硕士研究生入学考试
数学复习与解题指南
（下册）

同 济 大 学 应 用 数 学 系
徐建平 蒋福民 范麟馨 钱伟民 编

同济大学出版社

硕士研究生入学考试

数学复习与解题指南

（下册）

同 济 大 学 应 用 数 学 系

徐建平 蒋福民 范麟馨 钱伟民 编

同济大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

硕士研究生入学考试数学复习与解题指南/徐建平编.
上海:同济大学出版社,2005.5
ISBN 7-5608-3011-0

Ⅰ.硕… Ⅱ.徐… Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 008006 号

内容提要

本书由高等数学、线性代数和概率统计三部分组成。书中按教育部最新颁布的考研大纲对各部分的重要概念和基本定理(定理和公式)作了系统的归纳和提炼,着重讨论基本题型与解题方法,并对部分例题进行了详尽的分析和总结,以拓宽读者的思路,提高他们的分析能力。

本书从历届考题中筛选了近 700 道典型例题,选辑了 100 多道习题,并附有简答。书末录入近两年硕士入学考试数学试题及参考解答。本书可供报考硕士研究生的读者作为复习数学使用,也可作为高等院校师生的数学教学参考书。

硕士研究生入学考试
数学复习与解题指南(下册)
同济大学应用数学系
徐建平 蒋福民 范麟馨 钱伟民 编
责任编辑 李炳钊 责任校对 郁 峰 封面设计 李志云

出版发行	同济大学出版社
	(上海四平路 1239 号 邮编 200092 电话 021-65985622)
经销	全国各地新华书店
印刷	同济大学印刷厂印刷
开本	889mm×1194mm 1/16
印张	14
字数	448000
印数	1—4100
版次	2005 年 5 月第 1 版 2005 年 5 月第 1 次印刷
书号	ISBN 7-5608-3011-0/O·267
定价	20.00 元

前　言

随着我国高等教育事业的迅速发展，越来越多的人接受了高等教育，他们中的许多人都希望获得更高的学历，而我国四个现代化事业的蓬勃发展也需要更多更高层次的人才。正是因为个人的追求与国家的需要相一致，所以近年来报考硕士研究生的人数在逐年增加，2005 年已突破 100 万。数学是一门重要的基础课，广大考生最关心的问题便是怎样按照考试大纲进行复习，提高复习效果，从而取得理想的考试成绩。要达到这一点，首先必须要了解考试大纲中所规定的内容，分清哪些是主要的，哪些是次要的，这些内容在深度和广度上要求达到什么程度。其次要熟悉试卷中经常出现的题型，以及一些典型的甚至比较特殊的解题方法，这样，才能通过复习，深刻理解概念，牢固掌握解题方法，并在考试中付诸实践，从而取得好成绩。

为满足考生的需要，我们认真总结了近十年来所举办的考研复习辅导班积累的经验和资料，深入研究了历年来考试题型的结构、形式和特点，按照教育部新近颁布的数学考研大纲，编写了这本书。它不仅对报考研究生的人员是一本有用的辅导材料，对正在本科阶段学习高等数学、线性代数和概率统计的学生同样也是一本有价值的参考书。这不仅因为本书的内容与所选的例题、习题与在普通高校中使用很广的由同济大学应用数学系所编写、高等教育出版社出版的《高等数学》(第五版)和《线性代数》(第四版)有很好的衔接，而且因为本书所总结的题型和解题方法对本科生学好高等数学和线性代数以及概率统计也大有裨益。

本书的编写突出一个宗旨：应试针对性强，力求使考生通过较短时间的复习，能达到考试大纲所规定的要求，并掌握一整套常用的基本解题方法。

本书由“高等数学”、“线性代数”和“概率统计”三个部分组成，具备以下几个特色：(1) 吸收了历届试卷中经常出现的典型考题，并进行分析解答；(2) 许多章节对基本题型和解题方法作了总结归纳，便于学生总结提高；(3) 指出解题中容易出错的地方，了解命题意图或考生容易误入的“陷阱”；(4) 高等数学各章均包含一定数量的习题及简答，做好这些习题，有利于提高考生解题的基本功；线性代数和概率统计最后都安排了一些综合练习题，并附有简答，旨在提高考生的综合解题能力。

本书每章开头有复习要求、基本概念和理论，目的是帮助考生掌握好各章的内容。复习要求中对理论部分的要求分“了解”和“理解”两档，理解高于了解；对运算部分的要求分“会”、“掌握”和“熟练掌握”三档。本书录入 2005 年硕士研究生入学考试数学试题参考答案及评分标准，供考生参考。

本书由同济大学应用数学系徐建平、蒋福民、范麟馨、钱伟民等编写，由于编者水平有限，书中难免有错误和不妥之处，恳请同行批评指正。

编者

2005.1.28

目 录

线性代数

概率统计

附录 全国硕士研究生入学统一考试答案和评分参考

线性代数

线性代数的复习，根据“考试大纲”的要求以及历年的考题情况，考生需掌握以下诸方面的内容：(1) 行列式的计算；(2) 矩阵的运算；(3) 线性方程组的求解；(4) 特征值和特征向量的计算；(5) 二次型的化简；(6) 有关的基本概念和基本理论．

有关线性代数内容的考题在数学试卷一、试卷二中约占 20%；在试卷三、试卷四中约占 26%.

考生如能按照本教材要求认真复习，掌握基本题型和解题方法，则不难达到考试大纲的要求，且能获得满意的成绩．

第一章　行列式

本章重点是利用行列式的性质计算行列式．

一、复习与考试要求

（1）了解行列式的概念，掌握行列式的性质．

（2）熟练应用行列式的性质和行列式按行（列）展开定理计算行列式．

（3）掌握按某行（列）展开的方法建立特殊的 n 阶行列式的递推关系，再求出该行列式的值．

二、基本概念与理论

1. n 阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_n)} (-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)} a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \cdots \cdot a_{nj_n}.$$

（1）记号 $\sum\limits_{(j_1,j_2,\cdots,j_n)}$ 表明：对列指标所有的 n 元全排列求和，由此可知 n 阶行列式是有 $n!$ 项的代数和．

（2）记号 $(-1)^{\tau(j_1,\cdots,j_n)}$ 确定了每一项前所带的正负号，其中 $\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)$ 是排列 $(j_1,j_2,\cdots,j_n)$ 的逆序数．

（3）每一项 $a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \cdots \cdot a_{nj_n}$ 表明有 n 个元素相乘，而且这 n 个元素必须取自于不同行，不同列．

2. n 阶行列式的性质

（1）$|A|=|A^{\mathrm{T}}|$　（A^{T} 是 A 的转置矩阵）

此性质表明：在行列式中，“行”与“列”具有同等地位，即对“行”所具有的性质，对“列”也同样成立，反之亦然．

（2）记 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$．这里 α_i 是 A 的第 i 列，则行列式关于“列”具有线性，即

$$|\alpha_1,\cdots,\alpha_i+\beta_i,\cdots,\alpha_n|=|\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_n|+|\alpha_1,\cdots,\beta_i,\cdots,\alpha_n|$$

$$|\alpha_1,\cdots,k\cdot\alpha_i,\cdots,\alpha_n|=k\cdot|\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_n|,\quad k\text{ 为常数}.$$

推论　行列式中若有一列为 $\mathbf{0}$，则此行列式的值为 0．

（3）$|\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_j,\cdots,\alpha_n|=-|\alpha_1,\cdots,\alpha_j,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_n|$，即行列式互换两列，则行列式反号．

推论 1　行列式中若有两列相同，则此行列式值为 0．

推论 2　行列式中若有两列对应成比例，则此行列式值为 0．

（4）$|\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_j,\cdots,\alpha_n|=|\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,k\cdot\alpha_i+\alpha_j,\cdots,\alpha_n|$．

（5）行列式按行（列）展开定理

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=\begin{cases}|A|, & k=i;\\ 0, & k\neq i.\end{cases}$$

$$a_{1j}A_{1s}+a_{2j}A_{2s}+\cdots+a_{nj}A_{ns}=\begin{cases}|A|, & s=j;\\ 0, & s\neq j.\end{cases}$$

3. 克莱默(Cramer)法则

线性方程组 $A_{n\times n}\cdot X_{n\times 1}=b_{n\times 1}$,若 $|A|\neq 0$,则有惟一解:

$$x_j=\frac{|A_j|}{|A|},\quad j=1,2,\cdots,n$$

其中,A_j 是用列向量 $\boldsymbol{b}$ 换掉 A 中的第 j 列而得到的矩阵.

4. 范德蒙(Vandermende)行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j).$$

5. n 阶矩阵的行列式

(1) $|\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}|$, $\quad|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}|^2$

(2) $|k\boldsymbol{A}|=k^n\cdot|\boldsymbol{A}|$, k 为任意常数.

(3) $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}_{m\times m} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C}_{n\times m} & \boldsymbol{B}_{n\times n}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}_{m\times m}|\cdot|\boldsymbol{B}_{n\times n}|$

但是 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{D}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}\neq|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|-|\boldsymbol{C}|\cdot|\boldsymbol{D}|$,其中,$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 皆为方阵.

三、基本题型与解题方法

例 1-1 计算

$$D_4=\begin{vmatrix}4 & 2 & 2 & 2\\ 2 & 4 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 4 & 2\\ 2 & 2 & 2 & 4\end{vmatrix}.$$

分析 易见行列式的每行(列)都有公因子2,而且公因子2提出后各行元素之和均为5,因此可把各列元素都加到第一列上,再提取公因子5,然后将改变后的行列式化成三角行列式,从而计算出值.

解

$$D_4=2^4\begin{vmatrix}2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 2\end{vmatrix}\xlongequal[c_1\div 5]{c_1+c_2+c_3+c_4}2^4\times 5\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 2\end{vmatrix}\xlongequal[\substack{r_3-r_1\\ r_4-r_1}]{r_2-c_1}80\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=80.$$

例 1-2 计算行列式

$$D_5=\begin{vmatrix}5 & 3 & -1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 4 & 2 & 0\\ 0 & -7 & -3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0\\ 0 & 6 & -2 & -4 & 2\end{vmatrix}.$$

分析 此行列式的特点是第1列只有两个元素不等于0(第5列,第4行也如此),这种情形是适合于按

列计算(行展开进行降阶计算). 此外第 5 行有公因子 2,且第 1 行与第 5 行有四个元素成比例.

解

$$D_5 \xlongequal{r_1-\frac{1}{2}r_5} \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & -4 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1\text{展开}} 5\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ -7 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 6 & -2 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_4\text{展开}} 5\times 2\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -7 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2+7r_1} 10\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 25 & 15 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1\text{展开}} 10\begin{vmatrix} 25 & 15 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1\div 5} 10\times 5\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 50.$$

例 1-3　计算

$$D_6 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & & & a \\ 1 & 1 & 1 & & a & \\ 1 & 1 & 1 & a & & \\ & & b & 1 & & \\ & b & & & 1 & \\ b & & & & & 1 \end{vmatrix},\quad ab\neq 0\text{,未写出的元素为 }0.$$

分析　消去第 1,2,3 行中的 a,将行列式化简为第 4,5,6 列都只有一个非零元素,再按此 3 列陆续展开降阶计算.

解

$$D_6 \xlongequal[r_3-ar_4]{\substack{r_1-ar_6\\ r_2-ar_5}} \begin{vmatrix} 1-ab & 1 & 1 & & & \\ 1 & 1-ab & 1 & & & \\ 1 & 1 & 1-ab & & & \\ & & b & 1 & & \\ & b & & & 1 & \\ b & & & & & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{展开}]{\substack{\text{分别按第}\\ 6,5,4\text{ 列}}} \begin{vmatrix} 1-ab & 1 & 1 \\ 1 & 1-ab & 1 \\ 1 & 1 & 1-ab \end{vmatrix} \xlongequal[\text{第一行提取 }3-ab]{r_1+r_2+r_3} (3-ab)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-ab & 1 \\ 1 & 1 & 1-ab \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1} (3-ab)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -ab & 0 \\ 0 & 0 & -ab \end{vmatrix} = (3-ab)a^2b^2.$$

例 1-4　计算

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} a_n & & & & & b_n \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_n & & & & & d_n \end{vmatrix},\quad a_ib_ic_id_i\neq 0, i=1,\cdots,n.$$

分析 这个行列式的特点是不言自明的,适合于按行(列)展开降阶计算.也可以应用例 1-4 的方法将它化成下三角行列式,再计算出值.

$$D_{2n}\xlongequal{\text{按 } r_1 \text{ 展开}} a_n(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{n-1} & & & & & b_{n-1} & 0 \\ & \ddots & & & \iddots & & \\ & & a_1 & b_1 & & & \\ & & c_1 & d_1 & & & \\ & \iddots & & & \ddots & & \\ c_{n-1} & & & & & d_{n-1} & 0 \\ 0 & & & & & 0 & d_n \end{vmatrix}$$

$$+b_n(-1)^{1+2n}\begin{vmatrix} 0 & a_{n-1} & & & & & b_{n-1} \\ & & \ddots & & & \iddots & \\ & & & a_1 & b_1 & & \\ & & & c_1 & d_1 & & \\ & 0 & \iddots & & & \ddots & \\ & c_n-1 & & & & & d_{n-1} \\ c_n & & & & & & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(a_nd_n-b_nc_n)D_{2(n-1)}$$

所以

$$D_{2n}=(a_nd_n-b_nc_n)(a_{n-1}d_{n-1}-b_{n-1}c_{n-1})D_{2(n-2)}\cdots$$

$$=(a_nd_n-b_nc_n)\cdots(a_2d_2-b_2c_2)D_2=\prod_{i=1}^{n}(a_id_i-b_ic_i).$$

例 1-5 计算

$$D=\begin{vmatrix} o & a & b & o \\ c & o & o & d \\ e & o & f & o \\ o & g & o & h \end{vmatrix}.$$

分析 行列式元素中零元素较多,故可考虑按定义去求,也可考虑用按行展开定理去做.

解法 1 按定义,只要考虑非零项:$acfh$ 与 $bdeg$. $acfh$ 所带的符号为:$(-1)^{\tau(2134)}=(-1)^1=-1$. $bdeg$ 所带的符号为:$(-1)^{\tau(3412)}=(-1)^4=1$. 所以,$D=bdeg-acfh$.

解法 2

$$D=-a\cdot\begin{vmatrix} c & o & d \\ e & f & o \\ o & o & h \end{vmatrix}+b\cdot\begin{vmatrix} c & o & d \\ e & o & o \\ o & g & h \end{vmatrix}$$

$$=-ah\cdot\begin{vmatrix} c & o \\ e & f \end{vmatrix}-be\cdot\begin{vmatrix} o & d \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$=-ahcf+begd.$$

例 1-6 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素皆为整数,试证 $2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆.

分析 矩阵可逆的等价条件有好多种说法.本题可按定义论证 $|2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|\neq 0$,从而 $2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆.

证 因 $\boldsymbol{A}$ 的元素皆为整数,故 $2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 的对角线元素皆为奇数,而非对角线元素皆为偶数.按定义考虑行列式 $|2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|$:只有所有对角线元素相乘这一项是奇数,而其余的 $(n!)-1$ 项均为偶数,因此,它们的代数和不等于零.

例 1-7　n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素全为 1 和 -1 组成. 试证：$|\boldsymbol{A}|$ 可被 2^{n-1} 整除.

分析　行列式计算中，很基本的一个方法是通过消零，然后降阶. 在行列式中有很多 1 或 -1 时，消零是方便的.

证　不妨设 $a_{11}=1$，把第一列 a_{11} 以下的元素全消成零，即

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boldsymbol{B}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{vmatrix}=|\boldsymbol{B}_{n-1}|$$

而 $\boldsymbol{B}_{n-1}$ 中的元素全为 $2,-2,0$. 故可在每一行中提出公因子 2，则 $|\boldsymbol{B}_{n-1}|=2^{n-1}\cdot|\boldsymbol{C}_{n-1}|$. 即

$$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}_{n-1}|=2^{n-1}\cdot|\boldsymbol{C}_{n-1}|.$$

而 $\boldsymbol{C}_{n-1}$ 中的元素皆为整数，故 $|\boldsymbol{C}_{n-1}|$ 是整数，因此 $|\boldsymbol{A}|$ 可被 2^{n-1} 整除.

例 1-8　计算

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

分析　此行列式的特点是各行元素之和均为 x，故可把各列都加到第一列上，然后把公因子 x 提出，则第一列均为 1，再考虑消零.

解

$$D=x\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=x\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=x^4$$

例 1-9　计算

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

分析　行列式的特点是各行元素之和是常数，则可把各列都加到第一列上去，把此常数提出，第一列全是 1，再考虑消零.

解

$$D_n=[a+(n-1)b]\cdot\begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 1 & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & b & \cdots & a \end{vmatrix}=[a+(n-1)b]\cdot\begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b]\cdot(a-b)^{n-1}$$

例 1-10　设多项式

$$f(x)=\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & a_{13}+x & a_{14}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & a_{23}+x & a_{24}+x \\ a_{31}+x & a_{32}+x & a_{33}+x & a_{34}+x \\ a_{41}+x & a_{42}+x & a_{43}+x & a_{44}+x \end{vmatrix},$$

问：$f(x)$ 是几次多项式？

分析 要先把此行列式利用行列式的性质把它化简.

解 把第一行的(-1)倍分别加到第二、三、四行，得

$$f(x)=\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & a_{13}+x & a_{14}+x \\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & a_{23}-a_{13} & a_{24}-a_{14} \\ a_{31}-a_{11} & a_{32}-a_{12} & a_{33}-a_{13} & a_{34}-a_{14} \\ a_{41}-a_{11} & a_{42}-a_{12} & a_{43}-a_{13} & a_{44}-a_{14} \end{vmatrix},$$

再按第一行展开，可知 $f(x)$ 是 1 次多项式.

例 1-11 设

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix},$$

问：方程 $f(x)=0$ 有几个根？

分析 本题实质是一个计算四阶行列式的问题.通常采用行列式的性质，把它化简.

解 由行列式的性质知：

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}=x\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$$

$$=x\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & x-5 & -5 \\ 0 & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix}=x\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x-2 & -2 \\ 0 & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix}$$

$$=x\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & x-2 & -2 \\ -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix}=x\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & x-2 & -1 \\ 0 & x-7 & -6 \end{vmatrix}$$

$=5x(x-1)=0$， 故方程有 2 个根.

例 1-12 方程求根：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & x \\ 4 & 1 & 9 & x^2 \\ 8 & -1 & 27 & x^3 \end{vmatrix}=0.$$

分析 等号左边的行列式是范德蒙行列式，可直接利用结论.

解 左式 $=(x-2)(x+1)(x-3)(3-2)(3+1)(-1-2)$，可知此方程的三个根为：$x_1=2,x_2=-1,x_3=3$.

例 1-13 计算

$$D_4=\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}.$$

分析　此行列式的各列元素有类似的结构，可考虑列变换.

解　把第三列乘(−1)加到第四列上，再把第二列乘(−1)加到第三列上，再把第一列乘(−1)加到第二列上.

$$D_4=\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2a+3 & 2a+5 \\ b^2 & 2b+1 & 2b+3 & 2b+5 \\ c^2 & 2c+1 & 2c+3 & 2c+5 \\ d^2 & 2d+1 & 2d+3 & 2d+5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 2 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 2 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 2 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

例 1-14　计算

$$D_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}.$$

其中，a,b,c,d 互不相同.

解法 1　题给的行列式像范德蒙行列式，但不是范德蒙行列式，可考虑用加边法，即添加一行一列使之凑成范德蒙行列式，再利用它的结果.

$$V_5=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & x^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & x^4 \end{vmatrix}$$

$$=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\cdot[(d-a)(d-b)(d-c)(c-b)(c-a)(b-a)].$$

记方括号中的数为 k，即

$$V_5=k\cdot(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) \tag{1}$$

另外，V_5 按第五列展开，是 x 的四次多项式，而所要求的 D_4 正是 x^3 的余子式，即有

$$V_5=1\cdot A_{51}+x\cdot A_{52}+x^2\cdot A_{53}+x^3A_{54}+x^4A_{51} \tag{2}$$

比较式(1)与式(2)中 x^3 的系数，可得

$$-D_4=k(-a-b-c-d),$$

即　　$$D_4=k(a+b+c+d)=(d-a)(d-b)(d-c)(c-b)(c-a)(b-a)(a+b+c+d).$$

解法 2　用降阶法，即把第三行乘$(-a^2)$加到第四行上，再把第二行乘$(-a)$加到第三行，再把第一行乘$(-a)$加到第二行上，即有

$$D_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) & d(d-a) \\ 0 & b^2(b^2-a^2) & c^2(c^2-a^2) & d^2(d^2-a^2) \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2(b+a) & c^2(c+a) & d^2(d+a) \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[-b(b+a)r_2+r_3]{-b\cdot r_1+r_2}(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\0 & c-b & d-b\\0 & (c-b)c(a+b+c) & (d-b)d(a+b+d)\end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d).$$

解法 3 线性因式法.把 D_4 看成 a 的四次多项式 $D_4(a)$.由于 $D_4(b)=0,D_4(c)=0,D_4(d)=0$.故可记 $D_4(a)=h(a-b)(a-c)(a-d)(a-\beta)$,其中,$h,\beta$ 是待定常数.又因 b,c,d,β 是 $D_4(a)$ 的根,且 $D_4(a)$ 无 a^3 项,故由韦达定理,有 $b+c+d+\beta=0$.即 $\beta=-(b+c+d)$.而 h 是 a^4 的系数,故

$$h=-\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\b & c & d\\b^2 & c^2 & d^2\end{vmatrix}=(b-c)(d-b)(d-c),$$

把 h 及 β 代回 $D_4(a)$ 的表达式中,得

$$D_4=(b-c)(b-d)(c-d)(a-b)(a-c)(a-d)(a+b+c+d).$$

例 1-15 计算

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n\\2 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1\\3 & 2 & 1 & \cdots & n-3 & n-2\\\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 2\\n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1\end{vmatrix}$$

分析 此行列式的特点是每相邻两行对应位置的元素都差 1.这样,可利用行列式的性质使它出现很多 1 和 -1.再考虑消零就比较方便了.

解

$$D_n\xlongequal[\substack{(-1)r_2+r_3\\(-1)r_1+r_2}]{\substack{(-1)r_{n-1}+r_n\\(-1)r_{n-2}+r_{n-1}\\\vdots}}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n\\1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1\\1 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1\\\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & -1\\1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_n+c_{n-1}]{\substack{c_n+c_1\\c_n+c_2\\\vdots}}\begin{vmatrix}n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & 2n-1 & n\\0 & -2 & -2 & \cdots & -2 & -1\\0 & 0 & -2 & \cdots & -2 & -1\\\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & -1\\0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1\end{vmatrix}$$

$$=(-1)(-2)^{n-2}\cdot(n+1).$$

例 1-16　计算

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\b_1&a_1&a_1&\cdots&\cdots&a_1\\b_1&b_2&a_2&\cdots&\cdots&a_2\\b_1&b_2&b_3&a_3&\cdots&a_3\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\b_1&b_2&b_3&\cdots&\cdots&a_{n-1}\\b_1&b_2&b_3&\cdots&\cdots&a_n\end{vmatrix}$$

解

$$D_{n+1}\xlongequal[\text{一行的公因子}(a_1-b_1)\text{提出}]{\text{把第一列的}b_1\text{全消为0后,按第一列展开,并把展开式中第}}(a_1-b_1)\cdot\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\b_2-b_1&a_2-b_1&a_2-b_1&\cdots&a_2-b_1&a_2-b_1\\b_2-b_1&b_3-b_1&a_3-b_1&\cdots&a_3-b_1&a_3-b_1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\b_2-b_1&b_3-b_1&b_4-b_1&\cdots&a_{n-1}-b_1&a_{n-1}-b_1\\b_2-b_1&b_3-b_1&b_4-b_1&\cdots&b_n-b_1&a_n-b_1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{中第一行的公因子}(a_2-b_2)\text{提出}]{\text{把第一列的}b_2-b_1\text{全消为0后,按第一列展开,并把展开式}}(a_1-b_1)(a_2-b_2)\cdot\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\b_3-b_2&a_3-b_2&a_3-b_2&\cdots&a_3-b_2&a_3-b_2\\b_3-b_2&b_4-b_2&a_4-b_2&\cdots&a_4-b_2&a_4-b_2\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\b_3-b_2&b_4-b_2&b_5-b_2&\cdots&a_{n-1}-b_2&a_{n-1}-b_2\\b_3-b_2&b_4-b_2&b_5-b_2&\cdots&b_n-b_2&a_n-b_2\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{依次类推}}\cdots\cdots=\prod_{i=1}^{n}(a_i-b_i).$$

例 1-17　计算

$$D_n=\begin{vmatrix}2&1&&&&\\1&2&1&&&\\&1&2&1&&\\&&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&&&2&1\\&&&&1&2\end{vmatrix}.$$

分析　此类行列式称为三对角行列式.一般先经过按第一行展开,找出递推关系.

解

$$\begin{aligned}D_n&=2\times D_{n-1}-D_{n-2}=2(2D_{n-2}-D_{n-3})-D_{n-2}\\&=3\times D_{n-2}-2D_{n-3}=3(2D_{n-3}-D_{n-4})-2D_{n-3}\\&=4D_{n-3}-3D_{n-4}=\cdots\\&=(n-1)D_2-(n-2)D_1=(n-1)\cdot 3-(n-2)\cdot 2\\&=n+1.\end{aligned}$$