphi(y)$ 确定单调增大。

对于减函数的证明，与此相仿。

由上述两定理可知，要使函数 $f(x)$ 在集合 M 上的反函数也为单值，只要 $f(x)$ 在集合 M 上具有单调性就行了. 这样的集合 M，我们通常称之为 $f(x)$ 的单调性区域。

例如，对函数 $y=x^2$，我们只讨论 x 不小于零的值，则在半开区间 $0\leqslant x<+\infty$ 内，$y=x^2$ 是增函数，每一个 y，对应于唯一的一个不小于零的 x，所以它有反函数

$$x=\sqrt{y}.$$

而半开区间 $[0,+\infty)$ 为函数 $y=x^2$ 的单调区域。

非常明显，函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $x=\varphi(y)$，它们两者都是以 x 为横坐标，y 为纵坐标，作起图来完全是一样的，不过在 $y=f(x)$ 中，x 是变数值，而在 $x=\varphi(y)$ 中的变数值却是 y.

但是习惯上，我们常常用字母 x 表示变数值，而用字母 y 表示函数。因此，为了与习惯一致，将 $x=\varphi(y)$，改记为 $y=\varphi(x)$，亦称 $y=\varphi(x)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数。

最后，我们来讨论一下反函数的图形。在同一坐标系中，反函数的图形与直接函数的图形有如下关系：

定理 反函数 $y=\varphi(x)$ 的图形与直接函数 $y=f(x)$ 的图形对称于直线 $y=x$（或第Ⅰ与第Ⅲ象限角 XOY 的平分线 l）.

【证】 设 $P(a,b)$ 是直接函数 $y=f(x)$ 的图形上的任意一点(图1·10)，从反函数的定义知道，$P'(b, a)$ 是反函数 $y=\varphi(x)$ 的图形上的一点。连接 P、P'，PP' 与直线 l 交于 M，过点 P 作 $PQ\perp OX$，过点 P' 作 $P'Q'\perp OY$，因为 $\triangle POQ\cong\triangle P'OQ'$（两直角边对应相等），所以 $OP=OP'$，$\angle POQ=\angle P'OQ'$；又因为 $\angle MOQ=\angle MOQ'=45°$，所以 $\angle MOP=\angle MOP'$，即 OM 是 $\angle POP'$ 的平分线。对于等腰三角形 POP'，顶角 POP' 的平分线就是它们的对称轴。因此，点 P 和 P' 对称于直线 $y=x$。

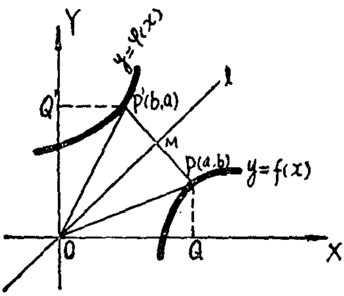


图 1·10

反过来，如果 $P(a, b)$ 是直接函数的图形上的任意一点，过点 P 作关于直线 $y=x$ 的对称点 P'，则有 $\triangle POM\cong\triangle P'OM$,