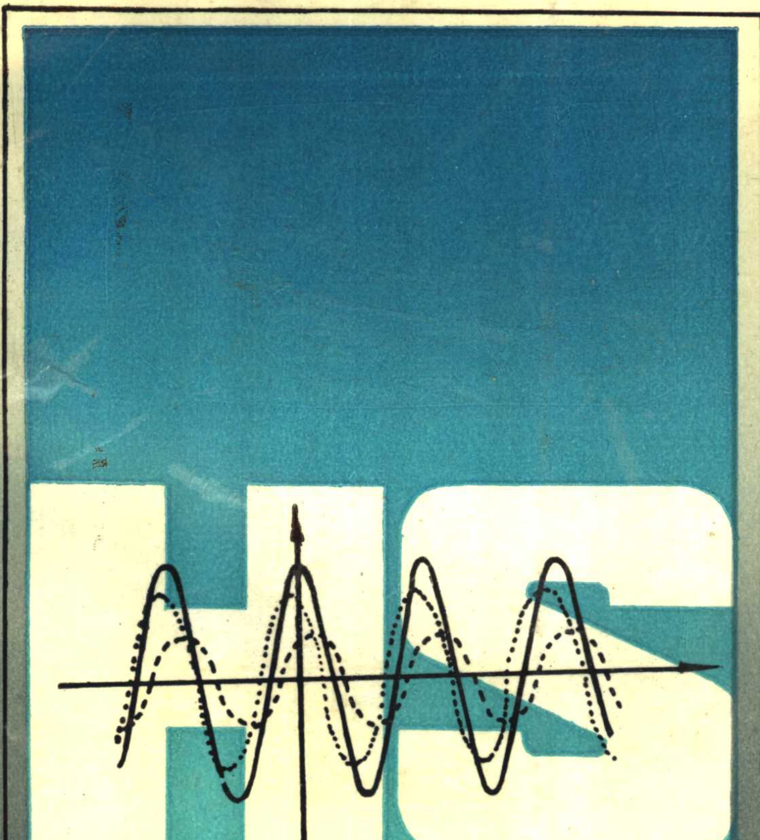
宣立新　马　明　著

周期函数初论



ZHOU QI HAN SHU CHU LUN

安徽教育出版社

宣立新　马　明　著

周期函数初论

安徽教育出版社

周期函数初论

宣立新　马　明著

安徽教育出版社出版

（合肥市金寨路283号）

安徽省新华书店发行　安徽新华印刷厂印刷

*

开本：850×1168　1/32　印张：7.5　字数：160,000

1990年5月第1版　1990年5月第1次印刷

印数：2,800

ISBN7-5336-0636-1/G·1109

定价：3.20元

序　言

周期函数论正在研究和发展中。本书以集合论为基础，建立加群的周期子集概念，并讨论周期集的性质。在此基础上，结合周期函数的几种常见定义及其特点和不足之处，定义了一般的周期函数，然后再将周期函数的有关理论系统化。因此，这是一本研究周期函数的专著。

本书用高等数学（数学分析、复变函数、实变函数、高等代数）的思想方法和结论，分析并处理周期函数的有关问题。可作为师范院校、教育学院的选修课教材，也可作为中学数学教师、科技工作者的参考书，其中部分内容可供高中学生阅读。

全书分为六章、两个附录。附录2提供了1949—1988年国内主要杂志有关周期函数的90余篇文章的索引，可供研究周期函数的同志查阅。由于各种原因，这里搜集的文章难免挂一漏万，在此对未列入的文章作者表示歉意，并欢迎读者向我们介绍未被列入文章的有关情况。

本书初稿曾由宣立新副教授于1988年上半年在南京师范大学数学系的八八届本科毕业生中作为选修课教材使用，受到学生好评。本书是在初稿使用基础上修改完成的，其中第二章由南京师范大学数学系讲师马复执笔整理。

由于水平有限，书中可能存在不少的问题，敬请读者指正。

作　者

1989年2月

目　录

第一章 周期函数的基本知识

§1 周期函数的几种常见的定义

为了研究自然界广泛存在着的周期运动，人们舍弃了各种周期运动的具体意义，揭示它们共有的本质属性，从数学的角度引进了周期函数的概念。通过对周期函数的性质的研究，可掌握周期运动的一般规律。因此作为周期函数这一概念的定义，必须刻划出周期运动的循环往复直至无穷这一特征。直观上看，实变量的周期函数的图象应该是每隔一段都要重复出现。

我们下面考察周期函数现有的几种常见的定义，为了叙述的方便，用$D(f)$表示函数$f(x)$的定义域。

首先考察1984年我国翻译出版的、由日本数学会编写的《数学百科辞典》中周期函数的定义(辞海〔3〕有类似定义，但G为实数域R)。

定义Ⅰ[1] 在加法群G上定义的函数$f(x)$，如果对于某个$\omega\in G$，关系式

$$f(x+\omega)=f(x)$$

对一切$x\in G$成立，则称ω为$f(x)$的周期。具有不等于0(G的单位元素)的周期的函数$f(x)$，称为周期函数。

当群G取实数域R或R的子群时，按定义Ⅰ定义的周期函数的图象，自变量每增加ω时，函数的图象都重复出现。

必须指出，有些重要的周期函数，如三角函数中的正切函数、余切函数、正割函数、余割函数都不满足定义Ⅰ。事实上，对于余切函数、正割函数来说，数0不在定义域内，当然这两个函数的定义域构不成加群；对于正切函数、余割函数，$\frac{\pi}{3}$和$\frac{\pi}{6}$在它们的定义域内，但$\frac{\pi}{3}$与$\frac{\pi}{6}$的和$\left(\frac{\pi}{2}\right)$不在它们的定义域内，所以正切函数、余割函数的定义域也构不成加群。从而以上四个三角函数在定义Ⅰ下都不是周期函数。显然这是不合适的。因此在定义Ⅰ中对周期函数的定义域是一个加群的要求，要适当放宽。

再考察两种周期函数的定义，函数的定义域是实数域R的子集。

定义Ⅱ[4] 对函数$f(x)$，如果存在常数$l\neq 0$，每个$x\in D(f)$，有

$$f(x+l)=f(x-l)=f(x)$$

成立，则称$f(x)$为周期函数，l为$f(x)$的一个周期。如果$f(x)$的所有正周期中存在最小值l_0，称l_0为周期函数$f(x)$的最小正周期。

著名的教科书[4]和我国的许多数学刊物上有关周期函数的文章，常采用定义Ⅱ。

定义Ⅱ有它的等价形式。

定义Ⅱ′ 对函数$f(x)$，如果存在常数$l\neq 0$，每个$x\in D(f)$，有

$$x \pm l \in D(f) \quad \text{且} \quad f(x+l)=f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，l 为 $f(x)$ 的一个周期。

定义Ⅱ与定义Ⅱ′的等价是显然的。

日本的高中数学课本[5]采用了定义Ⅱ′。

定义Ⅲ 对函数 $f(x)$，如果存在常数 $l \neq 0$，每个 $x \in D(f)$，有

$$f(x+l)=f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，l 为 $f(x)$ 的一个周期。

我国的许多大学、中学的数学课本，如[6]—[11]都采用了定义Ⅲ，《幼狮数学大辞典》[2]、日本的高中数学课本[14]、苏联出版的教材[12]、[13]也都采用了定义Ⅲ。

我们要指出：一、定义Ⅱ与定义Ⅲ是不等价的，如定义Ⅱ下的周期函数的定义域，其上方、下方都是无界的，而定义Ⅲ下的周期函数的定义域可以是上方(或下方)有界的。二、定义Ⅱ下的周期函数 $f(x)$ 的图象，沿 x 轴的任一方向，每隔 l 个单位(l 是 $f(x)$ 的周期)，图象总是重复出现的(事实上，设 $P(x, f(x))$ 为函数 $f(x)$ 的图象上的任一点，由周期函数的定义Ⅱ，点 $P_1(x-l、f(x))$、点 $P_2(x+l, f(x))$ 也都在函数 $f(x)$ 的图象上)，而定义Ⅲ下的周期函数，其图象沿 x 轴的任一方向，每隔 l 个单位，它的图象都不一定能重复出现。这只要注意下面的两个例题。

例1 $f(x)=\sin x$，$D(f)=\{x \in R; \ x \neq 2n\pi+\frac{\pi}{2}, n=-1, -2, \cdots\}$。分别在定义Ⅰ、定义Ⅱ、定义Ⅲ的意义下，讨论 $f(x)$ 的周期性。

解 (1)在定义Ⅰ的意义下，由于 $D(f)$ 不构成加群$\Big($如$\frac{3\pi}{2}$

无逆元)，所以 $f(x)$ 在定义Ⅰ下不是周期函数。

(2)在定义Ⅱ的意义下，我们证明 $f(x)$ 也不是周期函数。

设函数 $f(x)$ 是周期函数，l 是它的一个周期，则任意 $x\in D(f)$，有

$$\sin(x+l)=\sin x,$$

令 $x=\frac{\pi}{2}$，得 $\cos l=1$，所以 $l=2n\pi(n\in Z,\ n\neq 0)$。

仍取 $x=\frac{2}{\pi}$，对 $n\in Z$，$n<0$，有 $x+l\notin D(f)$；对 $n\in N$，有 $x-l\notin D(f)$；与定义Ⅱ矛盾。因此 $f(x)$ 在定义Ⅱ下不是周期函数。

(3)在定义Ⅲ的意义下，我们证明 $f(x)$ 是周期函数。

任意 $x\in D(f)$，有 $x\neq 2n\pi+\frac{\pi}{2}(n=-1,\ -2,\ \cdots)$，故 $x+2\pi\neq 2(n+1)\pi+\frac{\pi}{2}(n=-1,\ -2,\ \cdots)$，即 $x+2\pi\neq 2m\pi+\frac{\pi}{2}(m=0,\ -1,\ -2,\ \cdots)$，所以 $x+2\pi\in D(f)$。

$$f(x+2\pi)=\sin(x+2\pi)=\sin x=f(x)$$

由定义Ⅲ，$f(x)$ 是周期函数，2π 是它的一个周期。函数 $f(x)$ 的图象如图1-1所示，在自变量每增加 2π 时，$f(x)$ 的图象不是都重复出现的，如 $[0,\ 2\pi)$ 上函数 $f(x)$ 的图象并不能由 $[-2\pi,\ 0)$ 上 $f(x)$ 的图象右移 2π 得到。

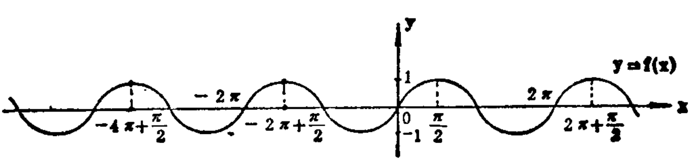


图 1-1

例2 $g(x)=\sin x$, $D(g)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$, 任意$n\in N$,

$$E_n=[2n\pi,\ 2(n+1)\pi)-\left\{2n\pi+\frac{\pi}{k}:\ k=n,n+1,\cdots\right\},$$

分别在定义Ⅰ、定义Ⅱ、定义Ⅲ的意义下，讨论函数$g(x)$的周期性。

解 由于$D(g)$是下方有界的，容易验证在定义Ⅰ、定义Ⅱ的意义下，函数$g(x)$都不是周期函数，我们下面证明在定义Ⅲ的意义下，函数$g(x)$是周期函数。

任意$x\in D(g)$，有$n\in N$，使$x\in E_n$。故

$$2n\pi\leqslant x<2(n+1)\pi$$

且

$$x\neq 2n\pi+\frac{\pi}{k}\quad(k=n,\ n+1,\ \cdots)$$

因此
$$2(n+1)\pi\leqslant x+2\pi<2(n+2)\pi$$

且

$$x+2\pi\neq 2(n+1)\pi+\frac{\pi}{k}\quad(k=n,\ n+1,\ \cdots)$$

当然有

$$x+2\pi\neq 2(n+1)\pi+\frac{\pi}{k}\quad(k=n+1,\ n+2,\ \cdots)$$

所以
$$x+2\pi\in E_{n+1}$$

从而
$$g(x+2\pi)=\sin(x+2\pi)=\sin x=g(x)$$

据定义Ⅲ，$g(x)$是以2π为周期的周期函数。

注意：对$n\in N$，$f(x)$在点$2n\pi+\dfrac{\pi}{n}$处无定义，但$f(x)$在E_{n+1}中的点$2(n+1)\pi+\pi/n$处有定义。因此在自变量每增加2π时，函数$g(x)$的图象总不能重复出现，函数$g(x)$的图象如图

1-2所示。

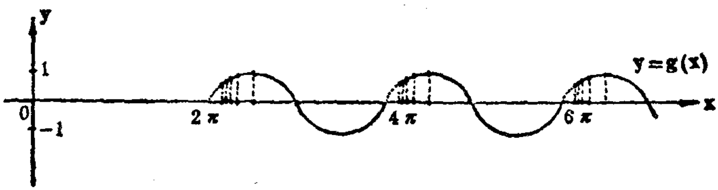


图 1-2

由例1、例2可见，对于实变数函数，不管函数的定义域上、下方都无界，还是上、下方有一方是有界的，用定义Ⅲ定义的周期函数，它的定义域不能保证周期性变化，从而函数的图象也不能保证周期性变化。综上所述，定义Ⅲ作为周期函数的定义是欠妥的。

以上我们列举了周期函数现有的三种常见的定义，对每种定义都进行了分析，其中定义Ⅱ是比较好的，但另两种定义都是欠妥的。由此可见，当前周期函数这一概念的定义是比较混乱的，它影响了对函数周期性的深入讨论。在下一节我们还将指出定义Ⅱ并不是最理想的，然后给出一种较理想的一般化定义，在此基础上，讨论周期函数有关的各种性质。

§2 周期集与周期函数

在§1中，我们分析了定义Ⅰ的条件较强；定义Ⅲ不能反映周期函数的本质特征；定义Ⅱ是一种较好的定义，但定义Ⅱ的两个条件

$$f(x+l)=f(x)、f(x-l)=f(x)$$

是不独立的。事实上，只要有

$$f(x+l)=f(x),\ x-l\in D(f)$$

成立，在前一式中用$x-l$代替x，可得

$$f[(x-l)+l]=f(x-l)$$

即
$$f(x-l)=f(x)$$

显然条件$x-l\in D(f)$比条件$f(x-l)=f(x)$弱。

另外，对于周期函数的定义域应推广到加群的子集上。因此§1中的定义Ⅱ作为周期函数的定义不是最理想的。

在§1中我们已经指出，实变数的周期函数$y=f(x)$的图象，必须沿着x轴的任一个方向每隔l个单位（l为$f(x)$的一个周期），图象总能重复出现。如果用直线$y=c$截$y=f(x)$的图象，得到直线$y=c$上的一个"图形"，此"图形"沿x轴的任一个方向，每隔l个单位也必有重复出现的特性。如果函数$y=g(x)$的图象被某条直线$y=c$截得的"图形"沿x轴的某个方向不具有每隔一段"图形"重复出现的性质，则$y=g(x)$必不是周期函数。而研究一条直线上的"图形"不具有每隔一段重复出现的性质，比研究平面上一条曲线不具有沿x轴方向每隔一段重复出现的性质要方便得多。为此下面先讨论周期集及其基本性质，在此基础上，再定义周期函数，讨论周期函数的性质。

定义1 $(G,\ +)$是一个加群，$M\subset G$，若有非单位元素$l\in G$（记$-l$为l在G中的逆元），对任意的$x\in M$，有

$$x+l\in M,\ x+(-l)\in M$$

成立，则称M为加群G的周期子集，简称周期集，l为M的一个周期。

定理1 若l是周期集M的周期，则l在G中的逆元$-l$也是M的周期。

定理2 每个不是平凡的加群G都是周期集，G的每个非单

位元素都是它的周期。

定理1、定理2由定义1立即可得。

必须指出，加群G的周期子集M未必是G的子群。

例1 $M=\left\{n+\frac{1}{2}: n\in Z\right\}$按通常的加法，$M$是$R$的周期子集，$\pm\frac{1}{2}\in M$，但$\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=0\notin M$，因此$M$不是$R$的子群。

定理3 M是加群G的周期子集，且M是G的真子集，则M关于G的补集$G-M$仍是G的周期子集，且l是M的周期的充要条件为l是$G-M$的周期（以下简称M与$G-M$的周期一致）。

证明 设l是M的一个周期，任意$x\in G-M$，（即$x\notin M$），用反证法证明：$x+l\in G-M$，$x+(-l)\in G-M$（即$x+l\notin M$，$x+(-l)\notin M$）。

若$x+l\in M$，由l是M的周期，有$(x+l)+(-l)\in M$，即$x\in M$，与$x\notin M$矛盾，所以$x+l\notin M$。同理$x+(-l)\notin M$。因此$G-M$是周期集，M的任一个周期都是$G-M$的周期。

$M=G-(G-M)$，即M是$G-M$在G中的补集，由上面的证明，$G-M$的任一个周期也都是M的周期。从而M与$G-M$的周期一致。

下面给出周期函数的定义，并讨论函数的周期性与集合的周期性之间的关系。

定义2 l是加群G的周期子集M的一个周期，$f(x)$是定义在M上的函数，如果对任意$x\in M$，有

$$f(x+l)=f(x)$$

成立，则称$f(x)$是M上的一个周期函数，l是$f(x)$的一个周期。

容易证明，$f(x)$的周期的全体连同单位元构成G的一个子

群，该子群若存在基ω_1、…、ω_n，则称这些ω_1、…、ω_n为$f(x)$的基本周期。

周期函数的定义有以下的等价形式。

定理4 $f(x)$是定义在加群G的子集M上的一个函数，则$f(x)$是M上的周期函数的充要条件为存在G中的一个非单位元l，使得对任意$x\in M$，有

$$f(x+l)=f[x+(-l)]=f(x) \qquad \text{成立。}$$

推论 $f(x)$是加群G的子集M上的周期函数，若l为$f(x)$的周期，则$(-l)$也是$f(x)$的周期。

定理5 加群G的子集M上的常值函数$f(x)$为周期函数的充要条件是M为周期集。

推论 加群G的子集M上的常值周期函数与周期集M的周期一致。

定理4、定理5及它们的推论，由周期集和周期函数的定义立即可得，这里不证了。

在定义2中，如果$M=G$，则定义2即§1的定义Ⅰ。如果加群G即实数域R（G的加法即实数的通常加法），这时定义2即§1的定义Ⅰ。因此定义2是通常的周期函数概念的推广。

周期函数可能不存在基本周期，也可能存在一个基本周期（其它周期都和它相关），也可能存在多个无关的基本周期。

例2 $f_i(x)\equiv 1(i=1、2、3)$，$D(f_1)=R$，$D(f_2)=R-Z$，$D(f_3)=\{m+n\sqrt{2}$；m、$n\in Z\}$。显然$f_1(x)$是周期函数，但不存在基本周期；$f_2(x)$是周期函数，有基本周期1，$f_2(x)$的其它周期都与基本周期相关；$f_3(x)$是周期函数，有基本周期1和$\sqrt{2}$，$f_3(x)$的其它周期都可用1和$\sqrt{2}$表示。

定义3 $y=f(x)$是定义在集合M上的一个函数，λ为函数

$f(x)$的值域中的任一元素，称集合$D_\lambda=\{x\in M; f(x)=\lambda\}$为函数 $f(x)$ 的λ值集。

若$y=(x)$为实变数的实值函数，函数$f(x)$的λ值集D_λ，直观上看，即函数$y=f(x)$的图象被直线$y=\lambda$截得的"图形"在x轴上的投影，除了位置以外，D_λ与截得的"图形"完全相同，因此研究$y=f(x)$的图象被直线$y=\lambda$截得的"图形"的性质可转化为研究D_λ的相应性质。

周期函数和周期集间有下面的重要关系。

定理6 $f(x)$是定义在加群G的子集 M 上的周期函数，则M、$G-M$（$\neq\phi$时）和$f(x)$ 的每个λ 值集都是周期集，且函数$f(x)$的周期都是这些周期集的周期。

证明 由周期函数的定义，M是周期集，且$f(x)$的周期也是M的周期。当$G-M\neq\phi$ 时，据定理3，$G-M$ 与M有相同的周期性。

设 D_λ 是 $f(x)$的λ值集，l 为 $f(x)$的周期。任意 $x\in D_\lambda$，有$f(x)=\lambda$，且 $f(x+l)=f[x+(-l)]=\lambda$ 故

$$x+l\in D_\lambda,\ x+(-l)\in D_\lambda,$$

所以 D_λ 为周期集，且 $f(x)$的周期l也是 D_λ 的周期。

推论 $f(x)$是加群G的子集M上的函数，

（1） M不是周期集；

（2） $G-M(\neq\phi)$不是周期集；

（3） $f(x)$的某个λ值集不是周期集。

如果有上列三种情形中某个成立时，则函数$f(x)$不是周期函数。

此推论是定理6的逆否命题，结论成立。

必须指出，由定理6得不出周期函数的定义域M（或$G-M$

或$f(x)$的每个λ值集)的周期也是函数$f(x)$的周期。

例3 $f(x)=\sin x$是定义在R上的周期函数，$\sin x$的零值集$D_0=\{n\pi;\ n\in Z\}$。

显然π是D_0的周期，但π不是函数$f(x)$的周期。

例4 $g(x)=\sin x$，$D(g)=\left\{\frac{n\pi}{2};\ n\in Z\right\}$，易证$g(x)$是周期函数，$D(g)R-D(g)$有周期$\frac{\pi}{2}$，但$\frac{\pi}{2}$不是函数$g(x)$的周期。

§3 实数域的周期子集

实数域R在数学中占有特殊重要的地位，它不仅是加群，且具有许多一般加群没有的性质，因此在这一节里专门讨论实数域R的周期子集的基本性质。

定理1 M是数域X的周期子集，

(1) 若l是M的一个周期，对任意非零整数n，则nl也是M的周期。

(2) 若l_1、l_2都是M的周期，$l_1+l_2\neq 0$，则l_1+l_2也是M的周期。

证明由数域和周期集的定义立即可得。

由定理1，有

推论 若M是数域X的周期子集，l_1、l_2都是M的周期，n_1、$n_2\in Z$，$n_1l_1+n_2l_2\neq 0$，则$n_1l_1+n_2l_2$仍是M的周期。

定理1及其推论对于实数域R当然成立。

由§2定理6可见，如果有判别R的子集不是周期集的定理，这对于证明某些函数不是周期函数将提供一条有效的途径。