初二

几何

数学辅导员

北京师大附属实验中学
于宗英 主编

数学辅导员

初二几何

北京师大附属实验中学于宗英主编

科学普及出版社

数学辅导员
初 二 几 何
北京师大附属实验中学于宗英主编
责任编辑：刘渔、乔洪文
*
科学普及出版社出版(北京海淀区白石桥路32号)
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
北京燕山印刷厂印刷
*
开本：787×1092毫米1/32印张：7.125　字数：151千字
1989年1月第1版　1989年1月第1次印刷
印数：1—19752册　定价：1.70元
ISBN 7-110-00773-1/O·26

出 版 说 明

《数学辅导员》是配合现行六年制重点中学数学课本并参照新大纲而编写的辅导读物。我社特邀了北京师大附属实验中学、北京师大二附中、北京市一六一中学三所市重点学校的优秀教师参加本书的编写。

本套书既然命名为“辅导员”，故既不是习题集，也不同于一般的升学考试复习指导，更不是课本的简单重复。本套书以开发学生智力、启迪学生思维为重点，在“辅导”上下功夫，着重基础知识；对学生学习中经常出现的问题，加以重点辅导；对课文重点详加分析，使学生能抓住这些中心环节；对例题指出了解题思路，典型例题还阐明了多种方法，使学生得以抓住解题突破口；习题附有答案或提示。为提高读者综合运用知识的能力，书末还安排了“赛一赛”，供读者学完全书后练习。注*者为难度较大或超范围的题目，供有余力的同学选做。

这套书编排与课本呼应，初中分五册。初二几何分册由北京师大附属实验中学于宗英、李光华、李令倩三位老师编写。编写过程中，北京教育学院门树慧老师、北京师大二附中古永喜老师提出了宝贵的意见，在此表示感谢。

本书既适合中学生平时练习或升学复习，亦适合广大青年自学参考，对中学教师备课及在职职工培训也有一定的参考价值。

引　言

一、什么是几何学

几何与同学们已经熟悉的代数一样，都是数学的一个分支，也是中学课程的重要组成部分。只是由于它们分工的不同，研究的对象各有侧重。简要地说，代数侧重于研究数，即数量关系；几何侧重于研究形，即图形性质。

图形，对于同学们来说，并不生疏。在小学我们就学习过三角形、四边形、圆、长方体、圆柱体等，并且会计算它们的面积或体积。我们周围的任何一个物体都有许多性质，当我们不考虑它们的轻重、软硬、颜色以及制造的原材料等，而仅就它们的形状来进行考察、比较时，我们就可以说课本、木箱、青砖等都是长方体；日光灯管、竹筒、汽油桶等都是圆柱体，并且课本的封面是长方形的，汽油桶的底、盖是圆形的等等。长方体、圆柱体和其他各种图形，就是在人们长期实践中，经过这样反复多次的考察、比较而逐步形成的概念，因此我们说图形是从现实世界中抽象概括出来的。我们把只研究它的形状、大小而不考虑其他性质的物体，称作是“几何体”，几何体简称为“体”。长方体、圆柱体都是几何体的一种。

体是由“面”围成的，面和面相交于“线”；线和线相交于“点”。因此点、线、面都是依附于体而存在的，只是为了便于研究，才将点、线、面分开来讨论。从几何角度看，面是没有厚薄的；线是没有粗细的；点是没有大小的，它仅是位

置的标记。

我们从运动变化的角度来看看点、线、面、体的联系。点动成线、线动成面、面动成体。考察人造地球卫星的运行轨道，就是点动成线的一个例子，又如夜间移动点燃的蚊香，香头成一条火线。用一条丝线可以切开豆腐，在桌面上弹硬币，它旋转起来似一球体。这些均是线动成面、面动成体的实例。

点、线、面是组成几何图形的元素，点、线、面或若干点、线、面组合在一起，都称为几何图形。几何学是研究几何图形的性质（形状、大小和位置关系）的科学。

目前我们只研究在同一个平面内的图形。在现实世界中，平面图形是千姿百态的，几何仅选择其中少数的、最基本、最常用、最简单的平面图形来研究，而较复杂的图形问题也常常可以转化为简单的图形问题来解决。我们在小学里学过的线段、角、平行线、三角形、平行四边形和圆等等，都是我们要进一步研究的平面图形。我们把只研究平面几何图形的性质的几何学叫做平面几何学。

二、为什么要学习几何

几何学是研究从现实世界中抽象出来的各种图形的形状、大小和位置关系的科学。学习几何，就是要掌握这方面的基础知识，以适应生产建设和日常生活的需要。例如，工人制造零件、组装机器、建筑楼房，都要一丝不苟地按照图纸进行加工、组装或施工。图纸既有形状与尺寸的要求，还规定了相互的位置关系，因此工人和设计人员都必须懂得几何学才行。又如丈量土地、测高测距、研究天文和地理、大海领航、雕塑造型等等更必须应用几何方面的原理。日常生

活同样离不开几何学。打一件家具，哪怕是最简单的床，也要考虑形状、大小等问题。

学习平面几何可以培养我们的空间想象能力和逻辑推理能力，是我们进一步学习解析几何、立体几何及其他学科的基础。

有的同学也许认为，三角形、平行四边形和圆等在小学里已学习过了，还有什么必要再学习呢？实际上，中学与小学的教学任务与要求不同，在小学里所学习的一些几何知识，是极其初步的，基本上停留在感性认识阶段，主要是长度、面积、体积的计算。而在初中阶段要完整地、系统地掌握平面几何的理论知识，学会用严密的几何语言表述几何图形及其性质；学会用各种画图工具画出所需要的图形，并且能识别或想象有关的图形；学会推理论证，进而形成一定的逻辑推理能力；学会按照一定的解题格式来完成证明题、作图题与计算题等等。因此，希望大家在今后的几何学习中，要认真体会这个差别，重视这个差别，在理解基本知识的基础上，从语言、图形、推理等各方面严格要求自己，严格训练自己。这样，就一定能学习好几何学。

目　录

引言……………………………………………………………………I
第一章　基本概念……………………………………………………1
　一、直线、射线、线段……………………………………………1
　二、角………………………………………………………………9
第二章　相交线、平行线……………………………………………22
　一、相交线、垂线…………………………………………………22
　二、平行线…………………………………………………………30
　三、命题、定理、证明……………………………………………36
第三章　三角形………………………………………………………56
　一、三角形…………………………………………………………56
　二、全等三角形……………………………………………………67
　三、等腰三角形……………………………………………………76
　四、尺规作图………………………………………………………91
　五、直角三角形……………………………………………………100
　六、逆命题、对称…………………………………………………109
第四章　四边形………………………………………………………128
　一、多边形…………………………………………………………128
　二、平行四边形……………………………………………………134
　三、梯形……………………………………………………………153
第五章　面积、勾股定理……………………………………………176
　一、面积……………………………………………………………176
　二、勾股定理………………………………………………………191
赛一赛…………………………………………………………………205
习题答案与提示………………………………………………………208

第一章 基本概念

本章学习直线、射线、线段和角的概念、画法及基本性质。这是平面几何的基础部分，也是学习平面几何的入门阶段。

本章的特点是概念比较多，我们不仅要知道概念的名称，更要明确它们的含义。例如"直线上两点间的部分叫做线段"，就是用"直线上两点间的部分"来说明"线段"的含义。用简明的语言，说明概念的含义，就是给概念下定义。因为概念是思维的基础，是推理论证的依据，因此必须正确理解并掌握它。

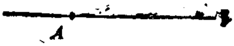
但是，不是所有的几何概念都可以下定义的。因为给一个概念下定义必须利用已知的概念作基础，也就是每一个概念的定义必须依赖前面的已知概念。如果这样追根溯源，那么至少有一个概念是不能依赖于前面的已知概念来定义的。不能下定义的概念叫原始概念，几何中的"点"、"直线"都是原始概念。

本章中的许多概念都是在线段和角的基础上建立起来的，因此线段和角是本章的重点。

一、直线、射线、线段

1．点是位置的标记；直线是向两方无限延伸的，一条直线上有无限多个点。

（1）一个点和一条直线之间，有两种不同的位置关系：点在直线上（图1-1）；点在直线外（图1-2）。



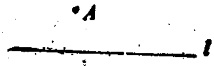


图 1-1　　　　图 1-2

（2）直线公理：两点确定一条直线。这是直线的基本性质，它反映了直线的本质特征，体现了直线与曲线的差别。如图1-3，过两点可以画任意多条曲线，但是过两点只能画一条直线。

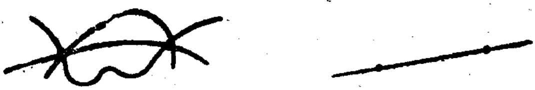


图 1-3

须明确：①直线公理是从实践经验中总结出来的，它是几何中推理的基础；②“确定”一词，包括“有”且“只有”两层意思。“有”表明“存在”，“只有”表明“唯一”。

（3）两条直线相交，只有一个交点（交点就是两条直线的公共点）。这是直线的又一个性质。这个性质可以根据直线公理推导出来：假定两条直线a和b相交，有两个交点C和D。这就是说经过两点（C和D），有两条直线（a和b）。这与“两点确定一条直线”相矛盾，由于直线公理已是肯定的事实，所以说两条直线相交有两个交点是不可能的。

〔问〕

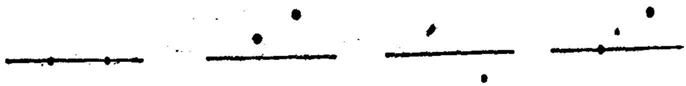
1．两个点和一条直线，可能有几种位置关系？试画图表示．

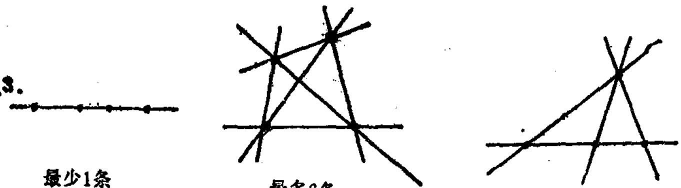
2．由三个点，最多可以确定几条直线？试画图说明．

3．由四个点，最少能确定几条直线？最多能确定几条直线？还存在其他情况吗？试画图说明．

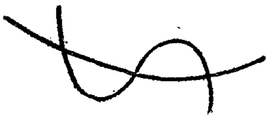
4．你能画出表示两条曲线相交于三点的图形吗？两条曲线可能有多少个公共点？

〔答〕

1. 

3. 

最少1条　　最多6条　　还可能4条

4. 

两条曲线可能有0、1、2、……以至无数个公共点．

2．直线、射线、线段这三个概念之间既有联系又有区别，它们的相同点和不同点如下表所示．

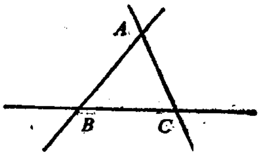
概念	图　形	定　义	表示法	端点	特　征	
直线	A　B		直线AB（或直线l）	无	线上有无限多个点	向两方无限延伸
射线	C　D	直线上某一点一旁的部分	射线CD	一个		向一方无限延伸
线段	M　N	直线上两点间的部分	线段MN（或线段a）	两个		两方都有界

（1）在用两个大写字母表示直线或线段时，没有顺序问题．但是在表示射线的两个大写字母中，必须把表示端点的字母写在前面．如射线CD，若记作射线DC就错了．

（2）从定义看，射线、线段分别是直线的一部分。若反向延长射线或把线段向两方延长就可以得到直线，线段也可以看成是射线上两点间的部分，向任何一方延长线段都可以得到射线。

要注意延长线段AB与延长线段BA的方向上的区别。由于直线本身就是向两方无限延伸的，所以直线不存在延长的问题，说“延长直线AB”就错了。射线只能反向延长。

〔问〕



（第1题）

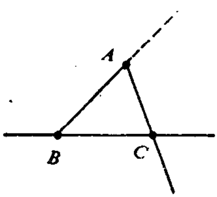
1．如图所示，三条直线两两相交于A、B、C三点，以A、B、C中任两个字母表示出来的射线共有几条？

2．在线段AB上顺次取三个点C、D、E，这时图中共有几条线段（包括AB在内）？若取四点C、D、E、F呢？

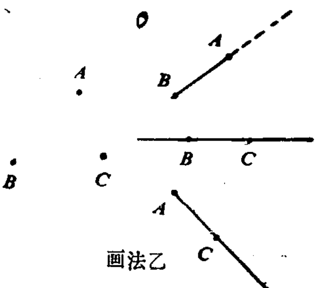
3．已知三点A、B、C，根据下列要求，画出图形．

（1）连结AB；（2）过B、C画直线BC；（3）以A为端点，画射线AC；（4）反向延长线段AB．

此画图题现有两种不同的作法（甲法与乙法），你看哪种作法正确？为什么？



画法甲



画法乙

（第3题）

〔答〕

1．以字母A、B、C表示出来的射线共有六条，即射线AB、AC、BA、BC、CA、CB.

2．10条；15条

3．画法甲正确．因为A、B、C三点的位置已经确定．要画的图形必须画在指定的位置上，不能随便移动．

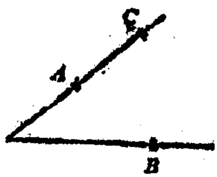
3．“在所有连结两点的线中，线段最短”．这是线段的基本性质，也可称作线段公理。

根据直线公理可知，以两点为端点的线段是唯一确定的；根据线段公理可知，这条线段，又是在所有以这两点为端点的线中的最短的。于是就把“连结两点的线段的长度，叫做两点的距离”。有关距离的概念，是几何中的重要概念。必须注意距离是数量（线段的长度），而不是图形（线段），千万别搞错。

〔问〕

1．如图，画图并说明什么是点A、B，点B、C的距离？

2．比较点A、B与点B、C的距离的大小有几种方法？



（第1题）

4．在有关线段的画图问题中，画一条线段等于已知线段，是完成线段的和、差画图的基础。对于几何画图问题，不但要画出符合条件的图形，而且要按照画图的顺序写出画法。

已知线段a，用直尺和圆规画一条线段，使它等于a。先任意画一条射线AC，并且以A作为所求线段的一个端点。

那么如何确定另一个端点B，就成了画图的关键．点B既要在射线AC上，又要满足$AB=a$的条件．因此我们以点A为圆心，以定长a为半径画弧，这条弧与射线AC的交点就是B点(如图 1-4)．在写画法时，常常略去了画弧的详细过程，

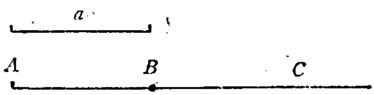


图 1-4

而以“在射线AC上截取$AB=a$”的语句来表达，在所画图形中，要注意保留弧的痕迹，以便从直观上反映画图过程．为了图形的整洁，可以把弧线画轻些．

学习画图，要注意理解和掌握画图问题中的常用语句，如“在射线××上截取××=×”“顺次截取”等等．

〔例1〕已知三条直线两两相交于A、B、C三点，第四条直线DF交直线AB于D，交直线BC于E，交直线AC于F．图中共有几条线段？用字母表示各条线段．

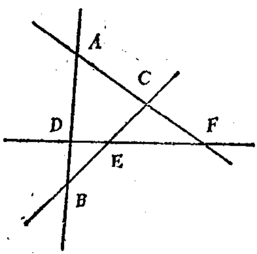


图 1-5

〔答〕依题意作图(图1-5)．图中的4条直线两两相交，共有6个交点，并且每条直线上有3个点．因此在每条直线上有3条线段，故图中共有12条线段．它们是：线段AD、AB、DB、BE、BC、EC、DE、DF、EF、AC、AF、CF．

〔例2〕线段$BC=10$厘米，点A在BC的反向延长线上，

$AB = 25$厘米，M是AC的中点．求点M、B的距离．

〔**解**〕如图 1-6所示，$\because$ $BC = 10$厘米，$AB = 25$厘米，

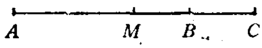


图 1-6

$\therefore$ $AC = AB + BC = 25 + 10 = 35$(厘米)．

$\because$ M是AC的中点，$\therefore$ $AM = \frac{1}{2}AC = \frac{35}{2} = 17.5$(厘米)．

$MB = AB - AM = 25 - 17.5 = 7.5$(厘米)．

答：点M、B的距离是7.5厘米．

说明 (1) 依题意画图是解几何题过程中重要的一环．审清题意，弄清有关的概念是画好图的基础．如例 2 中要弄清线段、线段的反向延长线及线段的中点等概念，要注意延长线的方向，取准点A、M的位置．

(2) 计算线段MB的长还有其他方法，试自行考虑．

〔**例3**〕如图 1-7，B是线段AC上一点，L、M、N分别是线段BC、AC、AB的中点．$MN = \frac{1}{2}BC$，$NL = \frac{1}{2}AC$，这是怎么推导出来的呢？

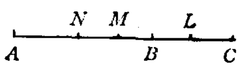


图 1-7

分析 观察图形，直接找不出线段MN与线段BC的关系．但是线段MN却可以转化为两线段的差．这就是$MN = AM - AN$；根据M、N分别是线段AC、AB的中点，可得$AM = \frac{1}{2}AC$，$AN = \frac{1}{2}AB$．因此 $MN = AM - AN$

$=\frac{1}{2}AC-\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}(AC-AB)=\frac{1}{2}BC$

试自己推导 $NL=\frac{1}{2}AC$.

***〔例4〕 在直线L上顺次取100个点A_1、A_2、A_3……A_{99}、A_{100}，那么在直线L上以这些点为端点的线段共有多少条？**

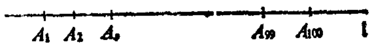


图 1-8

分析 (1)如图 1-8，按顺序从左向右数：

以A_1为一端点的线段有A_1A_2、A_1A_3、……A_1A_{100}，共99条；

以A_2为一端点的线段有A_2A_3、A_2A_4、……A_2A_{100}，共98条；

以A_3为一端点的线段有A_3A_4、A_3A_5、……A_3A_{100}，共97条；

……

以A_{98}为一端点的线段有$A_{98}A_{99}$、$A_{98}A_{100}$，共2条；

以A_{99}为一端点的线段有$A_{99}A_{100}$，只一条．

归纳起来共有(99＋98＋97＋……＋2＋1)条．

设 $S=99+98+97+\cdots\cdots+2+1$,

$\therefore 2S=\underbrace{100+100+100+\cdots\cdots+100+100}_{\text{共99项}}=100\times 99$.

$\therefore S=\frac{100\times 99}{2}=4950$，即共有线段4950条．

(2) 如不考虑方向，则：

以A_1为一端点的线段有A_1A_2、A_1A_3、……A_1A_{100}，共99条；

以A_2为一端点的线段有A_2A_1、A_2A_3、……A_2A_{100}，共99条；

……

也就是说以直线l上这100个点中的任何一个点为一端点，与其余的99个点配合，总能得到99条线段．100个点就共能得到99条×100＝9900条线段．

但是其中的A_1A_2与A_2A_1、A_1A_3与A_3A_1……，分别表示同一条线段．因此直线上以这100个点为端点的线段共有$\frac{99\times 100}{2}=4950$(条)．

说明 （1）研究几何图形，若能抓住图形的某些特征，有规律地进行观察和分析，将有助于提高我们的看图能力和解题能力．如例4中，从点 A_1开始，按照从左到右的顺序，逐个地分析线段的条数，就能得到正确的答数．

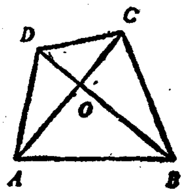
（2）要善于总结解题的基本思路，掌握规律．通过例4的分析，我们不仅会解这一个题．而应掌握规律，会解这一类题．

（3）如在直线l上取101个点，则增加多少条线段？

练习一

1．线段$AB=10$厘米，D在AB上，$DB=4$厘米，C是AD的中点．求AC的长．

2．已知AC与BD相交于O，观察图中共有多少条线段，并把它们都表示出来．



（第2题）

3．五条直线两两相交，共有多少个交点？

4．已知线段a、b、c（$b>C$），根据下列要求画图并填空．

（1）作射线AE；

（2）在射线AE上顺次截取$AB=2a$、$BC=b$；

（3）在线段AC上截取$AD=c$，则线段$DC=$________．

二、角

1．课本中引入角的概念时，首先举出有关角的实例，画出表示角的图形，然后通过观察图形、分析特征给出角的定义“有公共端点的两条射线，所组成的图形叫做角”。这是我们研究几何概念经常采用的方法和过程．学习概念，必须注意抓住定义中的几个要点。例如角的定义中有两个要点：（1）两条射线；（2）有公共端点。如果忽视了“有公共端点”的条件，显然就构不成角，因此认为“两条射线所组成的图