高等学校教材

高等数学(下册)

MATHEMATICS

车向凯　谢崇远　主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

高等数学

（下册）

车向凯　谢崇远　主编
王学理　孙艳蕊　付连魁　孔庆海　编

高等教育出版社

内容提要

本教材是为工科各专业编写的，分为上下两册，下册的内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、级数和数学实验。每节后均配置了适量的习题，充分考虑了各方面的需要，习题中既有基本题目，也有较难的题目。

本书叙述简洁、严谨，概念清晰，既符合《高等数学课程教学基本要求》，又有所引申和延拓。本书可作为工科各专业的教材，也可作为教学参考书和自学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．下册/车向凯，谢崇远主编．—北京：高等教育出版社，2005.12

ISBN 7-04-017760-9

Ⅰ．高…　Ⅱ．①车…②谢…　Ⅲ．高等数学-高等学校-教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 128091 号

策划编辑　马　丽　**责任编辑**　崔梅萍　**封面设计**　王凌波　**责任绘图**　尹　莉
版式设计　马静如　**责任校对**　杨凤玲　**责任印制**　杨　明

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　址	http: // www. hep. edu. cn
总　机	010-58581000		http: // www. hep. com. cn
		网上订购	http: //www.landraco.com
经　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http: //www.landraco.com.cn
印　刷	北京市联华印刷厂	畅想教育	http: //www.widedu.com
开　本	787×960　1/16	版　次	2005 年 12 月第 1 版
印　张	25	印　次	2005 年 12 月第 1 次印刷
字　数	470 000	定　价	26. 10 元

物料号　17760—00

前　言

17 世纪的欧洲工业革命推动了天文学、力学、光学等诸多学科的发展，进而促使数学发生了根本性的变革。这一变革的重要标志，就是变量的引入，恩格斯称之为“数学的转折点”。经过诸多数学家近一个世纪的探索，到 17 世纪末，18 世纪初，Newton，Leibniz 完成了微积分的奠基工作。19 世纪 Cauchy 又将极限理论引进数学分析。19 世纪后期实数理论的建立使得数学分析成为一门理论完备的基础学科。近一百年来，数学分析方法不断发展，日臻完善，微积分的应用日益广泛。目前，以微积分为主体的高等数学已经成为全世界公认的理工科各专业的重要的基础课程。

近年来，随着我们对教育本质认识的不断深化，数学教育已成为素质教育不可或缺的组成部分，高等数学课程在高等学校的地位和作用发生了微妙的变化。高等数学课不仅仅是重要的基础课和工具课，它所传授的也不只是数学知识，更是一种思维模式，一种文化，它所要培养的是具有数学素养的、富有创造力的高质量的人才。

为适应现代教育和现代科技发展的需要，我们编写了这部《高等数学》教材。本书以极限理论为主线，阐述了一元微积分和多元微积分，并辅以向量代数与空间解析几何、级数和微分方程的基本知识，构成了完整的知识体系，力求将数学的高度的抽象性、严密的逻辑性及广泛的应用性有机地结合在一起。

本书在每节后都留有适量的习题，习题难度循序渐进。对于较难的题目，读者要争取独立解答，这对于数学水平的提高是大有裨益的。本书有些章节带有评述，其内容一般是超出大纲要求的，其目的是将高等数学的经典内容与近现代数学的一些成果及新兴数学学科做一链接，使读者在学习高等数学的同时，能接触到高等数学“后”的数学，开阔视野。本书还在部分章节后对在相关学科中做出突出贡献的数学家给予了介绍。

数学建模与数学实验本可作为一门独立的数学课来开设，但鉴于课时的限制，很多院校没有开设这门课，本书将该部分内容作为一章放在最后，只需增加少量课时，便可完成这部分内容的讲授，应该不会对学生造成太大的负担。

本书适用于工科院校本科各专业，也可作为高等学校数学教师的教学参考书，对于自学高等数学和报考研究生的同志也是不可多得的参考教材。

编写一本反映自己教学经验或教改心得的高水平、高质量的高等数学教材，是我们多年的夙愿，我们衷心感谢高等教育出版社对我们工作的大力支持，特别

感谢李艳馥和马丽同志为本书出版所做出的贡献。

教材虽已编写完成，但工作仍没有结束，我们恳请读者对本书的不足之处给予批评指正，以便再版时加以修正，使其更加完善。

作者于东北大学

2005年1月

目　　录

第 6 章　向量代数与空间解析几何

向量在数学、物理、力学及工程技术中是一种重要的数学工具. 空间解析几何是通过空间坐标系,用代数方法来研究空间几何问题的. 在一元微积分的学习过程中,平面解析几何的知识是不可或缺的. 同样,在学习多元微积分的过程中,也离不开空间解析几何的知识. 本章介绍向量概念及一些基本运算,并以向量为工具,讨论空间中的平面、直线、曲面和曲线的方程及关于它们的一些基本问题.

6.1　空间直角坐标系

6.1.1　空间直角坐标系

我们知道,通过平面直角坐标系,可以将坐标平面上的点与一对有序实数对应起来,从而可用代数方法来讨论几何问题. 现将这种思想加以推广,引进空间直角坐标系,从而将空间中的点用一个有序数组来表示.

在空间中取定一点 O 作为原点,通过该点作三条相互垂直的数轴,分别称为 x 轴、y 轴和 z 轴,统称为坐标轴. 三个坐标轴上的单位长度通常都相同(这些长度单位也可以不同,但本章中,如无特别声明,则三个轴上都取相同的长度单位).

通常将 x 轴和 y 轴置于水平面上,z 轴取铅直方向(见图 6.1). 三个坐标轴的次序和方向一般按右手法则来确定. 用右手握住 z 轴,四个手指从 x 轴的正向旋转 $90°$ 到 y 轴的正向时,拇指的指向就是 z 轴的正向. 按右手法则确定的坐标系称为右手系.

由任意两条坐标轴所确定的平面称之为坐标面. 三个坐标轴确定了三个坐标面. x 轴和 y 轴所在的平面称为 xOy 坐标面,另外两个坐标面分别是 yOz 坐标面和 zOx 坐标面.

三个坐标面将整个空间分为 8 个部分,每一部分称为一个卦限. 含有 x 轴、y 轴和 z 轴的正半轴的那个卦限称为第一卦限,其他第二、第三、第四卦限都在 xOy 面的上方,按逆时针方向确定. 第五卦限在第一卦限下方,第六、第七、第八

卦限也都在 xOy 面的下方,按逆时针方向确定.这八个卦限分别用罗马数字Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ,Ⅴ,Ⅵ,Ⅶ,Ⅷ来表示(见图6.2).

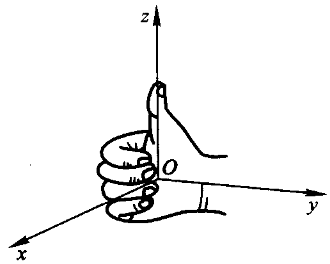

图6.1

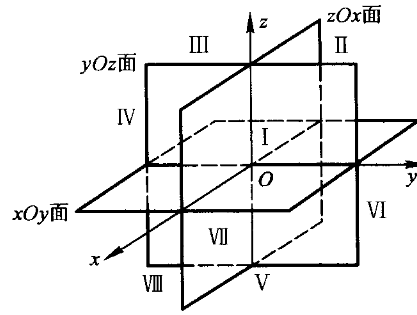

图6.2

在上面建立的坐标系中,坐标轴、坐标面都是两两垂直的,故称之为 Descartes 空间直角坐标系.

6.1.2 空间点的坐标

有了空间直角坐标系,就可以建立空间中的点和有序数组之间的对应关系.

设 M 为空间中的一点,过该点作三个分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的平面,它们与 x 轴、y 轴和 z 轴分别交于点 P、点 Q 和点 R.这三个点在 x 轴、y 轴和 z 轴上坐标分别是 x、y 和 z.从而空间中的一点 M 就唯一确定了一个有序数组 (x,y,z).反之,给定了一个有序数组 (x,y,z),则可分别在 x 轴、y 轴和 z 轴上取坐标为 x,y,z 的三个点 P,Q,R,过这三个点各作一个分别与 x 轴、y 轴和 z 轴垂直的平面,这三个平面有唯一的交点,这个交点就是有序数组 (x,y,z) 所确定的点 M(见图6.3).

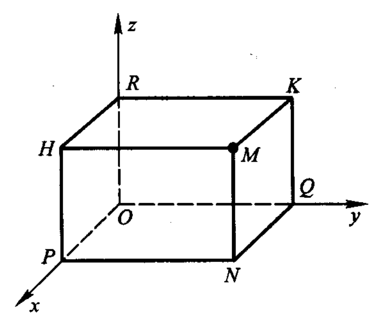

图6.3

这样,利用空间直角坐标系,就在有序数组 (x,y,z) 与空间中的点 M 之间建立了一一对应关系.有序数组 (x,y,z) 称为点 M 的坐标.其中 x,y 和 z 分别称为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标.在以后的表述中,常把一个点和表示这个点的坐标不加区别,所说的给定一点,就是给定这个点的坐标.所说的求一个点,就是求一个点的坐标.

坐标面,坐标轴上的点的坐标有一定特点.如 xOy 面上的点,竖坐标 $z=0$,zOx 面上的点其纵坐标为 $y=0$,yOz 面上的点,其横坐标为 $x=0$. z 轴上的点的横、纵坐标均为零,即 $x=0,y=0$.同样,x 轴上的点有 $y=0,z=0$. y 轴上的点有 $x=0,z=0$.原点的三个坐标均为零.

从点 $M(x,y,z)$ 引垂直于 xOy 面的直线,直线与 xOy 面的交点 $N(x,y,0)$ 称为点 M 在 xOy 面上的投影.在 MN 延长线上取一点 P,使点 P 到 xOy 面的距离等于点 M 到 xOy 面的距离,称点 P 是点 M 关于 xOy 面的对称点,点 P 的坐标为 $(x,y,-z)$.完全类似,点 M 关于 x 轴对称的点的坐标为 $(x,-y,-z)$,关于原点对称的点的坐标为 $(-x,-y,-z)$.点 M 关于其他坐标面、坐标轴的对称点与此完全类似.

各卦限内,点的坐标符号为

$$\text{I}:(+,+,+),\text{II}:(-,+,+),\text{III}:(-,-,+),\text{IV}:(+,-,+),$$
$$\text{V}:(+,+,-),\text{VI}:(-,+,-),\text{VII}:(-,-,-),\text{VIII}:(+,-,-).$$

6.1.3 空间两点间的距离

对空间中两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$,可用其坐标表示它们间的距离 d.

过 M_1,M_2 两点各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面.这 6 个平面围成以 M_1,M_2 为顶点的长方体(如图 6.4 所示).由勾股定理即得

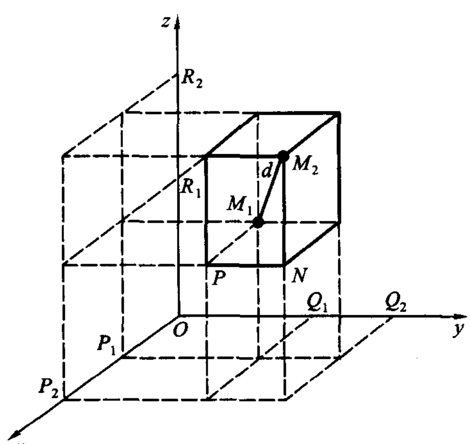

图 6.4

$$d^2=|M_1M_2|^2=|M_1P|^2+|PN|^2+|NM_2|^2,$$

即
$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$
特殊地，点 $M(x,y,z)$ 到原点 $O(0,0,0)$ 的距离为
$$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

例1 在 z 轴上求一点 M，使点 M 到点 $A(1,0,2)$ 和到点 $B(1,-3,1)$ 的距离相等.

解 因为所求的点 M 在 z 轴上，故 M 的坐标应为 $(0,0,z)$，根据题意，有
$$\sqrt{(0-1)^2+(0-0)^2+(z-2)^2}=\sqrt{(0-1)^2+(0+3)^2+(z-1)^2},$$
解得 $z=-3$，即点 M 的坐标是 $(0,0,-3)$.

例2 已知一动点 $M(x,y,z)$ 到两个点 $A(1,2,3)$ 和 $B(-1,-3,0)$ 的距离总是相等，求点 M 的坐标所满足的方程.

解 由已知条件，有
$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y+3)^2+z^2},$$
两端平方后整理，得
$$2x+5y+3z-2=0,$$
即动点坐标应满足这个三元一次方程.

6.1.4* Euclid 空间

距离空间 设 R 是一个非空集合，如对于 R 中任意两个元素 x 和 y，都给定一个实数 $\rho(x,y)$ 与之相应，而且适合下列条件：

(1) $\rho(x,y)\geqslant 0$，又 $\rho(x,y)=0$ 的充分必要条件是 $x=y$；

(2) 成立三角不等式
$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(y,z),$$
则称 $\rho(x,y)$ 是两点 x,y 间的距离，又称 R 按照距离 $\rho(x,y)$ 成为距离空间或度量空间，记为 (R,ρ)，或者简单记为 R. R 中的元素称为点.

例如，对非空集合 R，可以引入距离如下：当 $x\in R$ 时，定义 $\rho(x,x)=0$，当 $x,y\in R$ 时，定义 $\rho(x,y)=1$. 容易验证，这样定义的 ρ 确实满足距离的两个条件，于是 R 关于 $\rho=\rho(x,y)$ 成为距离空间.

再如，设 $C[a,b]$ 是闭区间 $[a,b]$ 上连续函数的全体构成的集合，对于 $C[a,b]$ 中任意两个元素 $x=x(t)$，$y=y(t)$，定义
$$\rho(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|,$$