SHUXUE

数学

代 数·第二册

青年自学丛书

四川人民出版社

青年自学丛书

数　　学

代数·第二册

主　　编　成都市教育局
编写单位　成都市第十二中学
执　　笔　范毓芸　黄龙显
熊利国　王文全
林振国　范绍禹
舒维纲　苏　泉

四川人民出版社
一九七八年·成都

青年自学丛书　数　学（代数·第二册）

四川人民出版社出版　（成都盐道街三号）
四川省新华书店发行　渡口新华印刷厂印刷

开本787×1092毫米1/32　印张16.25　字数361千
1979年3月第一版　1979年3月第一次印刷
印数：1—154,000册

书号：13118·9　定价：1.10元

前 言

"一定要极大地提高整个中华民族的科学文化水平"。这是英明领袖华主席、党中央高瞻远瞩地向全党、全军、全国各族人民发出的庄严号召。这是激动人心的动员令，这是气吞山河的宣言书，这同样是对广大青年亲切的召唤。

青年是我们的希望，是我们的未来。为了适应广大青年向科学进军的需要，我们组织编写了一套"青年自学丛书"，供广大青年自学，在校中学生课外阅读和中学教师参考。

这套"青年自学丛书"的数理化部分，共十七册，即《数学》八册（《代数》三册、《几何》三册、《三角》二册）、《物理》四册、《化学》五册）。考虑到这套丛书具有自学的特点，使读者学后能系统掌握基础知识和基本技能，编写时注意了基本理论、基本概念、基本规律和学习中难点的讲述，例题较详，习题较多，循序渐进，由浅入深；文字上努力做到生动活泼，明白易懂。同时，参照全国中小学通用教材教学大纲精神，还介绍了一些先进知识。要求通过对丛书的自学，使读者能达到高中或略高于高中的程度。

这是"青年自学丛书"《数学》的《代数》读本，讲了实数、代数式、方程和方程组、不等式、函数、指数、对数、数列、极限、排列组合、数学归纳法、二项式定理、复数、高次方程以及集合、矩阵、概率论、微积分初步等方面的内容，编成三册。

这套丛书的编写出版，得到中共成都市委宣传部的亲切关怀和有关学校的支持。四川师范学院数学系协助了丛书《代数》读本的审稿工作。在此，我们谨致谢意。

由于时间仓促和编者水平所限，本书内容可能有缺点或错误。鉴于当前需要迫切，先以"试用本"出版，广泛听取意见。我们热忱欢迎广大读者批评指正，以便再版时修订。

编　者

一九七八年三月

目 录

第四章 不 等 式

一 不等式和它的性质

4.1 不等式的意义

在生产实践和科学实验中，量与量之间，既存在着相等的关系，也存在着不相等的关系．这些关系反映在数学上，就给数学提出了既要研究等式，也要研究不等式的任务．

例如三角形的任意一边 a 小于其余两边的和 $b+c$，可以表示为

$$a<b+c. \qquad (1)$$

又如在开山工程爆破中，已知导火索燃烧的速度是每秒钟 0.8 厘米，放炮工人跑开的速度是每秒钟 4 米．为了使放炮工人在爆破时能跑到 100 米以外的安全地区去，必须事前计算出导火索应该超过的厘米数．

我们假设导火索的长度为 x 厘米，那末它燃烧完的时间是 $\frac{x}{0.8}$ 秒．在这段时间里，放炮工人能跑开的距离是 $4\times\frac{x}{0.8}=5x$ 米．

很明显，要保证放炮工人的安全，$5x$ 米必须大于100米。也就是说，5 个 x 大于 100，那末不难知道，1 个 x 就必须大于 20，因此我们就可以得到导火索应该超过的厘米数为 20．

我们用记号“$>$”表示“大于”；而用记号“$<$”表示

“小于”．那末上面所述的关系：“5 个 x 大于 100”就可以表示为

$$5x>100. \qquad (2)$$

而关系：“1 个 x 大于20”就可以表示为

$$x>20.$$

记号“$>$”和“$<$”都叫做不等号．

用不等号“$>$”或“$<$”把两个代数式联结起来所成的式子叫不等式；用等号“$=$”把两个代数式联结起来所成的式子叫等式。

例如 $3+2>4$，$a+1<a+3$，$2x-3>x+2$，$x-\frac{3x-8}{2}\leqslant\frac{2(10-x)}{7}-1$，……等等，都是不等式；$3+2=5$，$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$，……等等，都是等式．

所谓不等式，实质上就是两个代数式的值的大小的比较。而对于两个代数式的值的比较，就象两个实数大小的比较一样。我们知道，在两个实数 a 与 b 之间，是一定存在，而且仅仅存在下列三种关系之一种：

(1) a 大于 b，即 $a>b$；

(2) a 小于 b，即 $a<b$；

(3) a 等于 b，即 $a=b$。

很明显，上述两个实数的大小的比较，与前面所述的两个代数式的值的比较，是完全一致的．

现在我们进一步揭露两个代数式的值的大小之比较，和两个实数的大小的比较的实质．这就是用两个代数式的差或两个实数的差来确定它们的大小．

我们规定，如果两个实数 a 与 b，它们的差为一正数，那末 $a>b$．同理，如果 $a-b$ 为一负数，那末 $a<b$．如果

$a-b$ 是零，那末 $a=b$.

反之，如果 $a>b$，那末 $a-b$ 为一正数．如果 $a<b$，那末 $a-b$ 为一负数．如果 $a=b$，那末 $a-b$ 为零．

以上讨论，对于两个代数式 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的比较，也完全一样．

我们把以上结论，归纳为下表：

如对 x 的一切允许值，

$$\text{恒有}\quad f_1(x)-f_2(x)\begin{cases}>0\\<0\\=0\end{cases}$$

$$\text{那末}\quad f_1(x)\begin{cases}>f_2(x)\\<f_2(x)\\=f_2(x)\end{cases}$$

反之；

$$\text{如果，}\quad f_1(x)\begin{cases}>f_2(x)\\<f_2(x)\\=f_2(x)\end{cases}$$

则对 x 的一切允许值，

$$\text{即有}\quad f_1(x)-f_2(x)\begin{cases}>0\\<0\\=0\end{cases}$$

对于多变量的情况，也可仿此规定．*

例1 比较 $(x+3)\cdot(x-5)$ 与 $(x+2)(x-4)$ 的大小．

---

*注：代数式比较大小，有时也可不在 x 的一切允许值范围内进行，而在允许值范围的某一部分上进行比较，此时只须在此部分上使用上述规定即可．

解 $\because$ $(x+3)\cdot(x-5)-(x+2)(x-4)$

$=(x^2-2x-15)-(x^2-2x-8)$

$=-7<0$

$\therefore$ $(x+3)(x-5)<(x+2)(x-4)$.

例2 比较$(a+b)^2$与a^2+b^2的大小.其中a、b是不为零的实数.

解 $\because$ $(a+b)^2-(a^2+b^2)$

$=(a^2+2ab+b^2)-(a^2+b^2)$

$=2ab$

故当a、b同号时(即a、b同时为正或a、b同时为负),$2ab$为正数.

$\therefore$ $(a+b)^2-(a^2+b^2)>0$

$\therefore$ $(a+b)^2>a^2+b^2$.

当a、b异号时(即$a>0$,$b<0$或$a<0$、$b>0$),$2ab$为负数.

$\therefore$ $(a+b)^2-(a^2+b^2)<0$

$\therefore$ $(a+b)^2<a^2+b^2$

$$\therefore\quad (a+b)^2\begin{cases}>a^2+b^2 & (a\text{、}b\text{ 同号})\\ <a^2+b^2 & (a\text{、}b\text{ 异号}).\end{cases}$$

例3 比较$(x^2+1)^2$与x^4+x^2+1的大小.

解 $\because$ $(x^2+1)^2-(x^4+x^2+1)$

$=(x^4+2x^2+1)-(x^4+x^2+1)$

$=x^2$

若 $x=0$,则$x^2=0$

$\therefore$ $(x^2+1)^2-(x^4+x^2+1)=0$

$\therefore$ $(x^2+1)^2=x^4+x^2+1$

若 $x\neq0$,则无论x为正数或为负数,x^2始终是正数.

$\therefore\quad (x^2+1)^2-(x^4+x^2+1)>0$

$\therefore\quad (x^2+1)^2>x^4+x^2+1,$

$\therefore\quad (x^2+1)^2\geqslant x^4+x^2+1.$*

例4 比较 $(a-1)^2$ 与 a^2+1 的大小。

解 $\because\quad (a-1)^2-(a^2+1)$

$=(a^2-2a+1)-(a^2+1)$

$=-2a.$

若 a 为一正数，那末 $-2a$ 为一负数，

$\therefore\quad (a-1)^2<a^2+1$

若 a 为一负数，那末 $-2a$ 为一正数，

$\therefore\quad (a-1)^2>a^2+1$

若 a 为零，那末 $-2a$ 也为零

$\therefore\quad (a-1)^2=a^2+1$

$$\therefore\quad (a-1)^2\begin{cases}<a^2+1 & (a>0)\\ >a^2+1 & (a<0)\\ =a^2+1 & (a=0).\end{cases}$$

最后，我们再进一步讨论不等式的方向．如果两个或者几个不等式里的每一个的左边都大于右边，或者每一个的左边都小于右边，那末我们称这些不等式为同向不等式．例如不等式 $a>b$ 和 $c>d$ 是同向不等式；不等式 $a<b$ 和 $c<d$ 也是同向不等式．

---

*注：$(x^2+1)^2\geqslant x^4+x^2+1$ 表示 $(x^2+1)^2$ 的值大于或等于 x^4+x^2+1 的值．也就是说 $(x^2+1)^2$ 的值不小于 x^4+x^2+1 的值．

对于用符号"$\geqslant$"（即大于或等于）或者"$\leqslant$"（即小于或等于）把两个代数式联结起来的式子，也叫做不等式．我们为了明确起见，把用"$>$"或"$<$"联结而成的不等式，叫做"纯不等式"，而用"$\geqslant$"或"$\leqslant$"联结而成的不等式，叫做"混合不等式"．

如果一个不等式的左边大于右边，而另一个不等式的左边却是小于右边，那末我们称这些不等式为**异向不等式**。例如不等式 $a>b$ 和 $c<d$ 是异向不等式．

这里我们必须注意，不等式是在实数范围内讨论两个或两个以上代数式的值，在比较它们的大小的时候所存在的关系．因此我们所说的代数式的值，也是指的实数值．另一方面，我们所用的字母，都是表示实数的．换句话说，在没有定义“大于”和“小于”等概念的数(如虚数)的范围内，是不能建立不等式的理论的．

练 习 一

1．已知 $a>b$，试用不等号联结下列各题中的两式：

(1) $a+5$ 与 $b+5$；　　(2) $a-b$ 与 0；

(3) $-3a$ 与 $-3b$；　　(4) $\frac{a}{7}$ 与 $\frac{b}{7}$；

(5) $-\frac{a}{2}$ 与 $-\frac{b}{2}$；　　(6) $a-2$ 与 $b-2$．

2．用不等式表示：

(1) a 是正数；　　(2) a 是负数；

(3) a 不是正数；　　(4) a 不是负数．

3．比较下列各题中两个代数式的大小：

(1) $(a-5)(a-7)$ 与 $(a-6)^2$；

(2) $(a+1)(a^2-a+1)$ 与 $(a-1)(a^2+a+1)$；

(3) $(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$ 与

$(x^2+x+1)(x^2-x+1)$；　　(其中 $x\neq 0$)

(4) a^2+b^2 与 $2ab$；（题示：按 $a=b$ 和 $a\neq b$ 分别讨论）．

(5) $(\sqrt{x}-1)^2$ 与 $(\sqrt{x}+1)^2$；

(6) $(x+1)\left(x^2+\frac{1}{2}x+1\right)$与$\left(x+\frac{1}{2}\right)(x^2+x+1)$；

(7) $\left(\frac{n}{\sqrt{6}}+1\right)^3-\left(\frac{n}{\sqrt{6}}-1\right)^3$与 2，其中 $n\neq0$；

(8) $(x+5)(x+7)$ 与 $(x+6)^2$.

4. 把下面的关系分别用不等式表示出来：

(1) x 的 2 倍减去 3 大于 1；

(2) x 的$\frac{1}{3}$加上 4 是负数；

(3) 负 4 减去 x 的平方小于 x 的 2 倍；

(4) 3 与 x 的 2 倍的和不大于 10；

(5) 7 与 x 的差不小于 0；

(6) x 的 2 倍减去 3 不大于 x 加 5。

4.2 不等式的基本性质

我们知道，在等式的两边同时加、减一个数，或同时乘、除以一个数时（进行除法的除数不为 0），等式仍然成立. 对于不等式，是否也具有类似的性质呢？下面我们来讨论不等式的基本性质及其重要结论.

(1) 不等式的对逆性：如果 $a>b$，那末 $b<a$；反之，如果 $b<a$，那末 $a>b$.

证明：因为 $a>b$，那末 $a-b$ 为一正数，所以 $-(a-b)$是一个负数.

而 $-(a-b)=b-a$，所以 $b-a$ 是一个负数。

所以 $b<a$.

对于逆定理，可用同样方法证明，故从略。

上述不等式的对逆性，其实质就是不等式的两边互换时，不等号就要反方向.

例1 由不等式 $\pi>3$ 可得 $3<\pi$.

(2) 不等式的传递性：如果 $a>b$，$b>c$，那末 $a>c$。

证明：因为 $a>b$，$b>c$，那末 $a-b$ 和 $b-c$ 都是正数.

所以　$(a-b)+(b-c)$ 为一正数.

而　　$(a-b)+(b-c)=a-c$

所以　$a-c$ 为一正数，

所以　$a>c$.

例2　由不等式 $\pi>3$ 和 $3>2\sqrt{2}$ 可得 $\pi>2\sqrt{2}$.

(3) 不等式的加法单调性：如果 $a>b$，那末 $a+c>b+c$.

证明：因为 $a>b$，那末 $a-b$ 为一个正数. 而 $(a+c)-(b+c)=a-b$，所以 $(a+c)-(b+c)$ 是一正数. 所以 $a+c>b+c$.

推论：如果 $a+b>c$，那末 $a>c-b$.

证明：因为 $a+b>c$，那末 $a+b+(-b)>c+(-b)$，所以 $a>c-b$.

上述推论说明，不等式中任何一项可以把它的符号变为相反的符号后，从不等式的一边移到另一边. 这就是不等式的移项法则.

例3　由不等式 $3x-1>2x$ 可得 $3x>2x+1$，同理可得 $3x-2x>1$，即 $x>1$.

(4) 不等式的乘法单调性1：如果 $a>b$，$c>0$，那末 $ac>bc$.

证明：因为 $a>b$，$c>0$，那末 $a-b$ 和 c 都是正数，所以 $(a-b)c$ 是一正数.

而　　$(a-b)c=ac-bc$

所以　$cc-tc$　为一正数.

所以　$ac>tc$.

例4　由不等式 $\frac{3}{2}x>1$ 可得 $3x>2$，

同理可得 $\frac{1}{3}\cdot 3x>\frac{1}{3}\times 2$，即$x>\frac{2}{3}$.

（5）不等式的乘法非单调性2：如果 $a>b$，$c<0$，那末 $ac<bc$.

证明：因为 $a>b$，则 $a-b$ 为一正数；而 $c<0$，所以 c 为一负数.

所以　$(a-b)c$ 为一负数.

而　　$(a-b)c=ac-bc$

∴　　$ac-bc$ 为一负数.

所以　$ac<bc$.

根据上述乘法单调性和非单调性可知：不等式的两边，如果同乘以一个正数，那末得到与原不等式同向的不等式；如果同乘以一个负数，那末得到与原不等式异向的不等式；特别，如果同乘以零，那末就得到一个等式.

推论：如果不等式两端改变符号，那末不等号反向.

例5　由 $2-3x>4$，那末可得 $-3x>4-2$，即 $-3x>2$

所以$\left(-\frac{1}{3}\right)(-3x)<2\times\left(-\frac{1}{3}\right)$，即$x<-\frac{2}{3}$.

以上五条性质，是不等式的基本性质。根据上述基本性质，还可以推导出不等式的其他一些性质.

（6）如果 $a>b$，$c>d$，那末 $a+c>b+d$.

证明：因为 $a>b$，所以 $a+c>b+c$，又因为 $c>d$，所以 $b+c>b+d$.所以 $a+c>b+d$.

不言而喻，上述性质对于任意个同向不等式仍然成立.

一句话，两个或者几个同向不等式两边分别相加，仍得同向不等式.

例6 由不等式 $4>3$，$3>2$，$2>1$.

那末 $4+3+2>3+2+1$，即 $9>6$.

(7) 如果 $a>b$，$c<d$，那末 $a-c>b-d$.

证明：因为 $c<d$，那末 $-c>-d$，又因为 $a>b$，所以 $a-c>b-d$.

也就是说，两个异向不等式两边分别相减，所得到的不等式与被减不等式同向.

例7 由不等式 $4>3$ 和 $2<3$ 可得 $4-2>3-3$，即 $2>0$.

(8) 如果 $a>b$，$c>d$，且 a、b、c、d 都是正数，那末 $ac>bd$.

证明：因为 $a>b$，$c>0$，所以 $ac>bc$.

又因为 $c>d$，$b>0$，所以 $bc>bd$.

所以 $ac>bd$.

不言而喻，上述性质在任意个两边都是正数的同向不等式的两边分别相乘时仍然成立.

一句话，两个或者几个两边都是正数的同向不等式的两边分别相乘，仍得同向不等式.

(9) 如果 $a>b$，而且 a、b 都是正数，那末 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

证明：因为 a、b 都是正数，所以 $ab>0$，从而 $\frac{1}{ab}>0$.

又因为 $a>b$，所以 $\frac{a}{ab}>\frac{b}{ab}$，所以 $\frac{1}{b}>\frac{1}{a}$，所以 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

(10) 如果 $a>b$，$c<d$，而且 a、b、c、d 都是正数，那末 $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$.

证明：因为 $c<d$，而且 c、d 均为正数，那末 $\frac{1}{c}>\frac{1}{d}$。

又因为 $a>b$，而且 a、b、$\frac{1}{c}$、$\frac{1}{d}$ 都是正数，所以 $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$。

也就是说，两个两边都是正数的异向不等式两边分别相除所得到的不等式，与被除的不等式同向。

(11) 如果 $a>b$，而且 a、b 都是正数，n 为大于 1 的整数，那末 $a^n>b^n$。

证明：因为 $a>b$，而且 a、b 都是正数，那末将 n 个不等式 $a>b$ 的两边相乘，就得到 $a^n>b^n$。

(12) 如果 $a>b$，而且 a、b 都是正数，n 是大于 1 的整数，那末 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$。

证明：因为假若不然，那末就有

$$\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b} \qquad (1)$$

或者

$$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b} \qquad (2)$$

由(1)，则有 $(\sqrt[n]{a})^n<(\sqrt[n]{b})^n$

所以 $a<b$，这与已知条件 $a>b$ 相矛盾，因此(1)不成立。

又由(2)，则有 $(\sqrt[n]{a})^n=(\sqrt[n]{b})^n$

所以 $a=b$，这也与已知条件 $a>b$ 相矛盾，因此(2)不成立。

由此可知，$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$。

练 习 二

1. 求证：

(1) 如果 $a<b$，$b<c$，那末 $a<c$；

(2) 如果 $a<b$，那末 $a+c<b+c$；