祝同江 牛少彰 编

# 复变函数学习指导与例题分析

兵器工业出版社

# 复变函数学习指导与例题分析

祝同江　牛少彰　　编

兵器工业出版社

## 内容简介

为了指导读者深入理解有关概念及掌握解题方法，本书分六章：复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数、保角映射，前后给出了80多个有关基本概念的复习思考题及300多个例题和补充习题，对各类例题的解法进行了小结，对其思考题和补充习题都给出了提示或答案。相信对广大读者的学习定大有帮助。

**图书在版编目(CIP)数据**

复变函数学习指导与例题分析/祝同江，牛少彰编 .—北京：兵器工业出版社，2001.9
ISBN 7-80172-054-7

Ⅰ.复… Ⅱ.①祝…②牛… Ⅲ.复变函数-自学参考资料 Ⅳ.0174.5

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第054939号

出版发行：兵器工业出版社
发行电话：010-68962596,68962591
邮　　编：100089
社　　址：北京市海淀区车道沟10号
经　　销：各地新华书店
印　　刷：瑞达方舟印务有限公司
版　　次：2001年9月第1版第1次印刷
　　　　　2005年1月第1版第2次印刷
印　　数：4051-7050

责任编辑：岳本伟
封面设计：底晓娟
责任校对：郭　芳
责任印制：王京华
开　　本：850×1168　1/16
印　　张：13.5
字　　数：327千字
定　　价：17.00元

# 前　言

复变函数的理论和方法在自动控制、电子与信息工程及机电工程与邮电工程等现代科学技术中有广泛的应用。许多高等学校都把它作为一门必修的基础课，它是学习有关专业课及数学物理方程、积分变换等课程的理论基础与重要工具。可是许多高等学校没有开设该课程的习题课，为了指导有关读者深入理解有关概念与进一步掌握其解题方法，本书前后给出了80多个基本概念复习思考题及300多个例题和补充习题，对各类例题的解法进行了小结，对其思考题和补充习题都给出了提示或答案。

本书按照国家教委1987年批准印发的《复变函数课程教学基本要求》(工程数学部分)编写而成，超出上述基本要求的内容、例题及习题都标以"*"号。这些加"*"号的内容是数学专业的学生学习《复变函数论》课所需要的，也可供有关科学技术人员学习时参考。

本书在编写过程中得到北京理工大学数学系、北京邮电大学理学院数学部许多教师的大力支持，他们对该书的编写提出了许多宝贵意见，在此表示衷心感谢。

由于我们学识水平所限，书中一定会有许多缺点与错误，殷切期望广大读者批评指正。

**编　者**

**2001年6月于北京**

# 目　　录

## 第一章　复数与复变函数

一、本章基本要求 …… (1)
二、复数的概念及其运算 …… (1)
(一) 基本概念 …… (1)
(二) 复数的运算公式 …… (3)
(三) 复习思考题 …… (4)
三、复数及其运算解题法分类总结 …… (5)
(一) 关于区域表示法的练习 …… (5)
(二) 关于曲线的参数表示法 …… (6)
(三) 用复数和共轭复数表示的曲线方程 …… (7)
(四) 关于两条直线垂直和平行的条件 …… (7)
(五) 求复平面上线段的分点和正多边形的对称中心 …… (9)
(六) 有关圆内接三角形和圆内接多边形的证明问题 …… (9)
(七) 有关复数模的等式和不等式的练习 …… (13)
(八) 利用乘方和开方化简或证明三角等式 …… (16)
(九) 复数的混合运算及其多项式的根 …… (19)
四、复变函数的极限和连续 …… (21)
(一) 基本概念与定理 …… (21)
(二) 复习思考题 …… (23)
五、极限与连续解题法分类总结 …… (23)
(一) 表达式 $w=f(z)$和 $w=u(x,y)+iv(x,y)$的互相转化 …… (23)
(二) 关于函数在某点处连续性的判别 …… (24)
(三) 函数极限的求法和极限不存在的判别法 …… (25)
六*、复球面 …… (27)
(一)复数在球面上的表示法与扩充复平面 …… (27)
(二)球极投影公式 …… (27)
(三)球极投影的基本性质——保圆性 …… (28)
七、本章补充习题 …… (28)

## 第二章　解析函数

一、本章基本要求 …… (32)

二、复变函数的解析性与调和函数 …… (32)
(一) 基本概念 …… (32)
(二) 基本定理 …… (33)
三、初等函数 …… (34)
(一)指数函数 $w=e^z=\exp x$ …… (34)
(二)三角函数 …… (35)
(三)双曲函数 …… (35)
(四)对数函数 …… (36)
(五)一般幂函数和一般指数函数 …… (36)
(六)反三角函数和反双曲函数 …… (37)
四、基本概念复习思考题 …… (39)
五、例题分类总结 …… (40)
(一) 判别函数解析性和可导性 …… (40)
(二) 用调和函数表示解析函数的几个等式 …… (45)
(三) 解析函数 $w=f(z)$的 C-R 条件在极坐标系下的各种形式 …… (48)
(四) 关于解析函数与调和函数的关系 …… (50)
(五) 在函数解析条件下某些等式的证明 …… (53)
(六) * 实变复值调和函数与函数$\overline{f(\overline{z})}$的解析性 …… (55)
(七) 用 L'Hospital 法则求$\frac{0}{0}$型的极限 …… (56)
(八) 关于三角函数和双曲函数公式的证明 …… (57)
(九) 关于对数的性质与反三角函数和反双曲函数计算公式的证明 …… (58)
(十) 关于三角函数和双曲函数方程的解法 …… (59)
(十一) 计算初等函数值 …… (60)
六、本章补充习题 …… (61)

## 第三章 复变函数的积分

一、本章基本要求 …… (64)
二、基本概念、定理和公式 …… (64)
(一) 复变函数曲线积分的定义、计算及性质 …… (64)
(二) 曲线积分与路径无关的条件和闭路变形原理 …… (66)
(三) 柯西(Cauchy)积分公式和高阶导数公式 …… (67)
三、复习思考题 …… (67)
四、解题法分类总结 …… (69)
(一) 直接用柯西—古萨基本定理计算复变函数曲线积分 …… (69)
(二) 用复变函数中的牛顿—莱布尼兹公式计算复积分 …… (69)
(三) 直接用柯西积分公式和解析函数的高阶导数公式计算复积分 …… (71)
(四) 被积函数在积分闭路内有多个奇点的积分 …… (72)
(五) 非解析函数的曲线积分计算 …… (73)

(六) 可把被积函数化为解析函数的曲线积分 …… (74)
(七) 在被积函数中含有不定常数的积分 …… (75)
(八) 利用柯西积分公式证明调和函数的性质 …… (76)
(九) 柯西积分公式在复闭路的推广 …… (78)
五、本章补充习题 …… (79)

## 第四章 级 数

一、本章基本要求 …… (82)
二、基本概念、公式和定理 …… (82)
(一) 复数列与复数项级数 …… (82)
(二) 函数项级数与幂级数 …… (83)
(三) 台劳(Taylor)级数 …… (85)
(四) 罗伦(Laurent)级数 …… (86)
(五)* 关于函数项级数的一致收敛性 …… (87)
(六)* 关于级数的重排和级数的乘法 …… (89)
三、复习思考题 …… (89)
四、解题法分类总结 …… (92)
(一) 复数列极限的求法 …… (92)
(二) 判别级数敛散性的方法 …… (93)
(三) 关于幂级数收敛半径的求法 …… (94)
(四)* 函数项级数收敛区域与和函数的求法 …… (96)
(五)* 几个特殊数列极限与某些级数和的求法 …… (99)
(六) 关于幂级数收敛半径的比较和估计 …… (103)
(七) 求解析函数的台劳级数展开式 …… (104)
(八) 求函数在其解析环域内的罗伦级数 …… (111)
(九) 求函数在 $z=\infty$ 点邻域内的罗伦级数 …… (115)
(十)* 利用罗伦级数证明几种复变函数的付里叶(Fourier)级数展开式和某些含有三角级数的等式 …… (118)
(十一) 用台劳级数证明不等式 …… (121)
(十二)* 关于级数的绝对收敛性和一致收敛性的证明 …… (122)
(十三)* 台劳级数系数的定积分表达式及其估计 …… (128)
(十四)* 利用台劳级数或罗伦级数求三角级数之和 …… (131)
五、本章补充习题 …… (132)

## 第五章 留 数

一、本章基本要求 …… (137)
二、基本概念、公式和定理 …… (137)
(一) 孤立奇点 …… (137)
(二) 留数(Residue) …… (139)

(三)* 对数留数与辐角原理 …… (141)
(四) 留数在定积分计算上的应用 …… (141)
三、基本概念复习思考题 …… (142)
四、例题分类总结 …… (144)
(一) L′Hospital 法则与$\frac{\infty}{\infty}$型极限的求法 …… (144)
(二) 函数零点的阶数与函数运算的关系 …… (146)
(三) 判别孤立奇点的类型 …… (147)
(四)* 判别无穷远点∞作为奇点的类型 …… (149)
(五) 求函数在孤立奇点处的留数(包括∞点) …… (151)
(六) 利用留数计算沿闭路的复积分 …… (153)
(七) 函数在积分闭路内有无穷个孤立奇点的积分 …… (157)
(八) 利用留数证明含有积分的等式 …… (159)
(九)* 关于函数的零点和极点的概念在某些证明问题中的应用 …… (164)
(十) 利用留数计算定积分和无穷限的广义积分 …… (166)
(十一)* 约当(Jordan)引理和几类无穷限广义积分计算公式的证明 …… (168)
五、本章补充习题 …… (171)

**第六章 保角映射**

一、本章基本要求 …… (175)
二、基本概念、定理和公式 …… (175)
(一) 解析函数导数的几何意义和保角映射 …… (175)
(二)* 解析映射的几个一般性定理 …… (177)
(三) 分式线性映射 …… (177)
(四) 几个初等函数所构成的映射 …… (180)
三、复习思考题 …… (181)
四、例题分类总结 …… (183)
(一) 与几种常见曲线有关的映射 …… (183)
(二) 求所给区域经已知映射后的像 …… (187)
(三) 求满足已给条件的分式线性映射 …… (189)
(四)* 求把一个二角形区域变为上半平面的双方单值的保角映射 …… (192)
(五) 从一个扇形区域或一段圆弧的外部区域到上半平面的映射 …… (196)
(六) 把具有和边界垂直割缝的区域变为上半平面的映射 …… (198)
(七)* 许瓦尔兹引理 …… (201)
五、本章补充习题 …… (202)

**参考文献** …… (206)

**推荐使用教材** …… (206)

# 第一章　复数与复变函数

## 一、本章基本要求

1. 熟练掌握复数的六种基本运算

2. 掌握复数的三种表示法. 正确理解复数的模和辐角,以及两个复数相等的概念. 能够熟练利用这些表示法解决计算和证明问题.

3. 正确理解区域、单连域、多连域以及简单闭曲线的概念. 能够熟练写出常见的平面曲线、平面区域的复形式表达式.

4. 正确理解复变函数、复映射以及它们的极限和连续的概念. 掌握在常见复映射下求平面曲线的象曲线的方法.

为了叙述方便,我们把本章内容及其例题分为三部分,第一部分《复数及其运算》,第二部分《复变函数及其极限与连续性》,第三部分《复球面》. 最后一节是作为扩充复平面的几何解释引入的,除叙述复球面的基本概念外,我们还简单介绍了复平面上的圆周和直线在复球面上的象曲线都是圆周的内容,以便读者把复平面上的直线也可以看作圆周有较直观的理解. 它对后续内容关系不大,一般工科院校学生可以省略.

## 二、复数的概念及其运算

### (一) 基本概念

1. 复数的表示

(1) 代数表示法　对任意实数 $x$ 和 $y$,

$$z = x + \mathrm{i}y \tag{1.1}$$

表示一个复数,其中 i 为虚数单位,分别称 $x$ 和 $y$ 为复数 $z$ 的实部(real part)和虚部(imaginary part),记作

$$x = \mathrm{Re}(z)\ ,\ y = \mathrm{Im}(z) \tag{1.2}$$

当实部 $x=\mathrm{Re}(z)=0$ 时,复数 $z$ 就是纯虚数;当虚部 $y=\mathrm{Im}(z)=0$ 时,复数 $z$ 就是实数. 因此复数是实数概念的推广,其关系可以表示如下

$$\text{复数}\begin{cases}\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\\\text{无理数}\end{cases}\\\text{虚数}\begin{cases}\text{纯虚数}\\\text{非纯虚数}\end{cases}\end{cases}$$

(2) 三角表达式　由于复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 和 $XOY$ 平面上的点是一一对应的，因此可以用 $XOY$ 平面上的点 $(x,y)$ 表示复数 $z=x+\mathrm{i}y$. 并称用它的点表示复数的平面为复平面，$x$ 轴为实轴，$y$ 轴为虚轴，称表示复数 $z$ 的点为点 $z$. 又因从原点出发到点 $z$ 的向量和点 $z$ 是一一对应的，所以又称这个向量为复向量 $z$. 点 $z$ 和向量 $z$ 是复数 $z$ 在几何上的别名，为了指出向量的起点和终点本书有时也把矢量 $z$ 记作 $\overrightarrow{\boldsymbol{o},\boldsymbol{z}}$（其中所加逗点是为了避免与乘积的复向量相混淆）. 称向量 $\overrightarrow{\boldsymbol{o},\boldsymbol{z}}$ 的模为复数 $z$ 的模或绝对值，记为 $|z|$

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2},\ |x|\leqslant|z|,\ |y|\leqslant|z| \tag{1.3}$$

称以正实轴为始边以 $\overrightarrow{\boldsymbol{o},\boldsymbol{z}}$ 为终边的角为非零复数 $z$ 的辐角(argument)，记为 $\mathrm{Arg}(z)$. 由于从正实轴到 $\overrightarrow{\boldsymbol{o},\boldsymbol{z}}$ 的旋转角（逆时针方向为正，反之取负）再增加 $2k\pi(k=0,\pm1,\cdots)$ 后终边仍然不变，因此对任意不为零的复数 $z$，$\mathrm{Arg}(z)$ 是多值的；可是在区间 $(-\pi,\pi]$ 上却仅有一个 $\mathrm{Arg}(z)$ 的值与 $z$ 对应，称 $\mathrm{Arg}(z)$ 的这个值为数 $z$ 辐角的主值，记作 $\arg(z)$. 即

$$-\pi<\arg(z)\leqslant\pi \tag{1.4}$$

并且

$$\mathrm{Arg}(z)=\arg(z)+2k\pi \tag{1.5}$$

其中 $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

对任一复数 $z\neq0$，令 $\mathrm{Arg}(z)=\varphi$，$r=|z|$，有

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi \tag{1.6}$$

$$z=r(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi) \tag{1.7}$$

称最后等式为复数 $z$ 的三角表达式.

(3) 指数表达式

利用等式(1.7)和尤拉(Euler)公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}=\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi$ 可得复数的指数表达式

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},\ z\neq0 \tag{1.8}$$

**注意**　[1]　只当 $\mathrm{Re}(z)>0$ 时，$\arg(z)$ 可表示为

$$\arg(z)=\mathrm{arctg}(y/x) \tag{1.9}$$

可是总可以表示为

$$\arg(z)=\begin{cases}\arccos(x/\sqrt{x^2+y^2}), y\geqslant0\\ -\arccos(x/\sqrt{x^2+y^2}), y<0\end{cases} \tag{1.10}$$

[2]　当 $z=0$ 时，$\mathrm{Arg}(z)$ 没有意义，复数 $z$ 没有三角表达式和指数表达式，于是写 $\arg(z)$ 或 $\mathrm{Arg}(z)$ 都是对 $z\neq0$ 而言，今后不再说明. 若无特殊声明，本书用 $\arg(z)$ 都是表示在区间 $(-\pi,\pi]$ 上取辐角的主值. 在其它书中也有规定其它长为 $2\pi$ 的区间是辐角的主值区间，例如可取 $[0,2\pi)$ 是辐角的主值区间.

2. 两个复数的相等及其充要条件

(1) 定义　当且仅当两个复数的实部和虚部分别对应相等时，我们称这两个复数相等.

在复数的三角表达式中，当限定辐角仅取主值时，复数的三角表达式就是唯一的. 由此我们得到：

(2) 两个非零复数相等的充要条件是它们的模和辐角的主值分别对应相等.

(3) $z=0$ 的充要条件是 $|z|=0$.

(4) 两个复数至少有一个不是实数时，不能比较它们的大小，这是与实数重要不同之处. 而对它们的实部、虚部、模以及辐角可以比较大小，因为都是实数.

3. 共轭复数

(1) 复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的共轭复数是 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$.

(2) 复数 $z=\bar{z}$ 的充要条件为 $z$ 是实数. 即

$$\mathrm{Im}(z)=0.$$

(3) 当 $z$ 不为零和负实数时, $|z|=|\bar{z}|$, $\arg(\bar{z})=-\arg(z)$ (1.11)

(4) $\mathrm{Re}(z)=(z+\bar{z})/2$, $\mathrm{Im}(z)=(z-\bar{z})/(2\mathrm{i})$, $|z|^2=z\bar{z}$ (1.12)

(5) 共轭复数的运算公式

$$\begin{cases}\overline{z_1 \pm z_2}=\bar{z}_1 \pm \bar{z}_2,\ \overline{z_1 z_2}=\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \\ \overline{(z^n)}=(\bar{z})^n,\ \overline{(z_1/z_2)}=\bar{z}_1/\bar{z}_2, \quad z_2 \neq 0\end{cases} \tag{1.13}$$

**说明** 对复数取共轭也可以看成一种运算,读者不难验证上述运算规律成立.

4. 复平面上的区域

在复平面上,'区域'一词是专指连通开集,它和高等数学中在 $XOY$ 平面上定义的'开区域'是同一个概念,因此在复变函数中,'开区域'一词不再出现,它被'区域'这个词代替.

关于闭区域、点的邻域、有界区域、无界区域、区域的边界、单连通区域——简称单连域、复连通区域——简称多连域,以及其它与区域有关的概念,都和高等教学中在讲多元函数时提到的相应概念一致,这里不再重复.

对于一条连续曲线 $C: z=z(t)\ (a \leqslant t \leqslant b)$,若 $z(a)=z(b)$,且当 $t_1 \neq t_2$ 时(其中 $a \leqslant t_1 < t_2 < b$),总有 $z(t_1) \neq z(t_2)$,则称 $C$ 为简单闭曲线.

[注]* 在扩充复平面上,当区域 $D$ 内的任一条简单闭曲线的外部(包含无穷远点)都属于这个区域时,也称 $D$ 为单连域,今后我们提到单连域总是对有限复平面而言.

## (二) 复数的运算公式

设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$, $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$, $|z_1|=r_1$, $|z_2|=r_2$, $\arg(z_1)=\varphi_1$, $\arg(z_2)=\varphi_2$

1. 加减法 $\quad z_1 \pm z_2=(x_1 \pm x_2)+\mathrm{i}(y_1 \pm y_2)$ (1.14)

2. 乘法 $z_1 z_2=(x_1 x_2-y_1 y_2)+\mathrm{i}(x_1 y_2+x_2 y_1)$ (1.15)

$$z_1 z_2=r_1 r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+\mathrm{i}\sin(\varphi_1+\varphi_2)] \text{或} z_1 z_2=r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)} \tag{1.16}$$

$$|z_1 z_2|=|z_1||z_2|,\ \mathrm{Arg}(z_1 z_2)=\mathrm{Arg}(z_1)+\mathrm{Arg}(z_2) \tag{1.17}$$

3. 除法

$$\text{对 } z_2 \neq 0, \frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}=\frac{x_1 x_2+y_1 y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2 y_1-x_1 y_2}{x_2^2+y_2^2} \tag{1.18}$$

$$|z_1/z_2|=|z_1|/|z_2|,\ \mathrm{Arg}(z_1/z_2)=\mathrm{Arg}(z_1)-\mathrm{Arg}(z_2) \tag{1.19}$$

4. 乘方和开方

设 $|z|=r$, $\arg(z)=\varphi$,则有

$$z^n=r^n[\cos(n\varphi)+\mathrm{i}\sin(n\varphi)] \text{ 或 } z^n=r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi} \tag{1.20}$$

$$\sqrt[n]{z}=z^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) \text{或} \sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi+2k\pi}{n}} \tag{1.21}$$

其中 $\quad k=0,1,2,\cdots,n-1$; $\sqrt[n]{z}$ 或 $z^{\frac{1}{n}}$ 表示 $n$ 个根,而 $\sqrt[n]{r}$ 表示算术根.

**说明** [1] 上述各种运算结果都是复数,可以看作向量. 对于两个复数的加、减,在几何

上可以像以前高等数学中讲过的矢量代数那样，利用平行四边形或三角形法则进行计算，对于多个复矢量的加法，封闭多边形法则也仍然成立，这里不再重复. 应当注意复矢量 $z_1-z_2$ 是表示从点 $z_2$ 到点 $z_1$ 的矢量，即

$$z_1-z_2=\overrightarrow{z_2,z_1},\ |z_1-z_2|=|\overrightarrow{z_2,z_1}| \tag{1.22}$$

如果把复矢量 $z_1$ 到 $z_2$ 的旋转角限制在区间 $(-\pi,\pi]$ 上取的值记为 $\angle(z_1,z_2)$，则商的辐角主值可以表示为

$$\arg(z_1/z_2)=\angle(z_2,z_1) \tag{1.23}$$

其中 $\qquad \angle(z_2,z_1)=-\angle(z_1,z_2)$（其值不取 $\pm\pi$ 时） $\qquad$ (1.24)

[2] 关于积和商的辐角公式(1.17)和(1.19)，等号两端都有无穷多个值，等号成立是指左右两端值的集合相等 . 在这种意义下，$n\mathrm{Arg}(z)=n\arg(z)+n2k\pi$ 的值仅是 $\mathrm{Arg}(z^n)=\arg(z^n)+2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 的一部分，故 $\mathrm{Arg}(z^n)=n\mathrm{Arg}(z)$ 不成立 . 另外，由于辐角主值的和、差以及它与整数的积可能超出主值范围，因此对辐角的主值而言，上述辐角公式都不一定成立.

[3] 当 $z\neq0$ 时，$\sqrt[n]{z}$ 的 $n$ 个根在复平面上所表示的 $n$ 个点等分以原点为中心，以 $\sqrt[n]{|z|}$ 为半径的圆周，以这 $n$ 个点为顶点的多边形是此圆的内接正多边形. 这个几何解释为我们证明正多边形问题提供了一种途径.

**（三）复习思考题**

1. 如果 $z_1^2+z_2^2=0$，那么能断定 $z_1=z_2=0$ 吗?

2. 若 $z_1z_2=0$，则一定有 $z_1=0$ 或 $z_2=0$，仍然成立吗? 试说明理由 .[提示]考虑 $|z_1z_2|=0$.

3. 指出下列复数的三角表达式和指数表达式中的错误，并进行改正.

(1) $\cos\theta\cos\varphi+\mathrm{i}\cos\theta\sin\varphi=\cos\theta e^{\mathrm{i}\varphi},\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi$ .

(2) $a+a\mathrm{i}=a\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$，其中 $a$ 为实数.

4*. 指出下面算式中的错误.

$$1=\sqrt{1}=\sqrt{(-1)(-1)}=\sqrt{-1}\sqrt{-1}=\mathrm{ii}=-1,$$

此题说明，研究多值函数不分成单值分支讨论很容易发生各种各样的错误. 因此当我们遇到多值函数时，总是取其中的一个具体的单值分支进行考察.

5*. 在复数范围内，对非零复数 $a$ 和 $b$ 下面各式成立吗? 试指出等号两边可能取几个值.

(1) $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$（由其指数表示，显然成立）.

(2) $a^{\frac{1}{m}}a^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}$，其中 $m,n=2,3,\cdots$.[提示] 令 $m=n=2,a=-1$ 代入检验.

6*. 下面等式成立，为什么?

$$(a^{1/n})^{1/m}=a^{1/(mn)}\text{，其中 } m,n \text{ 为正整数} \tag{1.25}$$

[提示] 当 $a\neq0$ 时，等号两边模显然相等，且都有 $mn$ 个值，它们都是 $a$ 的 $mn$ 次方根. 只需说明等式左端有 $mn$ 个不同值.

7. 指出下式中的错误.

$$\sqrt[6]{-1}=\sqrt[3]{\mathrm{i}}=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)/3\right]+\mathrm{i}\sin\left[\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)/3\right]\text{，其中 } k=0,1,\cdots,5.$$

8. 下列各式成立吗?

(1) $\arg(-1)+\arg(\mathrm{i})=\arg[(-1)(\mathrm{i})]$,

(2) $\arg(-\mathrm{i})-\arg(-1)=\arg[(-\mathrm{i})/(-1)]$,

(3) $\arg(-\mathrm{i})^2=2\arg(-\mathrm{i})$.

9. 用复数的代数表达式证明下列不等式成立,并说明其几何意义.

(1) $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$, (1.26)

(2) $|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||$. (1.27)

10. $\alpha\leqslant\arg(z)\leqslant\beta$ 表示一个闭的角形区域吗? [提示] $z=0$ 是边界点不属于此区域.

## 三、复数及其运算解题法分类总结

### (一) 关于区域表示法的练习

区域的表示法通常有三种:(1)用含复数辐角的不等式表示;(2)用复数的实部或虚部的不等式表示;(3)用复数模的不等式表示.为了求出上述各种不等式表示的区域,只需考察用等号取代不等号后,等式表示的是什么边界曲线,然后分析不等式的几何意义就可看出区域的图形,对复杂的区域通常是由上述不等式联立给出的,这个区域就是其中各不等式所表示区域的公共部分.

1. 指出下面不等式表示的区域.

(1) $\alpha<\arg(z-z_0)<\beta$, (2) $0<\arg(z)<\pi$, (3) $0<\arg(z)<\pi/2$,

(4) $-\pi<\arg(z)<\pi$, (5) $-\pi/2<\arg(z)<\pi/2$, (6) $\pi/2<\mathrm{Arg}(z)<3\pi/2$.

**解** 由 $\arg(z-z_0)=\alpha$ 表示从点 $z_0$ 出发(不包含 $z_0$)和正实轴交角为 $\alpha$ 的一条射线可知

(1) $\alpha<\arg(z-z_0)<\beta$ 表示顶点在 $z_0$,射线 $\arg(z-z_0)=\alpha$ 沿逆时针方向转到射线 $\arg(z-z_0)=\beta$ 所扫过的角形区域.

(2) $0<\arg(z)<\pi$ 表示上半平面区域.(3) $0<\arg(z)<\pi/2$ 表示第一象限区域.

(4) $-\pi<\arg(z)<\pi$ 表示割去负实轴和原点的复平面区域.

(5) $-\pi/2<\arg(z)<\pi/2$ 表示右半平面.(6) $\pi/2<\mathrm{Arg}(z)<3\pi/2$ 表示左半平面.

2. 设 $a$、$b$、$c$、$d$ 是实数.指出下面不等式表示的区域,并说明它们相应闭区域的表示式以及它们的有界性和连通性.

(1) $a<\mathrm{Re}(z)$; (2) $a<\mathrm{Re}(z)<b$; (3) $c<\mathrm{Im}(z)$;

(4) $c<\mathrm{Im}(z)<d$; (5) $a<\mathrm{Re}(z)<b, c<\mathrm{Im}(z)<d$; (6) $a<\mathrm{Re}(z-z_0)<b$.

**解** 显然直线 $\mathrm{Re}(z)=a$, $\mathrm{Im}(z)=c$, $\mathrm{Re}(z-z_0)=b$ 分别是 $XOY$ 平面上的直线 $x=a$, $y=c$, $x=b+\mathrm{Re}(z_0)$,于是有

(1) $a<\mathrm{Re}(z)$表示直线 $x=a$ 右侧的半平面.

(2) $a<\mathrm{Re}(z)<b$ 表示直线 $x=a$ 与 $x=b$ 之间的带形域 $a<x<b$.

(3) $c<\mathrm{Im}(z)$表示直线 $y=c$ 上方的半平面.

(4) $c<\mathrm{Im}(z)<d$ 表示直线 $y=c$ 和 $y=d$ 之间的带形域 $c<y<d$.

(5) $a<\mathrm{Re}(z)<b$ 且 $c<\mathrm{Im}(z)<d$ 表示上述两个带形域的公共部分,即矩形域 $a<x<b, c<y<d$.

(6) $a<\mathrm{Re}(z-z_0)<b$ 表示带形域 $a+\mathrm{Re}(z_0)<x<b+\mathrm{Re}(z_0)$.

上述各不等式都表示一个单连通区域.若把每个不等号下都添上等号,那么它们都表示闭区域.以上各题除(5)题所表示的区域是有界的外,其它区域是无界的.

3. 指出下列不等式表示的区域,并说明其连通性,其中 $a$、$b$ 为正实常数.

(1) $|z-z_0|<a$, (2) $|z-z_0|>a$, (3) $a<|z-z_0|<b$,

(4) $|z-z_1|+|z-z_2|\leqslant 2a$, (5) $||z-z_1|-|z-z_2||<2a$,

(6) $|z-z_1|-|z-z_2|>2a$, (7) $|z-z_2|-|z-z_1|>2a$, (8) $|z-z_1|>|z-z_2|$.

**解** 由于 $|z-z_0|$ 表示动点 $z$ 到定点 $z_0$ 的距离,因此 $|z-z_0|=a$ 表示以 $z_0$ 为中心,以 $a$ 为半径的圆周; $|z-z_1|=|z-z_2|$ 表示到定点 $z_1$ 和 $z_2$ 等距离点的轨迹,即线段 $\overline{z_1,z_2}$ 的垂直平分线.同理可知 $|z-z_1|+|z-z_2|=2a(|z_1-z_2|<2a)$ 表示以 $z_1$、$z_2$ 为焦点,以 $a$ 为长半轴的椭圆; $|z_1-z|-|z_2-z|=\pm 2a$ 是以 $z_1$、$z_2$ 为焦点,$a$ 为实半轴的双曲线,取其中正号时代表离焦点 $z_2$ 近的一个分支;取负号时代表另一分支,其中 $|z_1-z_2|>2a$.从此出发,我们立刻得到

(1) $|z-z_0|<a$ 表示圆 $|z-z_0|=a$ 的内部区域.

(2) $|z-z_0|>a$ 表示圆 $|z-z_0|=a$ 的外部区域.

(3) $a<|z-z_0|<b$ 表示以 $z_0$ 为中心、内外半径分别为 $a$ 和 $b$ 的圆环域,若 $a=0$,则它是去心圆域.

(4) $|z-z_1|+|z-z_2|\leqslant 2a$ 表示以 $z_1$ 和 $z_2$ 为焦点,$a$ 为长半轴的椭圆周和其内部点组成的闭区域.

(5) $||z-z_1|-|z-z_2||<2a$ 表示双曲线 $|z-z_1|-|z-z_2|=\pm 2a$ 的两个分支之间的区域.

(6) $|z_1-z|-|z_2-z|>2a$ 是以双曲线分支 $|z-z_1|-|z-z_2|=2a$ 为边界、点 $z_2$ 所在的区域.

(7) $|z-z_2|-|z-z_1|>2a$ 表示以此双曲线的另一分支为边界、点 $z_1$ 所在的区域.

(8) $|z-z_1|>|z-z_2|$ 表示以点 $z_1$ 和 $z_2$ 为端点的线段的垂直平分线的一侧,为点 $z_2$ 所在的半平面.

以上各题除(2)和(3)题是多连域外,其它各题是单连域.

### (二) 关于曲线的参数表示法

设平面曲线 $C$ 的参数方程为 $x=x(t)$, $y=y(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$. 如果把此平面看作复平面,那么在此复平面内,曲线 $C$ 上的动点 $z=x+\mathrm{i}y$ 代表随 $t$ 变化的复数,它满足等式 $z=x(t)+\mathrm{i}y(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$;或简记为 $z=z(t)$,这就是 $C$ 的复形式的参数方程.利用这种对应关系就可写出在复平面上曲线的参数方程(它等价于方程: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$).

4. 分别写出过点 $z_1$、$z_2$ 的直线 $L$ 和以 $z_1$、$z_2$ 为端点的直线段 $L_0$ 的参数方程,并说明直线 $z=z_0+kt$ ($z_0$, $k\neq 0$ 是复常数)的位置.

**解法(1)** 设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$, $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$, 显然过点 $z_1$ 和 $z_2$ 的直线为 $x=x_1+(x_2-x_1)t$, $y=y_1+(y_2-y_1)t$, $|t|<\infty$. 故 $L$ 和 $L_0$ 的复形式参数方程分别为

$$L: z=z_1+(z_2-z_1)t,\ |t|<\infty;\ L_0: z=z_1+(z_2-z_1)t, 0\leqslant t\leqslant 1 \quad (1.28)$$

**解法(2)** 直线 $L$ 的方向矢量为 $z_2-z_1$,对 $L$ 上任一点 $z$,复矢量 $z-z_1$ 与 $z_2-z_1$ 共线,

从而对应的复数 $z$ 满足 $z-z_1=(z_2-z_1)t$，其中 $z$ 随实参数 $t$ 的变化而变化，由此可得(1.28)式.

由解法(2)可知，直线 $z=z_0+kt(|t|<+\infty)$过定点 $z_0$，它以复矢量 $k$ 为方向矢量.

5. 说明下列参数方程表示什么曲线.

(1) $z=z_0+Re^{i\theta}$或 $z=z_0+R(\cos\theta+i\sin\theta)$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.

(2) $z=a\cos\theta+ib\sin\theta$，其中 $a\neq b$ 是正数，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.

(3) $z=a\operatorname{ch}t+ib\operatorname{sh}t$，其中 $a\neq b$ 是正数，$|t|<\infty$.

(4) $z=t^2+it$，其中$|t|<+\infty$ .

**解** 由圆、椭圆、双曲线以及抛物线的参数方程可知

(1) 表示以点 $z_0$ 为中心、$R$ 为半径的圆周.

(2) 表示椭圆周 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$.

(3) 由于当$|t|<+\infty$时，$\operatorname{ch}t\geqslant 1$，且 $-\infty<\operatorname{sh}t<+\infty$，又 $\operatorname{ch}^2t-\operatorname{sh}^2t=1$，因此 $z=a\operatorname{ch}t+ib\operatorname{sh}t$ 是表示双曲线“$x^2/a^2-y^2/b^2=1$”中右边的分支，这是因为 $x=a\operatorname{ch}t\geqslant a$.

(4) 表示抛物线 $y^2=x$.

### (三) 用复数和共轭复数表示的曲线方程

6. 指出下列复数方程表示的曲线.

(1) $a\bar{z}+\bar{a}z=c$ ($a\neq 0$ 的复常数，$c$ 为实常数). (1.29)

(2) $z\bar{z}+a\bar{z}+\bar{a}z+c=0$，其中 $a$ 为复常数，$c$ 为实常数. (1.30)

(3) $iz^2-i(\bar{z})^2=-4$.

(4) $(z-z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0)=R^2, R>0$.

**解** 利用恒等式 $z\bar{z}=|z|^2, x=\operatorname{Re}(z)=(z+\bar{z})/2, y=\operatorname{Im}(z)=(z-\bar{z})/(2i)$或表达式 $z=x+iy, \bar{z}=x-iy$ 和 $z\bar{z}=x^2+y^2$，我们可以把任何 $XOY$ 平面的直角坐标方程化为含有 $z$ 和 $\bar{z}$ 的方程；也可把含有 $z$ 和 $\bar{z}$ 的方程化为仅含 $x$ 和 $y$ 的直角坐标方程，从而看出它所表示的曲线.

(1) $a\bar{z}+\bar{a}z=c$，即 $(a+\bar{a})x+i(\bar{a}-a)y=c$，可知它是直线 $2\operatorname{Re}(a)x+2\operatorname{Im}(a)y=c$.

(2) $z\bar{z}+a\bar{z}+\bar{a}z-c=0$，即 $x^2+y^2+2\operatorname{Re}(a)x+2\operatorname{Im}(a)y-c=0$，显然它是一个圆周(或仅是一个点，也可能无图形).

(3) $-(\bar{z})^2+z^2=4i$，即 $xy=(z+\bar{z})(z-\bar{z})/(4i)=1$，它是双曲线.

(4) $(z-z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0)=R^2$，即 $|z-z_0|^2=R^2$ 是圆周$|z-z_0|=R$.

### (四) 关于两条直线垂直和平行的条件

解法说明：我们知道从矢量$\overrightarrow{z_1,z_2}$到矢量$\overrightarrow{z_3,z_4}$的转动角限制在区间$(-\pi,\pi]$上所取值为$\angle(z_2-z_1,z_4-z_3)=\arg[(z_4-z_3)/(z_2-z_1)]$. 由此可知这两个矢量垂直和平行的充要条件分别是过点 $z_1$ 和 $z_2$ 的直线与过点 $z_3$ 和 $z_4$ 的直线的垂直和平行条件.

7. 试证：过 $z_1$ 和 $z_2$ 两点的直线与过点 $z_3$ 和 $z_4$ 的直线互相平行的充要条件为$(z_4-z_3)/(z_2-z_1)$是不为零的实数.

**证明** 由$\angle(z_2-z_1,z_4-z_3)=\arg[(z_4-z_3)/(z_2-z_1)]=\pi$或零可知结论成立.

8. 求证：过点 $z_1$ 和 $z_2$ 的直线与过点 $z_3$ 和 $z_4$ 的直线互相垂直的充要条件为

$\arg[(z_4-z_3)/(z_2-z_1)]=\pm\dfrac{\pi}{2}$或$(z_4-z_3)/(z_2-z_1)$为纯虚数.

(证明从略,结论显然成立).

9. 求证:矢量$\overrightarrow{0,z_1}$与矢量$\overrightarrow{0,z_2}$互相垂直的充要条件为 $z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2=0$($z_1$ 和 $z_2$ 为非零复数).

**证法(1)** 用符号"$\Leftrightarrow$"表示充要条件.证明可简写为 $\overrightarrow{0,z_1}\perp\overrightarrow{0,z_2}\Leftrightarrow\arg(z_1/z_2)=\pm\pi/2\Leftrightarrow z_1/z_2$ 是纯虚数$\Leftrightarrow\overline{(z_1/z_2)}=-z_1/z_2\Leftrightarrow(z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2)/|z_2|^2=0\Leftrightarrow z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2=0$ .

**证法(2)** 设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1, x_2+\mathrm{i}y_2=z_2$,从矢量代数中两矢量的垂直条件可知

$\overrightarrow{0,z_1}\perp\overrightarrow{0,z_2}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0\Leftrightarrow z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1=2(x_1x_2+y_1y_2)=0$.

10. 求证:不同三点 $z_1$、$z_2$、$z_3$ 共线的充要条件为$(z_2-z_1)/(z_3-z_1)$为实数.

**证明** 由 7 题可知,$(z_2-z_1)/(z_3-z_1)$为实数等价于过点 $z_1$、$z_2$ 的直线与过点 $z_1$、$z_3$ 的直线平行,即这两条直线重合为一条直线,这就是说这三点在一条直线上.

11. 求证:三角形两边中点的连线平行于第三边.

**证明** 设已知三角形为$\triangle z_1z_2z_3$.显然它的两边$\overline{z_1,z_2}$和$\overline{z_1,z_3}$的中点分别为$(z_1+z_2)/2$ 和$(z_1+z_3)/2$,过这两中点直线的方向矢量为$(z_1+z_2)/2-(z_1+z_3)/2=(z_2-z_3)/2$,它平行于第三边的方向矢量$(z_2-z_3)$,所以上述两中点连线平行于第三边.

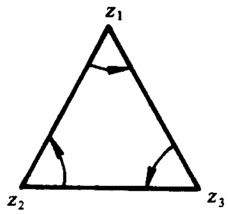


图 1-1

12*. 求证:一个三角形的三个内角之和为 $\pi$.

**证明** 设已知三角形为$\triangle z_1z_2z_3$,它的三个顶点 $z_1$、$z_2$、$z_3$ 沿它的边界是按逆时针方向排列(图 1-1).这时此三角形的各个内角可以表示为 $\angle z_1=\arg[(z_3-z_1)/(z_2-z_1)]$, $\angle z_2=\arg[(z_1-z_2)/(z_3-z_2)]$, $\angle z_3=\arg[(z_2-z_3)/(z_1-z_3)]$,因$[(z_3-z_1)/(z_2-z_1)][(z_1-z_2)/(z_3-z_2)][(z_2-z_3)/(z_1-z_3)]=-1$,故 $\mathrm{Arg}[(z_3-z_1)/(z_2-z_1)]+\mathrm{Arg}[(z_1-z_2)/(z_3-z_2)]+\mathrm{Arg}[(z_2-z_3)/(z_1-z_3)]=\pi+2k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.又因上述三个内角的值都是小于 $\pi$ 的正数,从而有 $0<\angle z_1+\angle z_2+\angle z_3<3\pi$,所以在上述多值等式中取主值就得

$$\angle z_1+\angle z_2+\angle z_3=\pi.$$

13*. 求证:等腰三角形底边的中线垂直底边.

**证明** 设 $z_4$ 是等腰三角形$\triangle z_1z_2z_3$ 底边$\overline{z_2,z_3}$上的中点.显然 $z_4=(z_2+z_3)/2$ 且$|z_2-z_1|=|z_3-z_1|$,我们只要证明 $\arg[(z_1-z_4)/(z_2-z_3)]=\pm\pi/2$ 或$(z_1-z_4)/(z_2-z_3)$是纯虚数.事实上

$$\begin{aligned}(z_1-z_4)/(z_2-z_3)&=\frac{1}{2}(z_1-z_2+z_1-z_3)/(z_2-z_3)\\&=\frac{1}{2}(z_1-z_2+z_1-z_3)(\bar{z}_2-\bar{z}_1+\bar{z}_1-\bar{z}_3)/|z_2-z_3|^2,\end{aligned}$$

将分子展开并利用$|z_1-z_2|=|z_1-z_3|$化简,有

$$\frac{z_1-z_4}{z_2-z_3}=\frac{1}{2|z_2-z_3|^2}(z_1\bar{z}_2-z_2\bar{z}_1+z_2\bar{z}_3-z_3\bar{z}_2+z_3\bar{z}_1-z_1\bar{z}_3),$$

故

$$\begin{aligned}&2\mathrm{Re}[(z_1-z_4)/(z_2-z_3)]\\&=(z_1-z_4)/(z_2-z_3)+\overline{(z_1-z_4)/(z_2-z_3)}=0.\end{aligned}$$

所以$(z_1-z_4)/(z_2-z_4)$是纯虚数.

### (五) 求复平面上线段的分点和正多边形的对称中心

14. 设 $z_1$、$z_2$ 是复平面上不同两点.

(1) 求线段$\overline{z_1,z_2}$的中点;

(2) 求把线段$\overline{z_1,z_2}$分割成有向线段$\overrightarrow{z_1,z}$和$\overrightarrow{z,z_2}$的分点 $z$ 使$\overrightarrow{z_1,z}=\lambda(\overrightarrow{z,z_2})$,其中 $\lambda$ 是正实数.试说明当 $-1<\lambda<0$ 和 $-\infty<\lambda<-1$ 时点 $z$ 各在什么位置(图 1-2).

**解** 设点 $z_1=x_1+iy_1$、$z_2=x_2+iy_2$、$z=x+iy$.由平面解析几何的定比分割公式可知

$$x=(x_1+\lambda x_2)/(\lambda+1),\ y=(y_1+\lambda y_2)/(\lambda+1),$$

于是对应的分点 $z$ 为

$$z=(z_1+\lambda z_2)/(1+\lambda) \tag{1.31}$$

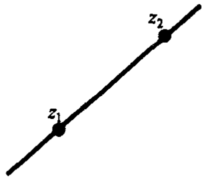


图 1-2

当点 $z$ 在线段$\overline{z_1,z_2}$上时,矢量$\overrightarrow{z_1,z}$和$\overrightarrow{z,z_2}$同向,故这时 $\lambda$ 是正实数.当 $\lambda=1$ 时,可得线段$\overline{z_1,z_2}$的中点公式

$$z=(z_1+z_2)/2 \tag{1.32}$$

当 $z$ 位于有向线段$\overrightarrow{z_1,z_2}$的延长线上时,$\overrightarrow{z_1,z}$和$\overrightarrow{z,z_2}$反向,并且$|\overrightarrow{z_1,z}|>|\overrightarrow{z,z_2}|$,因而$-\infty<\lambda<-1$;

当 $z$ 位于有向线段$\overrightarrow{z_2,z_1}$的延长线上时,$\overrightarrow{z_1,z}$与$\overrightarrow{z,z_2}$也反向,且有$|\overrightarrow{z_1,z}|<|\overrightarrow{z,z_2}|$,所以$-1<\lambda<0$.

15*. 求三角形$\triangle z_1z_2z_3$ 的重心.

**解法(1)** 设$\triangle z_1z_2z_3$ 的重心为 $z_0$,边$\overline{z_1,z_2}$的中点为 $z_4$.由$\overrightarrow{z_4,z_0}=\overrightarrow{z_0,z_3}/2$ 得到

$$z_0=(z_4+z_3/2)/(1+1/2)=(2z_4+z_3)/3,$$

又因
$$z_4=(z_1+z_2)/2,$$
所以
$$z_0=(z_1+z_2+z_3)/3 \tag{1.33}$$

**解法(2)** 由力学知识可知具有单位质量质点的质点系 $z_1$、$z_2$、$z_3$ 的重心就是$\triangle z_1z_2z_3$ 的重心 $z_0$.设 $z_k=x_k+iy_k(k=0,1,2,3)$,有

$$x_0=(x_1+x_2+x_3)/3,\ y_0=(y_1+y_2+y_3)/3,$$

故重心 $z_0=(z_1+z_2+z_3)/3$.

16*. 求以 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 为顶点的正 $n$ 边形的中心.

**解** 由于具有单位质量的 $n$ 个质点$z_1,z_2,\cdots,z_n$ 的质点系的重心就是以这$n$ 个点为顶点的正 $n$ 边形的对称中心$z_0=x_0+iy_0$,即

$$x_0=(x_1+x_2+\cdots+x_n)/n,\ y_0=(y_1+y_2+\cdots+y_n)/n,$$

所以
$$z_0=(z_1+z_2+\cdots+z_n)/n \tag{1.34}$$

### (六) 有关圆内接三角形和圆内接多边形的证明问题

这类问题的解法通常有两种,一种是考虑边相等,这要用到复数模的等式$|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})$;另一种是考虑内角相等,通常用到两个复矢量的夹角表达式$\angle(z_2-z_1,z_3-z_1)=\arg[(z_3-z_1)/(z_2-z_1)]$,它表示矢量$\overrightarrow{z_1,z_2}$旋转到矢量$\overrightarrow{z_1,z_3}$所扫过的角.若是正三角