高职高专“十一五”规划教材

经济应用数学——微积分

JINGJI YINGYONG SHUXUE—WEIJIFEN

沈时仁　张新德　等编

附同步练习册

化学工业出版社

高职高专“十一五”规划教材

经济应用数学
——微积分

沈时仁　张新德　等编

化学工业出版社
·北京·

本书是在充分研究当前我国高职高专大众化发展趋势下的教育现状，认真总结、分析全国高职高专院校微积分教学改革的经验，结合目前财经类、管理类专业微积分课程课时少的特点编写而成。其中基础理论知识以“必需、够用”为原则，突破传统的片面追求理论体系严整性的意识限制，努力凸现高等职业能力培养的本质特征，力争做到教材“小型化”；同时加大了微积分在经济方面的应用，实际教学过程中，可根据情况进行适当的取舍。内容包括函数、极限与连续、导数与微分、一元函数微分学与积分学及其应用。

与本书配套的辅助教材有《经济应用数学——微积分练习册》，教学时可适当选取作为课后练习。《练习册》后面附有模拟试题，以供学生在期末复习时使用。

本书可作为高职高专经济类、管理类各专业少学时微积分教材，也可作为专科水平的成人教育用书。

图书在版编目（CIP）数据

经济应用数学——微积分/沈时仁，张新德等编．—北京：化学工业出版社，2007.7
高职高专“十一五”规划教材
ISBN 978-7-122-00840-4

Ⅰ．经… Ⅱ．①沈…②张… Ⅲ．①经济数学-高等学校：技术学院-教材②微积分-高等学校：技术学院-教材 Ⅳ．F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 107448 号

责任编辑：于 卉 陆雄鹰　　　　文字编辑：颜克俭
责任校对：徐贞珍　　　　装帧设计：于 兵

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号 邮政编码 100011）
印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司
装　　订：三河市宇新装订厂
787mm×1092mm 1/16 印张 9¼ 字数 225 千字 2007 年 8 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686） 售后服务：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：17.00 元（含练习册）

前　言

近几年来，随着高等职业教育的不断发展，相应的教材建设也不断推进，以适应教育教学工作的需要。根据高职高专经贸类、管理类专业对经济数学——微积分的要求和专业特点，以及我们长期从事该课程教学工作积累的经验，也作为优秀教材建设项目的成果之一，编写了本教材。

根据教育部关于高职高专人才培养目标的要求，基础理论知识以“必需、够用”为度，强调实践性和应用性，编写时作了充分的考虑，因此本教材具有下列特点。

1. 针对性：教材内容的深度和广度充分考虑了高职高专学生的基础知识掌握情况，根据经贸类、管理类的专业对经济数学的要求，对内容进行了必要的整合，能够较好地适用于这类专业学生学习经济数学——微积分课程的需要。

2. 实用性：学以致用是编写本教材的一个基本原则。因此教材中增加了较多的应用性内容，特别是增加了许多实用性的例题，注意能力的培养，以便更好地为专业学习服务。

3. 便于教学：教材融入了教师在教学工作过程中长期积累的经验和资料，采取更为直观更易为高职学生接受的方式来处理较难内容，达到深入浅出的效果。同时配套出版了练习册，使教师和学生在学习过程中更加方便，也便于学生自学复习。

本书由沈时仁、张新德、王飞霞、俞兰芳编写。

由于我们的水平有限，书中难免有不妥之处，欢迎读者批评指正。

编者

2007 年 5 月

目　　录

第一章　函数、极限与连续 …… 1
第一节　函数 …… 1
第二节　极限 …… 8
第三节　极限的运算 …… 11
第四节　函数的连续性 …… 17
本章小结 …… 22
习题1 …… 22
习题1参考答案 …… 24
第二章　导数与微分 …… 26
第一节　导数的概念 …… 26
第二节　求导法则和基本运算法则 …… 30
第三节　高阶导数 …… 35
第四节　微分及其在近似计算中的应用 …… 37
本章小结 …… 41
习题2 …… 43
习题2参考答案 …… 45
第三章　导数的应用 …… 47
第一节　中值定理 …… 47
第二节　洛必达法则 …… 48
第三节　函数的增减性 …… 52
第四节　函数的极值 …… 53
第五节　函数的最值及应用 …… 56
第六节　边际与弹性 …… 58
本章小结 …… 62
习题3 …… 62
习题3参考答案 …… 65
第四章　积分 …… 67
第一节　不定积分 …… 67
第二节　定积分 …… 84
第三节　无穷区间上的广义积分 …… 96
第四节　定积分的应用 …… 97
本章小结 …… 102
习题4 …… 103
习题参考答案 …… 105
参考文献 …… 108

第一章　函数、极限与连续

函数是高等数学研究的主要对象，极限概念是微积分学中最基本的概念之一，极限方法是微积分学的基本分析方法．本章在初等数学中关于函数知识的基础上进一步讨论函数，给出极限、无穷小、无穷大等概念，建立极限运算法则，并在极限概念的基础上讨论函数的连续性．

第一节　函　　数

一、区间与邻域

区间是高等数学中常用的实数集合，现将各种区间的定义、名称、符号叙述如下.

设 a、b 都是实数，且 $a<b$.

满足 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数 x 的集合称为闭区间，记作 $[a,b]$；满足 $a\leqslant x<b$（或者 $a<x\leqslant b$）的实数 x 的集合称为半开半闭区间，记作 $[a,b)$（或者 $(a,b]$）. 上述四种区间统称为有界区间，$b-a$ 称为区间的长．

实数集 R 也可用区间表示为 $(-\infty,+\infty)$，满足 $x\geqslant a$（或者 $x>a$）的实数的集合，记作 $[a,+\infty)$ [或者 $(a,+\infty)$]，满足 $x\leqslant b$（$x<b$）的实数的集合，记作 $(-\infty,b]$ [或者 $(-\infty,b)$]. 上述区间都是无限区间.

在高等数学中经常要用到邻域的概念．开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 或实数集 $\{x \| x-x_0|<\delta,\delta>0\}$ 称为点 x_0 的 δ 邻域，或称为点 x_0 的邻域，记作 $U(x_0,\delta)$，如图 1-1 所示，x_0 是邻域的中心，δ 称为邻域的半径．

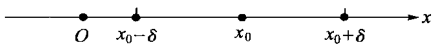

图 1-1

如果在 x_0 的 δ 邻域中，“挖去”点 x_0，则集合 $\{x|0<|x-x_0|<\delta,\delta>0\}$，称为 x_0 的 δ 去心邻域，或称为 x_0 的去心邻域，记作 $U^0(x_0,\delta)$.

例 1　设 $A=\{x|x^2+x-2=0\}$，$B=\{x|x^2-4=0\}$，求 $A\cup B$.

解　由于 $A=\{x|x^2+x-2=0\}=\{1,-2\}$

$$B=\{x|x^2-4=0\}=\{2,-2\}$$

所以 $A\cup B=\{1,-2\}\cup\{2,-2\}=\{-2,1,2\}$

例 2　设 $A=\{x\mid x<4\}$，$B=\{x\mid x^2-2x-3\geqslant 0\}$，求 $A\cap B$.

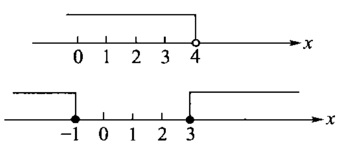

图 1-2

解　如图 1-2.

因为
$$B=\{x|x^2-2x-3\geqslant 0\}=\{x|x\geqslant 3 \text{ 或 } x\leqslant -1\}$$
$$=\{x|x\geqslant 3\}\cup\{x|x\leqslant -1\}$$

所以
$$\begin{aligned}A\cap B&=\{x\mid x<4\}\cap(\{x\mid x\geqslant 3\}\cup\{x\mid x\leqslant -1\})\\&=(\{x\mid x<4\}\cap\{x\mid x\geqslant 3)\cup(\{x\mid x<4\}\cap\{x\mid x\leqslant -1\})\\&=\{x\mid 3\leqslant x<4\}\cup\{x\mid x\leqslant -1\}\\&=\{x\mid x\leqslant -1\text{ 或 }3\leqslant x<4\}\end{aligned}$$

二、函数概念

先考察几个实例.

例 3 出租车公司规定，出租车收费标准如下：每千米 0.5 元，不足 1 千米按 1 千米计算，5 千米以内按 5 千米计算，当里程数在 50 千米以内时，租金 M（元）与里程数 x（千米）的对应关系为：

$$\begin{aligned}&M=0.5\times 5=2.5 && 0<x\leqslant 5,\\&M=0.5\times 6=3 && 5<x\leqslant 6,\\&M=0.5\times 7=3.5 && 6<x\leqslant 7,\\&\cdots\cdots\\&M=0.5\times 50=25 && 49<x\leqslant 50.\end{aligned}$$

当里程数在（0,50）内任取一值时，就要得到租金 M 的唯一一个对应值.

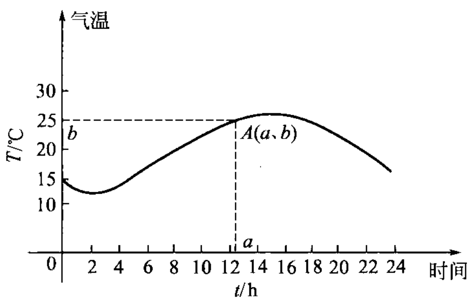

图 1-3

例 4 气温曲线用横坐标表示时间 t，用纵坐标表示气温 T℃，若某地某日从 0 时到 24 时的气温曲线如图 1-3，则对 0 时到 24 时中间的任意时间 t，过 t 作 t 轴的垂线与气温曲线交于点（t，T），于是得到时间 t 对应唯一个温度 T，这条气温曲线就给出了 t 与 T 的对应法则.

例 5 对任意 $x\in R$，都对应唯一一个数 $\sin x$，设 $y=\sin x$，则 x 与 y 的对应法则可表示为：

$$x\to y=\sin x$$

例 6 对任意自然数 $n\in N$，都对应唯一一个数，设 $a_n=\dfrac{1}{n}$，则 n 与 a_n 的对应法则表示为：

$$n\to a_n=\frac{1}{n}$$

上面列举的例子，它们的实际意义和对应法则完全不同. 但是从数学角度看，它们却有一个共同的属性：有两个数集和一个对应法则. 对其中一个数集的任意一个数，按照对应法则，都对应另一个数集中的唯一一个数，于是我们有下面的函数概念.

定义 1.1 设 D 是一个给定的非空实数集合，如果对于 D 中的任意一个数 x，按照某个确定的对应法则 f，都有唯一的一个数 y 与之对应，则称对应法则 f 是定义在数集 D 上的一个函数. 记作：

$$y=f(x),\ x\in D$$

其中，x 称为自变量，y 称为因变量，自变量 x 的取值范围 D 称为函数的定义域. 对于每一个 $x\in D$，对应的 y 称为函数 f 在 x 处的值，简称函数值，当 x 取遍 D 的各个数值时，

对应数值的全体组成的数集 $W=\{y|y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的值域.

根据函数的定义，读者不难看出，上述所列几个例子都是函数.

函数的定义域和对应法则是函数的两个要素，函数的定义域是使这一“式子”有意义的所有实数 x 的集合.

例如，由式子 $y=\sqrt{1-x^2}$ 给定的函数，定义域应该是使 $\sqrt{1-x^2}$ 意义的所有实数 x 的集合，即 $D=[-1,1]$.

在实际问题中，函数的定义域还要受实际意义的制约.

函数的对应法则要用数学式子表示，如例 5、例 6 也可用图像给出，如例 4 在微积分中还有这样的函数，一个函数在其定义域的不同部分用不同的数学式子表示，这种函数叫做分段表示函数，例如：

$$f(x)=\begin{cases}x-1, & x\in(-\infty,0)\\0, & x=0\\x^2+1, & x\in(0,+\infty)\end{cases}$$

是一个分段表示函数.

例 7 租金 M 与里程数 x 的函数关系也是分段表示函数.

$$M=\begin{cases}2.5, & 0<x\leqslant 5\\3, & 5<x\leqslant 6\\\cdots & \cdots\\25, & 49<x\leqslant 50\end{cases}$$

三、函数的几种特性

1. 函数的奇偶性

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称（即如果 $x\in D$，那么 $-x\in D$），如果对于任意的 $x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$，则 $f(x)$ 称为偶函数，如果对于任意的 $x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

在平面直角坐标系中，偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于原点对称.

例 8 判别下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ (2) $f(x)=x^3+1$

解 (1) 因为 $f(-x)=\dfrac{1}{1+(-x)^2}=\dfrac{1}{1+x^2}=f(x)$

所以 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 是偶函数.

(2) 因为 $f(-x)=(-x)^3+1=-x^3+1$，它既不等于 $f(x)=x^3+1$，也不等于 $-f(x)=-1-x^3$，所以 $f(x)=x^3+1$ 是非奇非偶函数.

2. 函数的单调性

定义 1.3 如果函数 $y=f(x)$ 对于区间 (a,b) 内的任意两点 x_1、x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$[或者 $f(x_1)>f(x_2)$]，则称函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加（或单调减少）.

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 单调增加或者单调减少，则称区间 (a,b) 为 $f(x)$

的单调区间，$y=f(x)$称为此区间上的单调函数．

例如，$y=x^2$在（$-\infty,0$）上单调减少，在（$0,+\infty$）上单调增加，但在（$-\infty,+\infty$）上不是单调函数．

3. 函数的周期性

定义 1.4 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为数集 D，若存在一个常数 $T\neq 0$，对于任意 $x\in D$，都有 $x\pm T\in D$，并且使

$$f(x)=f(x\pm T)$$

成立，则称 $y=f(x)$ 为周期函数，其中 T 称为 $f(x)$ 的周期．习惯上，函数的周期是指它的最小正周期．

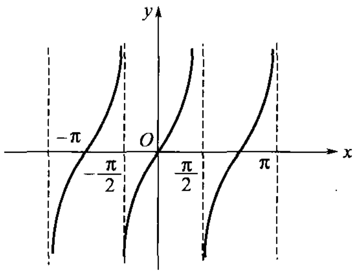

图 1-4

例如，$y=\sin x$、$y=\cos x$ 都是周期为 2π 的周期函数，而 $y=\tan x$、$y=\cot x$ 都是周期为 π 的周期函数．

周期函数图像的特点是：只要描出它在一个周期内的图像，然后将此图像一个周期一个周期地向左、右平移，就可得到该周期函数的整个图像．

例如，$y=\tan x$ 的图像如图 1-4 所示．

4. 函数的有界性

定义 1.5 设函数 $y=f(x)$在区间（a,b）内有定义，如果存在一个常数 $M>0$，使得对于任意 $x\in(a,b)$都有$|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在（a,b）有界，也称 $f(x)$ 是（a,b）上的有界函数，否则称函数 $y=f(x)$ 在（a,b）内无界，也称 $f(x)$ 是（a,b）上的无界函数. 注意，上述区间（a,b）可以是整个定义域，也可以是定义域的一部分，一般不指明区间（a,b）时，则指函数的整个定义域．

例如，因为对任何实数 x，恒有$|\sin x|\leqslant 1$，所以 $y=\sin x$ 在其定义域（$-\infty,+\infty$）内有界．

应该看到函数的有界性与 x 取值区间有关，例如，函数 $y=\frac{1}{x}$在（$0,1$）上是无界的，但它在（$1,+\infty$）上都是有界的．

有界函数的几何特征是：它的图像介于直线 $y=-M$ 和 $y=M$ 之间．

四、复合函数与反函数

1. 复合函数

在实际问题中，有时两个变量之间的联系并不是直接的，而是通过另一个变量联系的. 例如，出租汽车的车费 R 是里程 S 的函数，里程 S 又是时间 t 的函数，因此，车费 R 通过 S 也是时间 t 的函数. 一般的，我们有如下定义．

定义 1.6 设 $y=f(u)$，而 $u=\varphi(x)$. 如果函数 $\varphi(x)$ 的值域包含在函数 $y=f(u)$ 的定义域内，那么 y 通过 u 的联系，也是 x 的函数. 我们称这样的函数是由函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$复合而成的函数，简称复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$，其中 u 叫做中间变量．

例如，由函数 $y=\ln u$ 与 $u=1-x$ 复合而成的复合函数为 $y=\ln(1-x)$.

为了使 $u=1-x$ 的值域包含在 $y=\ln u$ 的定义域（$0,+\infty$）之内，必须有 $1-x>0$，即 $x\in(-\infty,1)$. 所以复合函数 $y=\ln(1-x)$ 的定义域是（$-\infty,1$）．

复合函数不仅可以由两个函数复合而成，也可以由两个以上的函数复合而成．

例如，$y=\arccos u$，$u=\sqrt{v}$，$v=x^2+1$ 可复合成复合函数 $y=\arccos\sqrt{1+x^2}$，这里的 u、v 都称为中间变量．

利用复合函数的概念，可以将一个较复杂的函数看成是几个简单函数复合而成．

例 9　指出下列函数由哪些函数复合而成的？

（1）$y=\mathrm{e}^{-x}$　（2）$y=\dfrac{1}{\arctan 3x}$　（3）$y=\cos^2(x^2+1)$

解　（1）$y=\mathrm{e}^{-x}$是由 $y=\mathrm{e}^u$，$u=-x$ 复合而成；

（2）$y=\dfrac{1}{\arctan 3x}$是由 $y=\dfrac{1}{u}$，$u=\arctan v$，$v=3x$ 复合而成；

（3）$y=\cos^2(x^2+1)$是由 $y=u^2$，$u=\cos v$，$v=x^2+1$ 复合而成．

应当指出，并不是任何两个函数都可以复合为一个新的函数，例如，由

$y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 复合而成的函数，$y=\arcsin(2+x^2)$就没有意义，因为对于任何 x 的值，u 的值都不在 $y=\arcsin u$ 的定义域 $[-1,1]$ 之内．

2. 反函数

在函数关系中，自变量和因变量的地位往往是相对的，可以把任意一个变量看成是自变量或因变量．例如，在自由落体运动中，可以将距离 S 表示为时间 t 的函数：$S=\dfrac{1}{2}gt^2$．如果将问题反过来，知道下落的距离 S，求下落的时间 t，则有 $t=\sqrt{2S/g}$．这时，称后一函数是前一函数的反函数．

定义 1.7　设 $y=f(x)$ 是定义在 D 上的一个函数，值域为 W，如果对于每一个 $y\in W$，都有唯一确定的 $x\in D$，满足 $f(x)=y$，则这时 x 也是 y 的函数，称为 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$，原来的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数．

由反函数的定义可知，反函数的定义域是直接函数的值域，反函数的值域是直接函数的定义域．

习惯上常用 x 表示自变量，y 表示因变量．因此把反函数 $x=f^{-1}(y)$ 仍记作 $y=f^{-1}(x)$ ．

因为 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的关系是 x 与 y 互换，所以它们的图像关于直线 $y=x$ 对称，如图 1-5 所示.

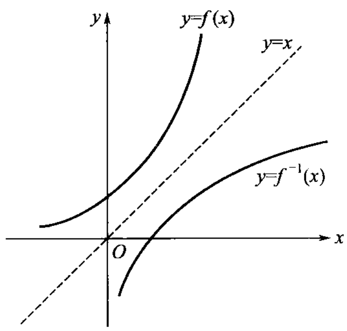

图 1-5

应该指出，并不是所有的函数都有反函数．例如，$y=C$（C 是常数）就没有反函数．

例 10　求 $y=x^2$（$x\geqslant 0$）的反函数．

解　由 $y=x^2$解得 $x=\sqrt{y}$，再将式中的 x 换成 y 得反函数为 $y=\sqrt{x}$（$x\geqslant 0$).

五、初等函数

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数都称为基本初等函数．

这些函数在中学都已学过，现简要复习一下．

1. 常数函数 $y=C$

它的定义域是（$-\infty,+\infty$），图形是垂直于 y 轴的直线．如图 1-6 所示．

2. 幂函数 $y=x^{\mu}$（μ 为实数）

它的定义域随 μ 的不同而不同，但不论 μ 为何实数，$y=x^{\mu}$ 在（$0,+\infty$）内总有定义，并且图形都通过点（1,1）．

例如，$y=x^2$ 的定义域为（$-\infty,+\infty$）；$y=x^{\frac{1}{2}}$ 的定义域为 $[0,+\infty)$．图形如图1-7所示.

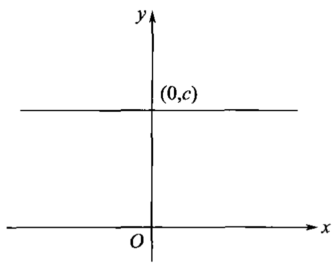

图 1-6

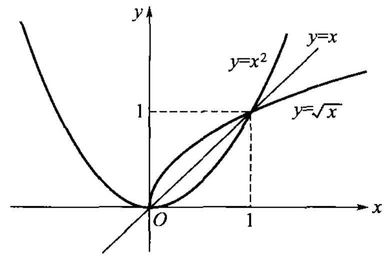

图 1-7

$y=x^{-2}$ 的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，图形关于原点对称，如图 1-8 所示．

3. 指数函数 $y=a^x$（$a>0$，$a\neq1$）

它的定义域是（$-\infty,+\infty$），值域为（$0,+\infty$），都通过点（0,1）. 当 $a>1$，函数单调增加，当 $0<a<1$ 时，函数单调减少，如图 1-9 所示.

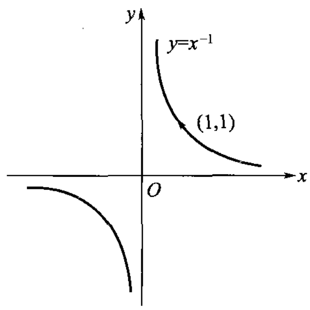

图 1-8

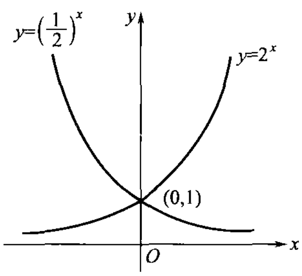

图 1-9

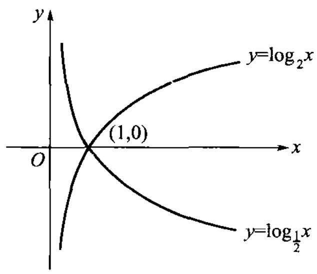

图 1-10

4. 对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$，$a\neq1$）

它的定义域为（$0,+\infty$），都通过（1,0），当 $a>1$ 时，函数单调增加，当 $0<a<1$ 时，函数单调减少，如图 1-10 所示．

对数函数与指数函数互为反函数．

5. 三角函数

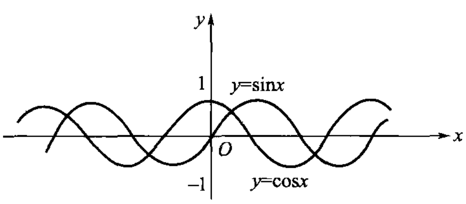

图 1-11

$y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 的定义域为（$-\infty,+\infty$），周期都是 2π.

因为 $\sin(-x)=-\sin x$，$\cos(-x)=\cos x$，所以 $y=\sin x$ 是奇函数，$y=\cos x$ 是偶函数，又因为 $|\sin x|\leqslant1$，$|\cos x|\leqslant1$，所以它们都是有界函数，如图 1-11 所示．

$y=\tan x$ 的定义域为$\{x|x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z\}$，$y=\cot x$ 的定义域为 $\{x|x\neq k\pi,k\in Z\}$，它们的周期都是 π，都是奇函数，如图 1-12 和图 1-13 所示.

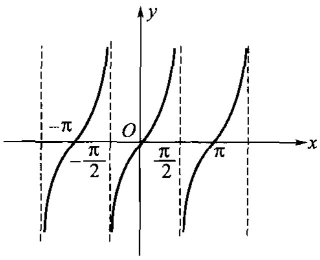

图 1-12

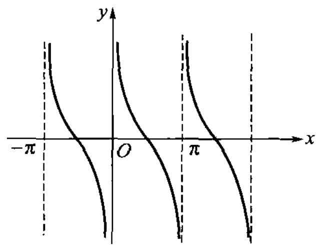

图 1-13

6. 反三角函数

$y=\arcsin x$ 是 $y=\sin x$ 在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的反函数，定义域是 $[-1,1]$，值域是$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，在定义域上单调增加，如图 1-14 所示.

$y=\arccos x$ 是 $y=\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上的反函数，定义域是 $[-1,1]$，值域是 $[0,\pi]$，在定义域上单调减少，如图 1-15 所示.

$y=\arctan x$ 是 $y=\tan x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上的反函数，定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，在定义域上单调增加，如图 1-16 所示.

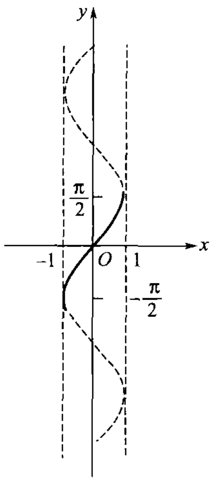

图 1-14

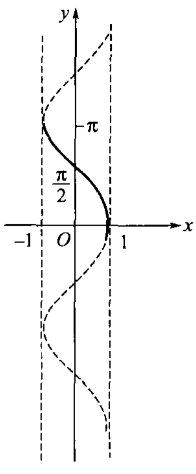

图 1-15

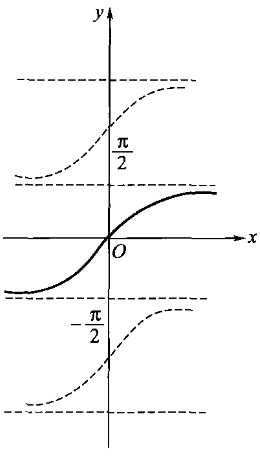

图 1-16

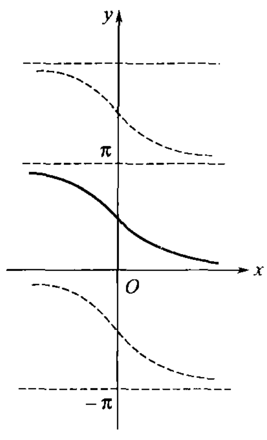

图 1-17

$y=\text{arccot}\, x$ 是 $y=\cot x$ 在 $(0,\pi)$ 上的反函数，定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是 $(0,\pi)$，在定义域上单调减少，如图 1-17 所示.

由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合运算所构成的函数称为初等函数.

第二节 极 限

一、数列的极限

以自然数 n 为自变量的函数 $x_n=f(n)$，把它的函数值按自变量 n 增大的顺序写出来：

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots$$

这样的一列数称为数列，记作 $\{x_n\}$，数列中的每个数称为数列的项，x_n称为数列的第 n 项，也称为一般项或通项.

例如，

(1) $\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots,\ \frac{1}{2^n},\ \cdots$；

(2) $2,\ \frac{1}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{3}{4},\ \cdots,\ \frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\ \cdots$

都是数列的例子.

将上述两数列的各项用数轴上的对应点表示，可以看出，当 n 无限增大时，数列 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$在数轴上的对应点从原点的右侧无限趋近于 0，则数 0 称为数列 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$当 $n\to\infty$时的极限；数列$\left\{\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}\right\}$在数轴上的对应点从 $x=1$ 的左右两侧无限趋近于 1，则数 1 称为数列$\left\{\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}\right\}$当$n\to\infty$时的极限. 一般论述如下.

定义 1.8 对于数列 $\{x_n\}$，如果当 n 无限增大时，x_n的值无限趋近于常数 A，则称 A 是数列 $\{x_n\}$ 当 $n\to\infty$时的极限，记为：

$$\lim_{n\to\infty} x_n=A \text{ 或者 } x_n\to A\ (n\to\infty)$$

此时也称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A，并称 $\{x_n\}$ 为收敛数列. 如果极限不存在，则称该数列是发散数列.

对于数列 (1) 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$，数列 (2) 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1$.

例 11 观察下列数列的变化趋势，哪些是收敛数列？哪些是发散数列？并写出收敛数列的极限.

(1) $x_n=\frac{1}{3^n}\quad (n=1,2,3,\cdots)$；

(2) $x_n=2+(-1)^n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$.

解 将数列 (1) (2) 列于表 1-1.

表 1-1

n	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
$\frac{1}{3^n}$	0.3333	0.1111	0.0370	0.0123	0.0041	0.0014	$\cdots$
$2+(-1)^n$	1	3	1	3	1	3	$\cdots$

从表 1-1 中可以看出，当 $n\to\infty$ 时，数列 $\left\{\frac{1}{3^n}\right\}$ 是收敛数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}=0$，数列 $\{2+(-1)^n\}$ 的值交替取 1 和 3，不能无限趋近于一个常数，所以是发散的．

下面介绍收敛数列的重要性质．为此，先给出数列有界的概念．

定义 1.9　对于数列 $\{x_n\}$，如果存在正数 M，使得对于一切 x_n，都满足不等式

$$|x_n|\leqslant M$$

则称数列 $\{x_n\}$ 是有界的；如果这样的正数 M 不存在，则称数列 $\{x_n\}$ 是无界的．

例如，数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 是有界的，因为取 M 为大于等于 1 的任何数时，对一切 n，都有 $\left|\frac{1}{n}\right|\leqslant M$ 成立．数列 $\{n\}$ 是无界的，因为无论怎样大的正数 M，只要 $n>M$，就有 $|n|>M$. 在数轴上，一个有界数列的所有点都落在有限区间 $[-M,M]$ 之内．

定理 1.1　收敛数列一定是有界数列．

这个定理也可说成是：无界的数列一定是发散的．这给判定数列的敛、散性提供了一个有效的方法．应该注意的是：如果数列 $\{x_n\}$ 有界，并不能判定 $\{x_n\}$ 一定收敛．例如，$\{2+(-1)^n\}$ 有界，但它发散．因此，数列有界是数列发散的必要条件，但不是充分条件．

二、函数的极限

1. $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

例 12　函数 $f(x)=\frac{1}{x}$，当 $|x|$ 无限增大时，它所对应的函数值无限地趋向于 0，这时，我们就称 x 趋向于无穷大时，$f(x)$ 以 0 为极限．

定义 1.10　设函数 $f(x)$ 对于绝对值无论怎样大的 x 值，都是有定义的. 如果当 $|x|$ 无限增大时，对应的函数值 $f(x)$ 无限趋近于某一常数 A，则称 A 为 $f(x)$ 当 x 趋向于无穷大时的极限，记作：

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或者 } f(x)\to A\ (x\to\infty)$$

例如，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

定义 1.11　设函数 $f(x)$ 对于无论怎样大的 x 的正值都是有定义的，如果当 x 只取正值无限增大时，对应的函数值 $f(x)$ 无限趋近于某一常数 A，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 x 趋向于正无穷大时的极限，记作：

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$$

定义 1.12　设函数 $f(x)$ 对于无论怎样小的 x 的负值都是有定义的，如果当 x 只取负值，且 $|x|$ 无限增大时，对应的函数值 $f(x)$ 无限趋近于某一常数 A，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 x 趋向于负无穷大时的极限，记作：

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A$$

例如，由图 1-16 可以看出：

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$$

数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=A$ 与函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 的关系如何呢？因为在 $n\to\infty$ 的过程

中，n 取正整数，在 $x\to+\infty$ 的过程中，包含 x 取正整数。所以，$n\to\infty$ 是 $x\to+\infty$ 的特殊情况．即有：

定理 1.2 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 成立，则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=A$.

2. $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限

现在讨论当 x 无限趋近于某一确定的实数 x_0（但 $x\neq x_0$）时，函数 $f(x)$ 的变化趋势．

考查函数 $f(x)=x+1$，当 x 无限趋近于 1 时，函数值无限趋近于常数 2. 函数 $g(x)=\dfrac{2x^2-2}{x-1}$，当 x 趋近于 1 而不等于 1 时，对应的函数值趋近于常数 4.

上面两例的共同点是，当 x 趋近于常数 x_0（但不等于 x_0）时，对应的函数值 $f(x)$ 就趋近于某一常数 A. 于是有定义 1.13 的内容为如下所述.

定义 1.13 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义，如果当 x 无限趋近于 x_0（但不等于 x_0）时，对应的函数值 $f(x)$ 无限趋近于某一常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 x 趋近于 x_0 时的极限．记作：

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \text{ 或者 } f(x)\to A\ (x\to x_0)$$

根据定义 1.13，上例中的函数 $f(x)=\dfrac{2x^2-2}{x-1}$ 在 $x=1$ 处没定义，但当 $x\to1$ 时，$f(x)$ 的极限存在。因此，当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 的极限是否存在，与 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 是否有定义没有关系．

根据极限定义，$\lim\limits_{x\to x_0} c=c$（$c$ 为常数），$\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$

3. 左极限与右极限

在定义 1.13 中给出的 $x\to x_0$，是指自变量 x 从 x_0 的左右两侧都趋近于 x_0. 但是，在某些情况下，我们只需或只能考虑 x 仅从 x_0 的左侧趋近于 x_0（即 x 取小于 x_0 的值趋近于 x_0）记作 $x\to x_0^-$；或者 x 仅从 x_0 的右侧趋近于 x_0（即 x 取大于 x_0 的值趋近于 x_0）记作 $x\to x_0^+$ 的情形．

定义 1.14 如果函数 $f(x)$ 在某个开区间 $(x_0-\delta, x_0)$ 内有定义，当 x 从 x_0 的左侧趋近于 x_0 时，对应的函数值 $f(x)$ 趋近于常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0^-$ 时的左极限．记作：

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A \text{ 或者 } f(x_0-0)=A$$

若函数 $f(x)$ 在某个开区间 $(x_0, x_0+\delta)$ 内有定义，当 x 从 x_0 的右侧趋近于 x_0 时，对应的函数值 $f(x)$ 趋近于常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0^+$ 时的右极限. 记作：

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A \text{ 或者 } f(x_0+0)=A$$

例如，函数

$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\leqslant 0 \\ x, & x\geqslant 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的左、右极限分别为：

$$f(0-0)=\lim_{x\to0^-}(x^2+1)=1$$

$$f(0+0)=\lim_{x\to0^+} x=0$$

因为 x 从 0 的左、右趋近于 0 时，$f(x)$ 的函数值不趋近于同一个常数，所以 $\lim\limits_{x\to0} f(x)$

不存在．

定理 1.3　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充要条件是：$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$

三、无穷小与无穷大

1. 无穷小

定义 1.15　若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=0$，则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时为无穷小．

例如，当 $x\to 0$ 时，函数 x^2，$\sin x$ 都是无穷小；

当 $x\to\infty$时，$\dfrac{1}{x^2+2}$也是无穷小．

无穷小有如下的性质：

性质 1　有限个无穷小的代数和仍是无穷小；

性质 2　有界函数与无穷小的乘积仍是无穷小.

例 13　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

解　因为 $|\sin x|\leqslant 1$，所以 $\sin x$ 是有界函数，而 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，根据性质 2，有 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$. 由于常数函数是有界函数，所以有如下推论：

推论 1　常数与无穷小的乘积是无穷小；

推论 2　有限个无穷小的乘积是无穷小．

定理 1.4　$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A$ 的充要条件是 $f(x)=A+\alpha(x)$，其中，$\alpha(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时为无穷小．

2. 无穷大

定义 1.16　如果当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，$|f(x)|$无限增大，则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时为无穷大，记作 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=\infty$.

例如，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，当 $x\to 0$ 时，$\left|\dfrac{1}{x}\right|$无限增大，所以$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$.

在自变量的同一变化过程中，无穷小与无穷大有如下关系：

定理 1.5　如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=\infty$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{1}{f(x)}=0$；

如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=0$，且 $f(x)\neq 0$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{1}{f(x)}=\infty$.

第三节　极限的运算

在这一节里，主要介绍极限的运算法则和两个重要极限，以及函数极限的运算方法．

一、极限的运算法则

定理 1.6　设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，则：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\cdot B$

(3) 当 $B\neq 0$ 时，有 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\dfrac{A}{B}$

证明 只证定理 1.6 中的 (2)，其他的结论由读者仿照证明．

因为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，由定理 1.4 可知 $f(x)=A+\alpha(x)$，$g(x)=B+\beta(x)$，其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$，所以：

$f(x)\cdot g(x)=[A+\alpha(x)]\cdot[B+\beta(x)]=A\cdot B+[A\cdot\beta(x)+B\cdot\alpha(x)+\alpha(x)\cdot\beta(x)]$

由无穷小的性质知，$\lim\limits_{x\to x_0}[A\cdot\beta(x)+B\cdot\alpha(x)+\alpha(x)\cdot\beta(x)]=0$

再由定理 1.4 可知，$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$

推论 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则

$$\lim_{x\to x_0}cf(x)=c\lim_{x\to x_0}f(x)=c\cdot A\ (c\text{ 为任意常数})$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^n=[\lim_{x\to x_0}f(x)]^n=A^n\quad(n\text{ 为自然数})$$

注意：定理 1.6 及其推论对自变量 x 的其他变化过程，如 $x\to\infty$、$x\to x_0^+$、$x\to x_0^-$、$x\to+\infty$、$x\to-\infty$等都是成立的．

利用上述定理和推论，我们可以从几个简单的函数极限出发，计算一些较复杂的函数极限.

例 14 求$\lim\limits_{x\to 2}(4x^3+x^2+1)$．

解
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}(4x^3+x^2+1)&=\lim_{x\to 2}4x^3+\lim_{x\to 2}x^2+\lim_{x\to 2}1\\&=4(\lim_{x\to 2}x)^3+(\lim_{x\to 2}x)^2+1\\&=4\times 2^3+2^2+1=37\end{aligned}$$

例 15 求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+1}{x-4}$.

解 因为$\lim\limits_{x\to 1}(x^3-3x+1)=(\lim\limits_{x\to 1}x)^3-3\lim\limits_{x\to 1}x+\lim\limits_{x\to 1}1=-1$

$$\lim_{x\to 1}(x-4)=\lim_{x\to 1}x-\lim_{x\to 1}4=-3\neq 0$$

所以由定理 1.6，得$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+1}{x-4}=\dfrac{-1}{-3}=\dfrac{1}{3}$

例 16 求$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+2}{x-3}$.

解 因为$\lim\limits_{x\to 3}(x-3)=0$，$\lim\limits_{x\to 3}(x+2)=5$，

所以$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x+2}=\dfrac{0}{5}=0$，即当 $x\to 3$ 时，$\dfrac{x-3}{x+2}$是无穷小，

由定理 1.5，得$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+2}{x-3}=\infty$

例 17 求$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2+x-12}$.