■ 教 育 部 高 等 教 育 司 推 荐
■ 国外优秀信息科学与技术系列教学用书

DISCRETE MATHEMATICAL STRUCTURES

(Fifth Edition)

离散数学结构 第五版

翻译版

■ [美] Bernard Kolman
Robert C. Busby
Sharon Cutler Ross 著

■ 罗 平 译

PEARSON
Prentice Hall

3

高等教育出版社
Higher Education Press

图字：01-2004- 0391 号

Discrete Mathematical Structures, Fifth Edition
Bernard Kolman, Robert C. Busby, Sharon Cutler Ross

原版 ISBN: 0-13-045797-3

图书在版编目(CIP)数据

离散数学结构：第五版：翻译版 / [美] 科尔曼（Kolman, B.），[美] 巴斯比（Busby, R. C.），[美] 罗斯（Ross, S. C.）著：罗平译. —北京：高等教育出版社，2005.7
书名原文：Discrete Mathematical Structures
ISBN 7–04–017196–1

Ⅰ. 离…　Ⅱ. ①科… ②巴… ③罗… ④罗…
Ⅲ. 离散数学–高等学校–教材　Ⅳ. O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 042963 号

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010 – 58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800 – 810 – 0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010 – 58581000		http://www.hep.com.cn
经　　销	北京蓝色畅想图书发行有限公司	**网上订购**	http://www.landraco.com
印　　刷	北京外文印刷厂		http://www.landraco.com.cn
开　　本	787×1092　1/16	**版　　次**	2005 年 7 月第 1 版
印　　张	38.25	**印　　次**	2005 年 7 月第 1 次印刷
字　　数	860 000	**定　　价**	36.00 元

物料号　17196－00

前　言

20 世纪末，以计算机和通信技术为代表的信息科学和技术对世界经济、科技、军事、教育和文化等产生了深刻影响。信息科学技术的迅速普及和应用，带动了世界范围信息产业的蓬勃发展，为许多国家带来了丰厚的回报。

进入 21 世纪，尤其随着我国加入 WTO，信息产业的国际竞争将更加激烈。我国信息产业虽然在 20 世纪末取得了迅猛发展，但与发达国家相比，甚至与印度、爱尔兰等国家相比，还有很大差距。国家信息化的发展速度和信息产业的国际竞争能力，最终都将取决于信息科学技术人才的质量和数量。引进国外信息科学和技术优秀教材，在有条件的学校推动开展英语授课或双语教学，是教育部为加快培养大批高质量的信息技术人才采取的一项重要举措。

为此，教育部要求由高等教育出版社首先开展信息科学和技术教材的引进试点工作。同时提出了两点要求，一是要高水平，二是要低价格。在高等教育出版社和信息科学技术引进教材专家组的努力下，经过比较短的时间，第一批引进的 20 多种教材已经陆续出版。这套教材出版后受到了广泛的好评，其中有不少是世界信息科学技术领域著名专家、教授的经典之作和反映信息科学技术最新进展的优秀作品，代表了目前世界信息科学技术教育的一流水平，而且价格也是最优惠的，与国内同类自编教材相当。

这项教材引进工作是在教育部高等教育司和高教社的共同组织下，由国内信息科学技术领域的专家、教授广泛参与，在对大量国外教材进行多次遴选的基础上，参考了国内和国外著名大学相关专业的课程设置进行系统引进的。其中，John Wiley 公司出版的贝尔实验室信息科学研究中心副总裁 Silberschatz 教授的经典著作《操作系统概念》，是我们经过反复谈判，做了很多努力才得以引进的。William Stallings 先生曾编写了在美国深受欢迎的信息科学技术系列教材，其中有多种教材获得过美国教材和学术著作者协会颁发的计算机科学与工程教材奖，这批引进教材中就有他的两本著作。留美中国学者 Jiawei Han 先生的《数据挖掘》是该领域中具有里程碑意义的著作。由达特茅斯学院 Thomas Cormen 和麻省理工学院、哥伦比亚大学的几位学者共同编著的经典著作《算法导论》，在经历了 11 年的锤炼之后于 2001 年出版了第二版。目前任教于美国 Massachusetts 大学的 James Kurose 教授，曾在美国三所高校先后 10 次获得杰出教师或杰出教学奖，由他主编的《计算机网络》出版后，以其体系新颖、内容先进而备受欢迎。在努力降低引进教材售价方面，高等教育出版社做了大量和细致的工作。这套引进的教材体现了权威性、系统性、先进性和经济性等特点。

教育部也希望国内和国外的出版商积极参与此项工作，共同促进中国信息技术教育和信息产业的发展。我们在与外商的谈判工作中，不仅要坚定不移地引进国外最优秀的教材，而且还要千方百计地将版权转让费降下来，要让引进教材的价格与国内自编教材相当，让广大教师和

学生负担得起。中国的教育市场巨大，外国出版公司和国内出版社要通过扩大发行数量取得效益。

在引进教材的同时，我们还应做好消化吸收，注意学习国外先进的教学思想和教学方法，提高自编教材的水平，使我们的教学和教材在内容体系上，在理论与实践的结合上，在培养学生的动手能力上能有较大的突破和创新。

目前，教育部正在全国 35 所高校推动示范性软件学院的建设和实施，这也是加快培养信息科学技术人才的重要举措之一。示范性软件学院要立足于培养具有国际竞争力的实用性软件人才，与国外知名高校或著名企业合作办学，以国内外著名 IT 企业为实践教学基地，聘请国内外知名教授和软件专家授课，还要率先使用引进教材开展教学。

我们希望通过这些举措，能在较短的时间，为我国培养一大批高质量的信息技术人才，提高我国软件人才的国际竞争力，促进我国信息产业的快速发展，加快推动国家信息化进程，进而带动整个国民经济的跨越式发展。

教育部高等教育司

二〇〇二年三月

译 者 序

本书三位作者都曾获得美国著名大学数学系博士学位，在美国 Drexel 大学和 Georgia Perimeter 学院执教多年，是数学界和计算机界享有很高声望的教授。他们不仅在数学方面，如数值分析、离散数学、李代数、概率论等领域有很高的学术造诣和丰富的教学经验，而且在计算机应用方面也有很高的水平，编写过许多数学与计算机应用方面的教材。

本书选材广泛且适当，覆盖面广，叙述深入浅出，推理严谨，习题丰富，书中许多例子将数学与计算机应用融为一体。正因如此，该书被译成多种语言，在世界各国广为流传。

由于译者水平有限，错误和缺点在所难免，恳请读者指正。

译 者

2005 年 3 月

原 版 前 言

对于大学一二年级的教学来说，离散数学是一门很有趣的课程，原因有几个方面。它的内容是数学，但它的大多数应用和超过半数的学生来自于计算机科学。因此，了解本书主题的编写动机，并事先了解它们的应用，是十分重要而必需的策略。此外，这门课程所涵盖的题材广泛，内容丰富，所以教材的内容须精心安排，清晰易懂，并用适当的教学法强调其关键概念。同时，也希望学生能够掌握并运用一项重要的新技能：书写数学证明的能力。要写出优秀的计算机程序，这是一项非常好的训练。

数学系学生可使用本书作为离散数学基本概念的入门书，并作为向更高级数学概念发展的基础。如果仅限于此，那么书中涉及计算机科学的一些特定应用可以略去或者单独作为重要的例子选用。本书也可作为计算机科学或者计算机工程课程的教材，它为与计算机相关的许多基本概念打下基础，并且为这些概念提供连贯的发展和共同的主题。教师很容易通过参考每章的必备知识设计出与各章内容相一致的、适当的课程。

方法

首先，我们认为将课程内容所涵盖的领域和深度限制在大学一二年级所教的基础课程的水平上是明智的。我们认为本书所选定的一系列主题能够真正适用于计算机科学和其他学科，并且这些内容是以一种符合逻辑、有条理的方式给出的。在介绍这些主题的同时，也指明了如何更深入地研究这些课题。这种方法使得本书能够成为高年级课程的一种很好的参考。

其次，将大量的定义和抽象理论压缩到最低限度，并且用这种方式来组织各个主题，给出它们的相互联系。关系和有向图被视为同一基本数学概念的两个方面，有向图是关系的图形表示。所以，该基本概念实际上用来作为本书介绍其他所有概念的基础，包括函数、偏序、图和数学结构。本书所介绍的每个新概念尽可能使用前面学过的内容，并且以这种方式展开，从而简化后续的更复杂的概念。

第五版有什么新内容?

由于关系和有向图这两个关键概念在本书中起着统一的作用，所以，我们仍然相信本书非常适合课堂教学。这一版以编码为线索，全面阐述了这两个概念，包括效率、有效性和安全性。新加的两个小节：其他数学结构和公钥密码学是这种思想的主要组成部分，但相关的少部分内容插入在第一章。这一版的习题量比前一版增加了25%以上。无论对本书做了怎样的改动，但

是我们的目标依然同前四版一样：**以一种简明的、学生能够理解的方式，来介绍离散数学的基本概念及其某些应用**。

- 从第一章开始，就介绍了密码学的思想，并且描述了该领域的基本概念，最后介绍了公钥密码学。新增加的内容从各个方面介绍了编码：效率、有效性和安全性。
- 新加了一节——其他数学结构，介绍环和域的基本概念，特别是 Z_p。
- 给学生学习建模技巧提供了更多的机会。无论是建模、抽象、模式识别，还是问题求解，了解问题的数学本质的能力都是在更高一级的数学课程中取得成功的一个关键因素。
- 理解证明并写出简单的数学证明是一个重要的课程目标。证明方法不仅仅是在正式的介绍证明方法的章节中给予介绍，而且在教材中的许多场合要求学生阅读、分析、完成并给出证明。
- 本书包含有更多的应用，包括关系数据库、校验位、各种密码以及加权投票系统。
- 每章都增加了一些新的习题，重点放在对概念的多种描述上。与第四版相比增加了大约 400 道习题。
- 每章开始有一个简短的历史回顾，介绍一些在该章所涉及的领域中做出过重要贡献的学者。
- 与前几版相比，增加了关于同构的内容，这些内容贯穿全书。
- 开发了关于加权投票系统、Petri 网和 Catalan 数的附加学生实验。有些实验放在适当的章节中，其他的实验则集中放在附录 B 中。这些实验作业为学生提供了发现、探索以及写作的机会，并且是专门针对协同工作而设计的。
- 这一版继续在全书中编排了关于证明和证明技巧的讨论，包括对大部分证明的注解，与证明各命题的技巧相关的习题以及关于证明的提示。许多新的习题为培养学生阅读和书写证明的能力提供了更多的实践机会。
- 每一章都有一组复习题。这些复习题主要是概念性的，用来帮助学生理解本章的主要概念。
- 增加了一个术语表，便于快速参考查询。
- 在前几版内容的基础上，索引中新加了大约 100 个与新的概念和例子有关的词条。

习题

习题是本书的重要组成部分。许多习题本质上都是计算型的，其余的则是理论型的。本书后面的许多习题以及实验都要求口头解答，关于实验下面将进一步说明。帮助培养证明书写技巧的习题要求学生分析证明、增加论据或完成一些未完成的证明。为了帮助学生理解基本原理和掌握方法，许多新的习题中增加了关于指导和实践的内容。所有序号为奇数的习题、复习题以及自测题的答案均放在本书的后面。所有习题解答可在**《教师解答手册》**中找到，该手册可以从原版出版社免费得到（只提供给任课教师）。该手册中包含关于每章的教学思想、实验的目的和评分准则的注解，还包含一个试题库。

实验

从第一章到第十章，每章最后都有一个学生实验。这些实验为学生提供发现和探索问题的机会，或者帮助学生更深入地认识各章中所讨论的主题。这些实验是作为课外经验来设计的，并且适合作为小组作业。每个实验都需要做比章节练习多得多的书写工作。附录 B 是一些附加实验。每个实验的内容、必备知识以及目的都可以在《教师解答手册》中找到。

章末材料

每章均包含有证明提示、便于复习的主要概念的总结、一系列编码练习、一个实验、一系列概念性复习题以及涵盖本章内容的自测题。

章节结构

第一章讲述本课程的基础知识，包括集合、子集及其运算，数列，整数的性质（包括以 n 为基数的表示），矩阵以及数学结构。本章的目的是帮助学生培养在多种层面上识别模式的技能。第二章讨论逻辑以及相关的内容，包括证明方法和数学归纳法。虽然关于证明的讨论基于此章，但有关证明的注释贯穿全书。第三章论述计数，包括排列、组合、鸽巢原理、概率基础以及递归关系。

第四章讲述关系的基本类型和性质以及关系的有向图表示。此外，本章还讨论了矩阵和其他数据结构的关系。第五章讨论函数的概念，并且给出了许多重要的函数例子，包括计算机科学中特别感兴趣的一些函数；还简要介绍了函数增长的基础知识和应用。第六章讨论偏序集，包括格和布尔代数。为了找出布尔表达式的布尔函数的符号表示，加入了图形化的卡诺图方法。第七章介绍有向树和无向树及其应用。初等图论以及其在运输网络和匹配问题中的应用是第八章的重点。

第九章又回到数学结构，介绍了半群、群、环和域的基本概念。基于前几章的知识，只引入了几个新的概念。第十章主要讨论有限状态机，它是前面几章概念的补充和有效应用。第十一章讨论了编码的差错检验、纠错以及安全性问题。附录 A 讨论了算法和伪码。本书中的某些例子和习题使用的是这里介绍的简化伪码，忽略这些内容不会破坏内容的连续性。附录 B 给出一些附加实验，它们是本教材各章主题的扩充或者预习。

可选附录

随本书有一本实用的工具书：《离散数学中的实际问题》，作者是 Boyana Obrenic。该书完

全是一本问题集，共有 406 页，并且有全部的解答，以 ISBN 013-124112-5（正文和附录）出版后可以免费得到。另外，还有一本 316 页的工具书：《离散数学工具书》，作者是 James Bush。这本书主要以条目的形式总结一些关键概念、关键术语和一些示例问题（有答案）。此书以 ISBN 0-13-124113-3（正文和附录）出版后可以免费得到。

致谢

我们非常感谢本书前四版的下列审阅者：Harold Fredrickson（Naval Postgraduate School），Thomas E. Gerasch（George Mason University），Samuel J. Wiley（La Salle College），Kenneth B. Reid（Louisiana State University），Ron Sandstrom（Fort Hays State University），Richard H. Austing（University of Maryland），Nina Edelman（Temple University），Paul Gormley（Villanova University），Herman Gollwitzer & Loren N. Argabright（Drexel University），Bill Sands（University of Calgary，他指出了第二版中的许多错误），Moshe Dror（University of Arizona，Tucson），Lloyd Gavin（California State University at Sacramento），Robert H. Gilman（Stevens Institute of Technology），Earl E. Kymala（California State University at Sacramento），Art Lew（University of Hawaii，Honolulu），Ashok T. Amin（University of Alabama at Huntsville），Donald S. Hard（Rochester Institute of Technology），Minhua Liu（William Rainey Harper College），Charles Parry（Virginia Polytechnic Institute & University），Arthur T. Poe（Temple University），Suk Jai Seo（University of Alabama at Huntsville），Paul Weiner（St. Mary's University of Minnesota）。感谢第五版的下列审阅者：Edward Boylan（Rutgers University），Akihiro Kanamori（Boston University），Craig Jensen（University of New Orleans），Harold Reiter（University of North Carolina），Charlotte Zhong-Hui Duan（University of Akron）。他们有益的建议、评论和批评，对于改善本书原稿起了很好的作用。

感谢 Dennis R. Kletzing（Stetson University），他负责整个原稿的录入和排版；感谢 Nina Edelman（Temple University）和 Lilian N. Brady，他们仔细地阅读了每一页的证明并且给出了一些有益的建议；感谢 Blaise de Sesa，他检查了本书所有习题答案和解答；还要感谢来自美国和其他国家的许多学校的老师和学生，他们提供了使用这本书的经验并提出了相当有益的建议。

最后，还要向下列人员表达最诚挚的谢意：制作编辑 Debbie Ryan，执行编辑 George Lobell，助理编辑 Jennifer Brady 以及 Prentice Hall 出版公司的全体员工，因为他们的热情、关心和永不言败的合作精神，才让本书从策划、设计、制作到市场销售都得以顺利地进行。

B. K.
R. C. B.
S. C. R.

目　录

第一章　基础知识

必备知识：本章无需专业必备知识，鼓励读者仔细阅读课文并计算所有例题。

本章将引进离散数学中的一些基本工具。尽管有些概念也许读者已经熟悉，但首先还是从集合、子集以及它们的运算开始论述。接着，用显式和递归的模式讨论序列。然后，回顾整数的一些基本性质。最后，引进矩阵和矩阵运算。这些背景知识正是我们对数学结构开始进行探索所需要的。

回　顾

矩阵　矩阵的起源可以追溯到大约公元前 200 年，当时中国人用它来求解线性方程组。从那以后沉寂了将近 2 000 年，直到 17 世纪末，矩阵才又回归进数学，从此之后在该领域的研究以迅速的步伐向前发展。术语“矩阵”(矩阵的单数)是由英国数学家、律师 James Joseph Sylvester (1814—1897)在 1850 年创新的词。在 1851 年，Sylvester 遇到了 Arthur Cayley (1821—1895)。Cayley 也是一名英国律师，对数学也怀有浓厚的兴趣，他迅速地认识到矩阵概念的重要性并于 1858 年出版了一本书，在该书中他给出了矩阵的基本运算。此外，他在矩阵理论方面还发现了许多重要结果。

1.1　集合与子集

集合

集合就是任何一个有明确定义的对象的整体，这些对象称为**元素**或**集合的成员**。例如，所有木制椅子的整体，只有一条腿的所有黑鸟的整体，或者在 0 与 1 之间一切实数的整体，它们都是集合。*有明确定义*只是意指能够确定一个已知对象是否属于该整体。几乎所有的数学对象，不管它们可能具有什么附加性质，它们首先都是集合。因此在某种意义上，集合论实质上成为构建一切数学知识的基础。尽管如此，集合论(至少我们需要有初步印象)是容易学习和运用的。

描述一个含有有限个元素的集合的一种方法就是用一对括号列出集合中的所有元素。因此，所有小于 4 的正整数集合可写作

$$\{1,2,3\} \tag{1}$$

在列出集合元素时，它们的次序是无关紧要的。因此，$\{1,3,2\}$，$\{3,2,1\}$，$\{3,1,2\}$，$\{2,1,3\}$

和{2,3,1}都是式(1)所给集合的表示。此外，在列举集合中的元素时，重复元素可以省略。因此，{1，3，2，3，1}是式(1)所给集合的另一种表达方式。

用大写字母(如 A，B，C)表示集合。用小写字母(如 a, b, c, x, y, z, t)表示集合的成员(或元素)。

用 $x \in A$ 表示 x 是集合 A 的一个元素，用 $x \notin A$ 表示 x 不是集合 A 的一个元素。

例 1 设 $A = \{1,3,5,7\}$，那么 $1 \in A$，$3 \in A$，但 $2 \notin A$。 ■

用列出集合中所有元素的方法来描述一个集合，有时是极不方便的或者是不可能的。于是引入另一种有用的方法，通过详细说明集合元素所具有的某种共同的性质来定义一个集合。用符号 P(x)表示关于可变对象 x 的一个命题或一条语句 P。由 P(x)定义的集合恰好是 P 为合理的与真实的一切对象 x 的整体，记作 $\{x|P(x)\}$。例如，$\{x|x$ 是小于 4 的正整数$\}$，若通过列出它的元素来表示，那么就是式(1)所描述的集合{1,2,3}。

例 2 由单词"byte"中所有字母组成的集合可表示为{b, y, t, e}或者$\{x|x$ 是单词"byte"中的一个字母$\}$。 ■

例 3 下面将引进几个集合及其记号，这些集合及记号贯穿本书使用。

(a) $\mathbf{Z}^+ = \{x|x$ 是正整数$\}$

因此 $\mathbf{Z}^+$是由用来计数的数1, 2, 3,… 所组成的集合。

(b) $\mathbf{N} = \{x|x$ 是正整数或者零$\}$

因此 $\mathbf{N}$ 是由正整数和 0，即 0, 1, 2,… 所组成的集合。

(c) $\mathbf{Z} = \{x|x$ 是整数$\}$

因此 $\mathbf{Z}$ 是由所有整数…, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, …所组成的集合。

(d) $\mathbf{Q} = \{x|x$ 是有理数$\}$

因此 $\mathbf{Q}$ 是由形如 $\dfrac{a}{b}$ 的所有数所组成的，其中 a 和 b 是整数且 $b \neq 0$。

(e) $\mathbf{R} = \{x|x$ 是实数$\}$

(f) 没有任何元素的集合称为**空集**，用{ }或者符号 $\varnothing$ 表示。 ■

例 4 因为一个实数的平方总是非负数，所以$\{x|x$ 是实数且 $x^2 = -1\} = \varnothing$ ■

当集合里的成员都已知时，该集合也就完全清楚了。因此，如果两个集合 A 和 B 有完全相同的元素，那么称 A 和 B **相等**，记作 $A = B$。

例 5 如果 $A = \{1，2，3\}$，$B = \{x|x$ 是一个正整数且 $x^2<12\}$，那么 $A = B$。 ■

例 6 如果 A = {BASIC, PASCAL, ADA}，B = {ADA, BASIC, PASCAL}，那么 $A = B$。 ■

子集

如果 A 的每一个元素也是 B 的一个元素，即对任意 $x \in A$ 有 $x \in B$，则称 A 是 B 的**子集**或 A **包含于** B，记作 $A \subseteq B$。如果 A 不是 B 的子集，则记作 $A \not\subseteq B$(见图 1.1)。

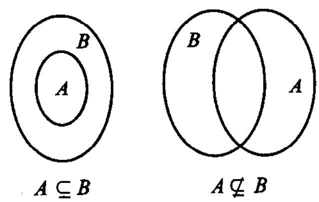


图 1.1

图 1.1 中的图形常常用来表示集合之间的关系，这种图因为

由英国逻辑学家约翰·文氏首先使用而被称为**文氏图**。在 1.2 节中将广泛使用文氏图。

例 7 我们有 $\mathbf{Z}^+ \subseteq \mathbf{Z}$，而且如果 $\mathbf{Q}$ 表示有理数集合，那么 $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q}$。■

例 8 设 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，$B=\{2, 4, 5\}$，$C=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，那么 $B \subseteq A$，$B \subseteq C$，$C \subseteq A$，然而 $A \not\subseteq B$，$A \not\subseteq C$，$C \not\subseteq B$。■

例 9 设 A 是任意一个集合，那么 $A \subseteq A$，即每个集合是它自身的一个子集。■

例 10 设 A 是一个集合，$B=\{A, \{A\}\}$，由于 A 和 $\{A\}$ 是 B 的元素，所以 $A \in B$，$\{A\} \in B$，从而 $\{A\} \subseteq B$ 且 $\{\{A\}\} \subseteq B$，然而 $A \subseteq B$ 不成立。■

对于任意集合 A，由于 $\varnothing$ 中没有元素不属于 A，所以 $\varnothing \subseteq A$(在 2.1 节中还会看到这一点)。

显然 $A=B$ 当且仅当 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$。

如果不呈现严重的逻辑问题，那么一切事物的整体(已证明)就不能被认为是一个集合。为了避免这种情况和其他问题，在此对该情况将不予以考虑，在每次讨论中均假设存在一个“全集”U(它随讨论的问题而变化)，即包含使得讨论有意义的所有对象。于是，在讨论中提到的任何其他集合将自动被认为是 U 的子集。因此，如果讨论实数并且提到集合 A 和 B，那么 A 和 B 一定(假定)是实数集合，而不是矩阵、电子线路或猕猴的集合。在大多数问题中，从所讨论的背景易知全集。在文氏图中，全集 U 将用一个矩形来表示，而在 U 内的集合用圆圈来表示，如图 1.2 所示。

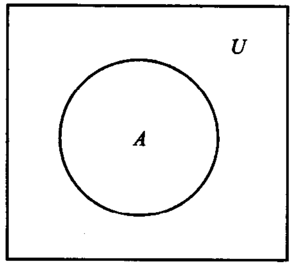


图 1.2

如果一个集合 A 有 n 个不相同的元素，其中 $n \in N$，那么称 A 是**有限集合**，称 n 为 A 的**基数**，用$|A|$表示。因此，例 1、例 2、例 4、例 5 和例 6 中的集合是有限集合。如果集合不是有限的，则称它为**无限集合**。例 3($\varnothing$ 除外)介绍的集合就是无限集合。

如果 A 是一个集合，则 A 的所有子集的集合称作 A 的**幂集**，用 $P(A)$表示。

例 11 设 $A=\{1,2,3\}$，则 $P(A)$包含 A 的所有子集为：$\{\}$，$\{1\}$，$\{2\}$,$\{3\}$,$\{1,2\}$,$\{1,3\}$,$\{2,3\}$ 和$\{1,2,3\}$(或 A)。下一节将计算一个集合的子集的个数。■

习 题 1.1

1．设 $A=\{1, 2, 4, a, b, c\}$，验证下列各分题的真与假。

(a) $2 \in A$　(b) $3 \in A$　(c) $c \notin A$　(d) $\varnothing \in A$　(e) $\{\} \notin A$　(f) $A \in A$

2．设 $A=\{x|x$ 是实数且 $x<6\}$，验证下列各分题的真与假。

(a) $3 \in A$　(b) $6 \in A$　(c) $5 \notin A$　(d) $8 \notin A$　(e) $-8 \in A$　(f) $3.4 \notin A$

3．在下面各分题中，用列出集合元素的方法给出每个单词的字母集合。

(a) AARDVARK　(b) BOOK　(c) MISSISSIPPI

4．在下面各分题中，用列出元素的方法给出集合。

(a) 小于 10 的所有正整数的集合。

(b) $\{x\,|x \in \mathbf{Z}$ 且 $x^2<12\}$。

5．设 $A=\{1，\{2，3\}，4\}$，验证下面各分题的真与假。

(a) $3\in A$ (b) $\{1,4\}\subseteq A$ (c) $\{2,3\}\subseteq A$

(d) $\{2,3\}\in A$ (e) $\{4\}\in A$ (f) $\{1,2,3\}\subseteq A$

在第 6 题～第 9 题中，用形式 $\{x\,|P(x)\}$ 表示集合，其中 $P(x)$ 描述集合元素的性质。

6．$\{2，4，6，8，10\}$

7．$\{a,e,i,o,u\}$

8．$\{1,8,27,64,125\}$

9．$\{-2,-1,0,1,2\}$

10．设 $A=\{1，2，3，4，5\}$，下面哪些集合等于 A？

(a) $\{4,1,2,3,5\}$ (b) $\{2,3,4\}$

(c) $\{1,2,3,4,5,6\}$ (d) $\{x\,|x$ 是一个整数且 $x^2\leqslant 25\}$

(e) $\{x\,|x$ 是一个正整数且 $x\leqslant 5\}$

(f) $\{x\,|x$ 是一个正有理数且 $x\leqslant 5\}$

11．下面哪些集合是空集？

(a) $\{x\,|x$ 是一个实数且 $x^2-1=0\}$

(b) $\{x\,|x$ 是一个实数且 $x^2+1=0\}$

(c) $\{x\,|x$ 是一个实数且 $x^2=-9\}$

(d) $\{x\,|x$ 是一个实数且 $x=2x+1\}$

(e) $\{x\,|x$ 是一个实数且 $x=x+1\}$

12．列出 $\{a,b\}$ 的所有子集。

13．列出{BASIC，PASCAL，ADA}的所有子集。

14．列出{}的所有子集。

15．设 $A=\{1，2，5，8，11\}$，验证下面各分题的真与假。

(a) $\{5,1\}\subseteq A$ (b) $\{8,1\}\in A$ (c) $\{1,8,2,11,5\}\not\subseteq A$ (d) $\varnothing\subseteq A$

(e) $\{1,6\}\not\subseteq A$ (f) $\{2\}\subseteq A$ (g) $\{3\}\notin A$ (h) $A\subseteq\{11,2,5,1,8,4\}$

16．设 $A=\{x\,|x$ 是一个整数且 $x^2<16\}$，验证下列关系的真与假。

(a) $\{0,1,2,3\}\subseteq A$ (b) $\{-3,-2,-1\}\subseteq A$ (c) $\{\ \}\subseteq A$

(d) $\{x\,|x$ 是一个整数且 $|x|<4\}\subseteq A$ (e) $A\subseteq\{-3，-2，-1，0，1，2，3\}$

17．设 $A=\{1\}$, $B=\{1,a,2,b,c\}$, $C=\{b,c\}$, $D=\{a,b\}$, $E=\{1,a,2,b,c,d\}$，对于下面各分题，用 $\subseteq$ 或 $\not\subseteq$ 取代符号□，使得命题为真。

(a) $A\square B$ (b) $\varnothing\ \square A$ (c) $B\square C$ (d) $C\square E$ (e) $D\square C$ (f) $B\square E$

在第 18 题～第 20 题中，找出包含已知集合作为其子集且有最小基数的集合。

18．$\{a,b,c\},\{a,d,e,f\},\{b,c,e,g\}$

19．$\{1,2\},\{1,3\}$，$\varnothing$

20．$\{2,4,6,\cdots,20\},\{3,6,9,\cdots,21\}$

21．对于由所有集合所组成的整体，可能有两个不同的(适当的)全集吗？如果有，它会产生什么问题吗？请予以解释。

22．用图 1.3 中的文氏图验证下列关系的真与假。

(a) $A\subseteq B$ (b) $B\subseteq A$ (c) $C\subseteq B$ (d) $x\in B$ (e) $x\in A$ (f) $y\in B$

23．用图 1.4 中的文氏图验证下面各分题的真与假。

(a) $B\subseteq A$ (b) $A\subseteq C$ (c) $C\subseteq B$ (d) $w\in A$ (e) $t\in A$ (f) $w\in B$

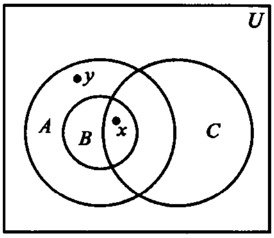


图 1.3

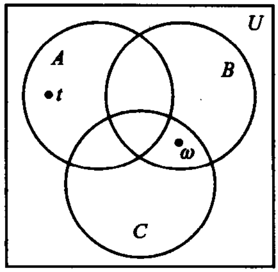


图 1.4

24. (a) 完成以下命题。只有一个集合的一般文氏图有_____个区域。用语言给予描述。

(b) 完成以下命题。有两个集合的一般文氏图有______个区域。用语言给予描述。

25. 完成以下命题。有三个集合的一般文氏图有_____个区域。用语言给予描述。

26. (a) 如果 $A = \{3，7\}$，求 $P(A)$。

(b) $|A|$ 值是多少？　(c) $|P(A)|$ 值是多少？

27. 如果 $P(B) = \{\{\ \}, \{m\}, \{n\}, \{m, n\}\}$，求 B。

28. (a) 如果 $A = \{3，7，2\}$，求 $P(A)$。

(b) $|A|$ 值是多少？　(c) $|P(A)|$ 值是多少？

29. 如果 $P(B) = \{\{a\},\{\ \}, \{c\}, \{b, c\}, \{a, b\},\cdots\}$ 并且 $|P(B)| = 8$，那么 $B =$ ______。

在第 30 题～第 32 题中，用文氏图表示这些关系。

30. $A\subseteq B$，$A\subseteq C$，$B\not\subseteq C$，$C\not\subseteq B$

31. $x\in A$，$x\in B$，$x\notin C$，$y\in B$，$y\in C$，$y\notin A$

32. $A\subseteq B$，$x\notin A$，$x\in B$，$A\not\subseteq C$，$y\in B$，$y\in C$

33. 对于正文中例 3 给出的集合，描述所成立的所有子集关系。

34. 证明：如果 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$，那么 $A\subseteq C$。

35. 第 34 题所给出的集合命题可以重述为：任何______的子集也是包含_______的任意集合的一个子集。

36. 假设已知集合 A 有 n 个子集 S_1，S_2，…，S_n，如果集合 B 是由 A 中元素所组成的，并且比 A 多一个元素，即 $|B| = |A|+1$，证明 B 一定有 $2n$ 个子集。

37. 比较题 12、13、26 和 28 的结果，完成以下填空：有 2 个元素的任意集合有_______个子集，有 3 个元素的任意集合有_______个子集。

1.2 集合运算

这一节将讨论几种运算，即把已知集合结合起来而产生新的集合。这些运算类似于我们所熟悉的实数运算，并且在许多应用以及下面的一些概念中起着十分关键的作用。

设 A 与 B 是两个集合，由属于 A 或属于 B 的所有元素所组成的集合定义为 A 与 B 的**并集**，用 $A\cup B$ 表示。因此，有

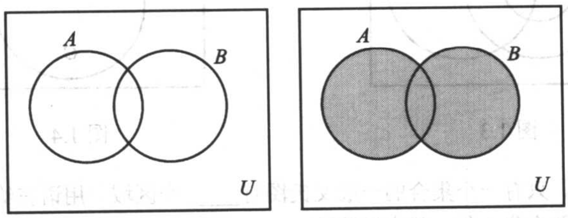
$$A\cup B = \{x\,|\,x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$

注意，如果 $x\in A$ 或 $x\in B$ 或 x 既属于 A 又属于 B，那么 $x\in A\cup B$。

例 1 设 $A=\{a, b, c, e, f\}$，$B=\{b, d, r, s\}$，求 $A\cup B$。

解 因为 $A\cup B$ 是由属于 A 或 B 的所有元素所组成的集合，所以 $A\cup B=\{a, b, c, d, e, f, r, s\}$。■

可以用下面的文氏图说明两个集合的并集。如果 A 和 B 是图 1.5(a)中给出的两个集合，那么 $A\cup B$ 是由图 1.5(b)中阴影部分所表示的集合。



(a) (b) $A\cup B$

图 1.5

如果 A 和 B 是两个集合，则它们的**交集**定义为：由既属于 A 又属于 B 的所有元素所组成的集合，记作 $A\cap B$。因此

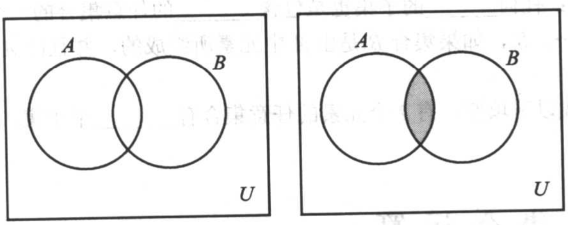
$$A\cap B=\{x\,|x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$

例 2 设 $A=\{a, b, c, e, f\}$，$B=\{b, e, f, r, s\}$，$C=\{a, t, u, v\}$，求 $A\cap B$，$A\cap C$，$B\cap C$。

解 元素 b, e 和 f 是仅有的既属于 A 又属于 B 的元素，所以 $A\cap B=\{b, e, f\}$。类似地，$A\cap C=\{a\}$。由于没有任何元素既属于 B 又属于 C，所以 $B\cap C=\{\}$。■

如果两个集合没有任何共同的元素，如例 2 中的集合 B 与 C，则称它们为**不相交集合**。

可以用下面的文氏图解释两个集合的交集。如果 A 和 B 是图 1.6(a)中给出的集合，那么 $A\cap B$ 是由图 1.6(b)中阴影部分表示的集合。图 1.7 是解释两个不相交集合的文氏图。



(a) (b) $A\cap B$

图 1.6

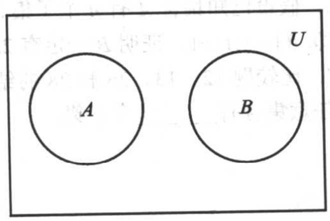


图 1.7

显然，对于三个或更多的集合同样可定义并集和交集运算：

$$A\cup B\cup C=\{x\,|x\in A \text{ 或 } x\in B \text{ 或 } x\in C\}$$

$$A\cap B\cap C=\{x\,|x\in A \text{ 且 } x\in B \text{ 且 } x\in C\}$$

图 1.8(b)中的阴影部分是图 1.8(a)中集合 A、B 和 C 的并集。图 1.8(c)中的阴影部分是集合 A、B 和 C 的交集。注意图 1.8(a)允许各种可能存在的关系，但没有给出集合之间存在何种关系。一