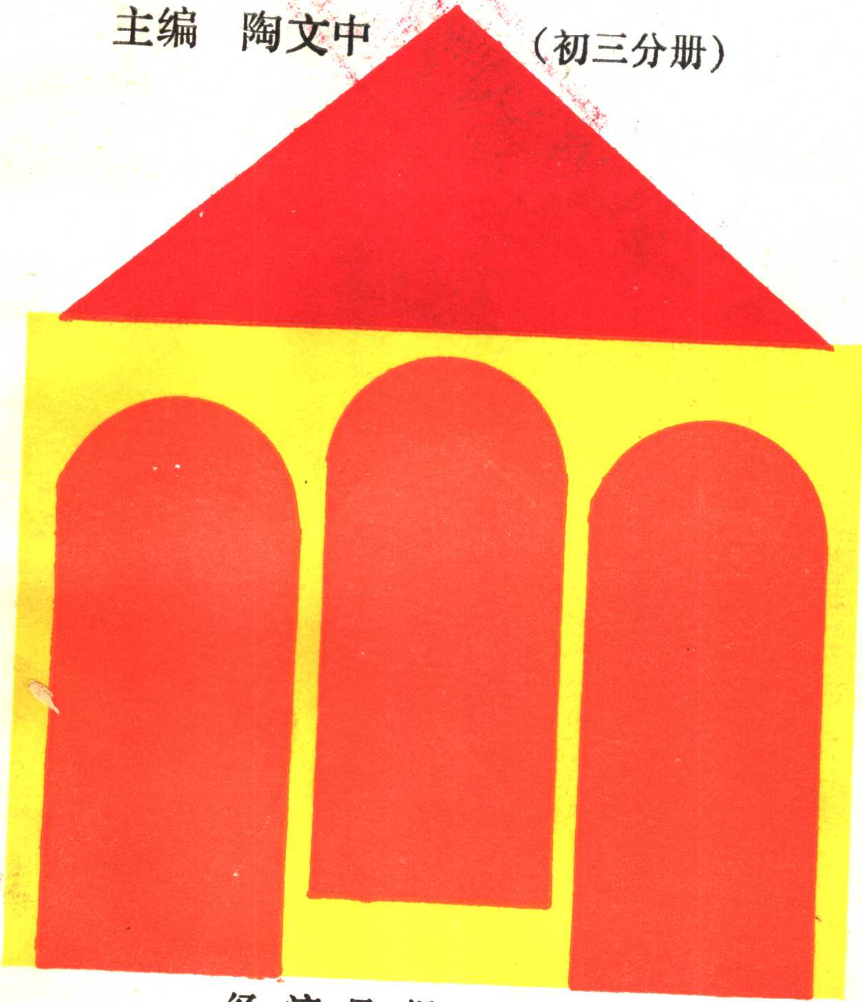
中学数学奥林匹克讲座及解题技巧

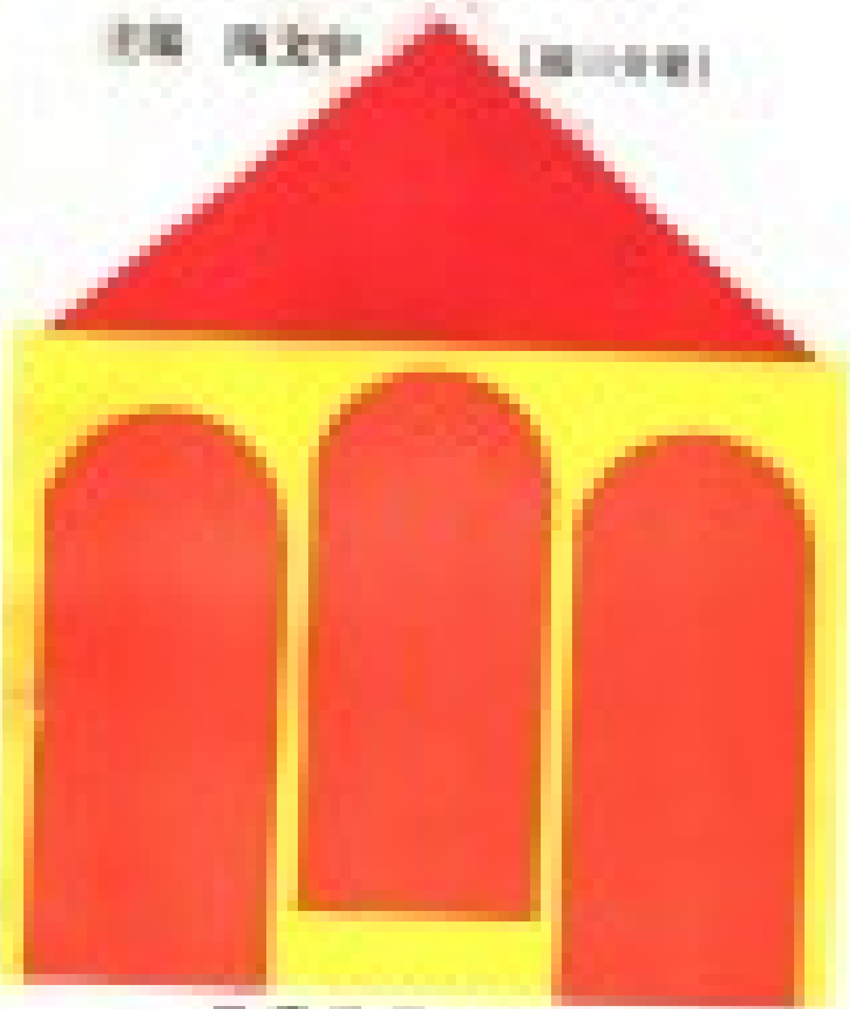
主编　陶文中

（初三分册）



经济日报出版社

中学数学奥林匹克讲座及解题技巧



中学数学奥林匹克讲座及解题技巧

（初三分册）

主　编　陶文中

副主编　揭　英　段　鹏

撰稿人　刘际榛　金宝铮　陈　娴

陶文中　王永俊　赵一西

经济日报出版社

(京)新登字102号

责任编辑　赵润庭

封面设计　王虎鸣

中学数学奥林匹克讲座及解题技巧

（初三分册）

ZHONG XUE SHU XUE AO LIN PI KE

JIANG ZUO JI JIE TI JI QIAO

陶文中　主编

经济日报出版社出版

（北京市宣武区虎坊桥福州馆前街6号）

新华书店总店科技发行所发行

北京仰山印刷厂印刷

开本：787×1092毫米　1/32　10.25印张　200千字

1991年11月第一版　1992年11月第二次印刷

印数：20001—40000册

ISBN 7-80036-556-5/G·136　定价：3.50元

前　言

近几年来，中小学数学奥林匹克热方兴未艾。从1986年开始的全国“华罗庚金杯”少年数学竞赛，已举办了三届，吸引了全国百余万中小学生参加。规模之大令人瞩目。一年一度的全国初中数学联赛和高中数学联赛，已成为衡量我国中学生数学奥林匹克竞赛水平的权威性考试。从小爱数学，从小赛数学已在全国蔚成风气。

为了帮助中小学的数学奥林匹克学习，在今后的数学竞赛中取得更好的成绩，我们结合多年数学奥校辅导的经验，在整理竞赛辅导讲义的基础上，编写了《小学数学奥林匹克讲座及解题技巧》及《中学数学奥林匹克讲座及解题技巧》这两套课外读物。这两套丛书共六册，其中小学三册（四、五、六年级各一册），中学三册（初一、初二、初三各一册）。各册书紧密配合本年级的数学进度，选择基础性强、应用性广的重点教学内容作为专题。同时又根据数学竞赛的需要，开设竞赛数学专题讲座。力求做到选题典型、新颖，注意广度和深度。例题讲解富有启发性，注重从方法上，从能力培养的角度上多方探究解题思路。每讲最后都有小结，便于读者掌握要领。同时还配备了一定数量的练习，并附提示与解答。

我们希望这两套丛书能为提高中小学生数学能力水平有所裨益。书中如有疏漏或错误之处欢迎读者批评指正。

编　者

1991年6月

目　　录

第一讲　指数和对数

初中数学中指数、对数概念主要是指数概念的推广，即把正整数指数幂扩充到有理指数幂，而对数运算是指数运算的逆运算，在一定条件下可与指数式互化。指数运算与对数运算的基础知识是指数运算法则和对数运算法则。在解有关问题时要经过观察、分析、联想，把未知转化为已知，把隐含条件挖掘出来，灵活运用所学知识。

一　求值

1．利用题目条件求值

解这类题的关键是要注意挖掘已知与未知的关系，常用变形除指数、对数的法则、性质之外，还常用乘法公式进行恒等变形。

例 1　已知 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$，求 $\dfrac{x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}+2}{x^2+x^{-2}+3}$ 的值。

思路分析　观察“已知”与“求”中两个式子所含分数指数的特点，$x^{\frac{3}{2}}$ 与 $x^{-\frac{3}{2}}$ 分别是 $x^{\frac{1}{2}}$ 和 $x^{-\frac{1}{2}}$ 的三次方，联想立方和公式。又 x^2，x^{-2} 是 $x^{\frac{1}{2}}$，$x^{-\frac{1}{2}}$ 的四次方，联想两数的和平方公式。对已知条件两边平方，得 $x+x^{-1}=7$，又 $x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})(x+x^{-1}-1)$，$x^2+x^{-2}=(x+x^{-1})^2-2$，代数式的值即可求。

解　$\because x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$　　$\therefore x+x^{-1}=7$

$$\therefore 原式=\frac{(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})(x+x-1)+2}{(x+x^{-1})^2+1}$$

$$=\frac{3\times(7-1)+2}{7^2+1}=\frac{2}{5}$$

例 2　设$x^{2\alpha}=3-2\sqrt{2}$

计算：$\dfrac{x^{3\alpha}-x^{-3\alpha}}{x^{\alpha}-x^{-\alpha}}$

思路分析　分子$x^{3\alpha}-x^{\ \ 3\alpha}$中可分解出因式$x^{\alpha}-x^{-\alpha}$且$3-2\sqrt{2}$与$3+2\sqrt{2}$互为倒数，因此有$x^{-2\alpha}=3+2\sqrt{2}$，将这些情况考虑到就容易求解了。

解　原式$=\dfrac{(x^{\alpha}-x^{\ \ \alpha})(x^{2\alpha}+1+x^{-2\alpha})}{x^{\alpha}-x^{\ \ \alpha}}$

$$=x^{2\alpha}+1+x^{-2\alpha}$$

将$x^{2\alpha}=3-2\sqrt{2}$，　$x^{\ \ 2\alpha}=3+2\sqrt{2}$代入上式

$\therefore$原式$=3-2\sqrt{2}+1+3+2\sqrt{2}=7$

例 3　设$a=3-2\sqrt{2}$，求$A=\left(\frac{1}{2}\log_2 4^a-2a^{\frac{1}{2}}+1\right)^{\frac{1}{2}}$的值。

思路分析　对$\frac{1}{2}\log_2 4^a-2a^{\frac{1}{2}}+1$变形得$a-2a^{\frac{1}{2}}+1=(a^{\frac{1}{2}}-1)^2$。但在进一步化简时，必须注意：$A=[(a^{\frac{1}{2}}-1)^2]^{\frac{1}{2}}=|a^{\frac{1}{2}}-1|=1-a^{\frac{1}{2}}$。

解　$A=[(a^{\frac{1}{2}}-1)^2]^{\frac{1}{2}}=1-a^{\frac{1}{2}}=1-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$

$=1-\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}=1-(\sqrt{2}-1)=1-\sqrt{2}$

$+1$

$=2-\sqrt{2}$

例 4　如果$\log_8 a+\log_4 b^2=5$,而且$\log_8 b+\log_4 a^2$

$=7$，求ab。

思路分析　两已知式中分别含有$\log_8 a$及$\log_8 b$，$\log_4 b^2$及$\log_4 a^2$，再利用对数性质可得$\log_8 ab+\log_4 a^2b^2=12$，又因为$8=2^3$，$4=2^2$，上式左边可化为以2为底的对数，问题即可解决。

解　将已知两式相加

$$\log_8 ab+\log_4 a^2b^2=12$$

再由对数性质得

$$\frac{1}{3}\log_2 ab+\frac{2}{2}\log_2 ab=12$$

$$\therefore \frac{4}{3}\log_2 ab=12$$

$$\therefore \log_2 ab=9 \quad ab=2^9 \quad ab=512$$

2.　巧用特殊值计算

当利用已知条件求值无法进行或计算量较大时，常利用特殊数之间的关系，如$\log_{ab}a+\log_{ab}b=1$，$a+\sqrt{b}$与$a-\sqrt{b}$的和与积均为有理数，$\sqrt{a}+|b|+c^2=0$成立的条件为$a=b=c=0$等。这时只要对有关式子适当进行变形，即可较快的求出所需要的值。

例5　计算：(1)$\lg\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)$

(2)$\lg2\cdot\lg50+\lg20\cdot\lg5-\lg100\cdot\lg2\cdot\lg5$

思路分析　(1)由于$3+\sqrt{5}$与$3-\sqrt{5}$的和与积均为有理数，因此可将$\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)$平方，而$\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2=10$，恰好与底数相同，这样将问题化简。

(2)利用$\lg2+\lg5=1$及$\lg2\cdot\lg50=(1-\lg5)(1+\lg5)$，$\lg5\cdot\lg20=(1-\lg2)(1+\lg2)$，再利用乘法公式可

将问题简化。

解 （1）原式$=\frac{1}{2}\lg(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}})$

$$=\frac{1}{2}\lg(3+\sqrt{5}-2\sqrt{9-5}+-\sqrt{5})$$

$$=\frac{1}{2}\lg 10$$

$$=\frac{1}{2}$$

（2）原式$=(1+\lg 5)(1-\lg 5)+(1+\lg 2)$

$(1-\lg 2)-2\lg 2\lg 5$

$=1-\lg^2 2+1-\lg^2 5-2\lg 2\lg 5$

$=2-(\lg 2+\lg 5)^2=2-1=1$

例6 对任意实数x，等式$ax-4x+5+b=0$恒成立，求$(a+b)^{1991}$的值。

思路分析 条件“对任意实数x，等式$ax-4x+5+b=0$恒成立”，即$(a-4)x+5+b=0$恒成立，因此必须$a-4=0$且$5+b=0$。这时$a=4$，$b=-5$问题即可解决。

解 ∵对任意实数x，$ax-4x+5+b=0$恒成立。

即$(a-4)x+5+b=0$恒成立

∴$a-4=0$且$5+b=0$

∴$a=4 \quad b=-5$

∴ $(a+b)^{1991}=(4-5)^{1991}=-1$

例7 已知$y=c\sqrt{ax-b}+d\sqrt{b-ax}+ab$

$(a, b, c, d>0)$

求：$\log_b xy$

思路分析 要使y有意义，须$ax-b$与$b-ax$均为非负

数，而这两数又互为相反数，只有它们都为零时才能成立。这样x与y的值便唯一确定了。

解　由$ax-b\geqslant0$得$x\geqslant\frac{b}{a}$ $(a>0,\ b>0)$

由$b-ax\geqslant0$得$x\leqslant\frac{b}{a}$ $(a>0,\ b>0)$

因此有 $x=\frac{b}{a}$，$y=ab$

$\therefore \log_b xy=\log_b b^2=2$

3. 用对数换底公式取对数法求值

对数换底公式及指数与对数互化也是指数对数求值的常用变形。对数换底公式 $\log_a b=\frac{\log_c a}{\log_c b}$不仅可以从左到右使用，还可逆回来应用，而且当多个对数式求积时还能推广。有些指数式的值直接求比较困难时，常常通过取对数简化求值过程。

例8　计算：$\log_2\frac{1}{125}\cdot\log_3\frac{1}{16}\cdot\log_5\frac{1}{9}$

思路分析　一般在计算时考虑应用对数换底公式得到

$$\frac{\lg\frac{1}{125}\cdot\lg\frac{1}{16}\cdot\lg\frac{1}{9}}{\lg2\cdot\lg3\cdot\lg5}=\left(\frac{\lg\frac{1}{125}}{\lg5}\right)\cdot\left(\frac{\lg\frac{1}{16}}{\lg2}\right)\cdot$$

$\left(\frac{\lg\frac{1}{9}}{\lg3}\right)$，再利用对数性质可求值。若把上式右边写成

$\log_5\frac{1}{125}\cdot\log_2\frac{1}{16}\cdot\log_3\frac{1}{9}$（逆用对数换底公式）也可很易得出结果。

由此题的解法联想到，对数换底公式可做如下推广：

设$N_i>0$，$a_i>0$，且$a_i\neq 1$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，$b_1, b_2\cdots$，b_n是a_1，a_2，$\cdots a_n$的任一排列，则$\log_{a_1}N_1\cdot\log_{a_2}N_2\cdots\cdots\log_{a_n}N_n=\log_{b_1}N_1\log_{b_2}N_2\cdots\cdots\log_{b_n}N_n$。

证 $\because b_1$，b_2，$\cdots b_n$是a_1，a_2，$\cdots a_n$的任一排列

$\therefore \lg a_1\lg a_2\cdots\lg a_n=\lg b_1\lg b_2\cdots\lg b_n$

$$左=\frac{\lg N_1}{\lg a_1}\cdot\frac{\lg N_2}{\lg a_2}\cdots\frac{\lg N_n}{\lg a_n}$$

$$=\frac{\lg N_1\lg N_2\cdots\lg N_n}{\lg b_1\lg b_2\cdots\lg b_n}=右$$

$\therefore$原等式成立

此公式表明，若干个对数相乘，任意交换它们的底数，其积不变。此公式对于简化计算是很方便的。

解 $原式=\log_2\frac{1}{16}\cdot\log_3\frac{1}{9}\cdot\log_5\frac{1}{125}$

$=(-4)(-2)(-3)$

$=-24$

例9 如果$a>0$，$a\neq 1$并且$\log_2 a=x$，$\log_5 a=y$，$\log_{10}a=z$，求x，y，z应满足的关系。

思路分析 由于三个已知式中真数均为a且$a>0, a\neq 1$，故考虑换成以a为底的对数，再利用$2\times 5=10$找x，y，z之间的关系。

解 $\because \log_2 a=x$，$\log_5 a=y$，$\log_{10}a=z$

$$\therefore \frac{1}{\log_a 2}=x, \quad \frac{1}{\log_a 5}=y, \quad \frac{1}{\log_a 10}=z$$

$$\therefore \log_a 2 = \frac{1}{x},\ \log_a 5 = \frac{1}{y},\ \log_a 10 = \frac{1}{z}$$

又 $\because \log_a 2 + \log_a 5 = \log_a 10$

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$$

$\therefore x, z, y$ 应满足的关系是：$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$

例10　已知x、y、z都是正数，且$2^x = 3^y = 6^z$，求$\frac{z}{x} + \frac{z}{y}$的值。

思路分析　由于x，y，z 均为指数，故考虑取对数，分别求出$\frac{z}{x}$，$\frac{z}{y}$再求和。

解　$\because 2^x = 3^y = 6^z$

$$\therefore x\lg 2 = y\lg 3 = z\lg 6$$

$$\therefore \frac{z}{x} = \frac{\lg 2}{\lg 6}\quad \frac{z}{y} = \frac{\lg 3}{\lg 6}$$

$$\therefore \frac{z}{x} + \frac{z}{y} = \frac{\lg 2 + \lg 3}{\lg 6} = 1$$

二　证　明　题

1. 相等关系的证明

相等关系证明题常见的有条件等式和恒等式，证明的关键就是经过适当变形，对已知式或有关式子重新组合，再应用法则、性质或公式进行代换，得到结论。

例11　已知$2^a \cdot 5^b = 2^c \cdot 5^d = 10$

求证：$(a-1)(d-1) = (b-1)(c-1)$

思路分析　本题属于条件恒等式的证明题，由已知出发，结合求证要求，适当变换条件，再寻求关系，从而得出所求证等式，这是证明条件恒等式常用方法之一。证这类问题可以从两方面思考：

（1）变换：条件中有，结论中没有的要消去，结论中有，条件中没有的要从已知变换得到。

（2）组成：由变换后的式子组成结论的形式。

证　由已知，两边同除以10，得

$$2^{a-1}\cdot 5^{b-1}=1 \qquad (1)$$

$$2^{c-1}\cdot 5^{d-1}=1 \qquad (2)$$

（1）式两边同乘 $(d-1)$ 次方；（2）式两边乘 $(b-1)$ 次方，得

$$2^{(a-1)(d-1)}\cdot 5^{(b-1)(d-1)}=1 \qquad (3)$$

$$2^{(b-1)(c-1)}\cdot 5^{(b-1)(d-1)}=1 \qquad (4)$$

（3）÷（4）得：$2^{(a-1)(d-1)}=2^{(b-1)(c-1)}$

$\therefore\ (a-1)(d-1)=(b-1)(c-1)$

例12　已知$2^{6a}=3^{3b}=6^{2c}$，求证：$3ab-2ac-bc=0$

思路分析　此类问题常用指数对数互化，即转换思想，这样往往使问题化简。

证　$\because 2^{6a}=3^{3b}$　　$\therefore 3b=2\cdot\log_3 6$

$\therefore 6a\log_3 2=3b$

$\therefore \log_3 2=\dfrac{b}{2a}$

$\because 3^{3b}=6^{2c}$　　$\therefore$　$3b=2c\cdot\log_3 b$

$\therefore 3b=2c\left(1+\dfrac{b}{2a}\right)$

即：$3ab-2ac-bc=0$

例13　已知$a^xb^yc^z=a^yb^zc^x=a^zb^xc^y=1$（a，b，c均大于1）。求证：$x+y+z=0$

思路分析　先对已知式两边取对数，使指数不含字母，同时要求证的式子左边各项的关系也可表示出来。

证　设$\lg a=A$，$\lg b=B$，$\lg c=C$

$\because a>1$，$b>1$，$c>1$

$\therefore A>0$，$B>0$，$C>0$

$\therefore \lg(a^xb^yc^z)=\lg(a^yb^zc^x)=\lg(a^zb^xc^y)=0$

$\therefore Ax+By+Cz=0$

$Bx+Cy+Az=0$

$Cx+Ay+Bz=0$

将上面三式相加，得

$$(A+B+C)(x+y+z)=0$$

$\because A>0$，$B>0$，$C>0$

$\therefore A+B+C>0$

$\therefore$ 只有$x+y+z=0$

例14　若a、b、c是互不相等，且都不等于1的正数。求证：$a^{\log_x\frac{c}{b}}\cdot b^{\log_x\frac{a}{c}}\cdot c^{\log_x\frac{a}{b}}=1$

思路分析：要证等式成立，只须证

$\log_x(a^{\log_x\frac{c}{b}}\cdot b^{\log_x\frac{a}{c}}\cdot c^{\log_x\frac{b}{a}})=0$；即证

$$\log_x\frac{c}{b}\cdot\log_x a+\log_x\frac{a}{c}\cdot\log_x b+\log_x\frac{b}{a}\cdot\log_x c=0$$

也就是要证

$(\log_x c-\log_x b)\cdot\log_x a+(\log_x a-\log_x c)\log_x b+(\log_x b-\log_x a)\log_x c=0$。该式显然成立。

例15　已知$ax^3=by^3=cz^3$，$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$

求证：$(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}$

思路分析　对含有一串等式条件的问题，往往设辅助参数证明起来比较方便。本题可设$ax^3=by^3=cz^3=k$。本题在证明过程中另一技巧是两次运用条件$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$

证　设$ax^3=by^3=cz^3=k$

则 $(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{k}{x}+\frac{k}{y}+\frac{k}{z}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$=k^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{3}}$$

又∵$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$

∴上式$=k^{\frac{1}{3}}=k^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$

$$=\frac{k^{\frac{1}{3}}}{x}+\frac{k^{\frac{1}{3}}}{y}+\frac{k^{\frac{1}{3}}}{z}$$

又$ax^3=k$　$by^3=k$　$cz^3=k$

∴ $k^{\frac{1}{3}}=x\cdot a^{\frac{1}{3}}=y\cdot b^{\frac{1}{3}}=z\cdot c^{\frac{1}{3}}$

∴ $\frac{k^{\frac{1}{3}}}{x}+\frac{k^{\frac{1}{3}}}{y}+\frac{k^{\frac{1}{3}}}{z}=\frac{x\cdot a^{\frac{1}{3}}}{x}+\frac{y\cdot b^{\frac{1}{3}}}{y}+\frac{z\cdot c^{\frac{1}{3}}}{z}$

$$=a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}$$

即：$(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}$

2. 不等关系

证不等关系常用的方法有：从已知不等式出发，利用不等式性质逐步变形为要证的不等式；用左边式子减右边式子，看它们之差与零的大小关系（对数式中常用），或求两式之比，比较它与1的大小（指数式或乘积式中常用）。

例16　已知$a>4$，求证：$\dfrac{\lg a-\lg 3}{\lg 4-\lg 3}>\dfrac{\lg(a-2)}{\lg 2}$

思路分析　此题可考虑“左减右”，并通过计算证明其大于零，中间要利用条件$a>4$。而由$a>4$所导出与不等式相关的关系为$(a-4)^2>0$，即$a^2>8a-16$，通过变形可得$\left(\dfrac{a}{4}\right)^2>\dfrac{a-2}{2}>0$。将此式两边取以10为底的对数得$2(\lg a-\lg 4)>\lg\dfrac{a-2}{2}$。原不等式左边分母$\lg 4-\lg 3<\lg\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}\lg 2$。因此将上式两边同除以$\lg 2$有：

$$\frac{\lg a-\lg 4}{\lg 4-\lg 3}>\frac{\lg a-\lg 4}{\frac{1}{2}\lg 2}>\frac{\lg\frac{a-2}{2}}{\lg 2}$$

即$\dfrac{\lg a-\lg 4}{\lg 4-\lg 3}>\dfrac{\lg(a-2)-\lg 2}{\lg 2}$

再在此不等式两边同时加1即得到要证的结果。

证法一：$\dfrac{\lg a-\lg 3}{\lg 4-\lg 3}-\dfrac{\lg(a-2)}{\lg 2}$

$$=\left[\frac{\lg a-\lg 3}{\lg 4-\lg 3}-1\right]-\left[\frac{\lg(a-2)}{\lg 2}-1\right]$$