数学分析讲义

（第三册）

陈天权 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

数学分析讲义

(第三册)

陈天权　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学分析讲义·第三册/陈天权编著. —北京：北京大学出版社，2010. 9

ISBN 978-7-301-17747-1

Ⅰ. 数… Ⅱ. 陈… Ⅲ. 数学分析-高等学校-教材 Ⅳ. O.17

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 174161 号

书　　名：数学分析讲义(第三册)
著名责任者：陈天权　编著
责 任 编 辑：刘　勇
标 准 书 号：ISBN 978-7-301-17747-1/O·0828
出 版 发 行：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址：http://www.pup.cn　电子邮箱：zpup@pup.pku.edu.cn
电　　话：邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752021
出版部 62754962
印 刷 者：北京飞达印刷有限责任公司
经 销 者：新华书店
890 毫米×1240 毫米　A5　12.375 印张　350 千字
2010 年 9 月第 1 版　2010 年 9 月第 1 次印刷
印　　数：0001–4000 册
定　　价：28.00 元

内 容 简 介

本书是作者在清华大学数学科学系(1987—2003)及北京大学数学科学学院(2003—2009)给本科生讲授数学分析课的讲稿的基础上编成的. 一方面, 作者力求以近代数学(集合论, 拓扑, 测度论, 微分流形和微分形式)的语言来介绍数学分析的基本知识, 以使同学尽早熟悉近代数学文献中的表述方式. 另一方面在篇幅允许的范围内, 作者尽可能地介绍数学分析与其他学科(特别是物理学)的联系, 以使同学理解自然现象一直是数学发展的重要源泉. 全书分为三册. 第一册包括: 集合与映射, 实数与复数, 极限, 连续函数类, 一元微分学和一元函数的 Riemann 积分; 第二册包括: 点集拓扑初步, 多元微分学, 测度和积分; 第三册包括: 调和分析初步和相关课题, 复分析初步, 欧氏空间中的微分流形, 重线性代数, 微分形式和欧氏空间中的流形上的积分. 每章都配有丰富的习题, 它除了提供同学训练和熟悉正文中的内容外, 也介绍了许多补充知识.

本书可作为高等院校数学系攻读数学、应用数学、计算数学的本科生数学分析课程的教材或教学参考书, 也可作为需要把数学当做重要工具的同学(例如攻读物理的同学)的教学参考书.

如果读者阅读本书时, 遇到疑难问题, 可与作者联系, 电子邮件地址: tchen@ math. tsinghua.edu.cn

作 者 简 介

陈天权 1959年毕业于北京大学数学力学系. 曾讲授过数学分析, 高等代数, 实变函数, 复变函数, 概率论, 泛函分析等课程. 主要的研究方向是非平衡态统计力学.

目　录

第 11 章　调和分析初步和相关课题 ……1
§11.1　Fourier 级数 ……2
§11.2　Fourier 变换的 L^1-理论 ……6
§11.3　Hermite 函数 ……15
§11.4　Fourier 变换的 L^2-理论 ……24
§11.5　习题 ……29
*§11.6　补充教材一：局部紧度量空间上的积分理论 ……39
11.6.1　$C_0(M)$ 上的正线性泛函 ……40
11.6.2　可积列空间 $\mathcal{L}^1$ ……42
11.6.3　局部紧度量空间上的外测度 ……48
11.6.4　列空间 $\mathcal{L}^1$ 中的元素的实现 ……55
11.6.5　l-可积集 ……61
11.6.6　积分与正线性泛函的关系 ……65
11.6.7　Radon 泛函与 Jordan 分解定理 ……68
11.6.8　Riesz-Kakutani 表示定理 ……70
11.6.9　概率分布的特征函数 ……75
*§11.7　补充教材二：广义函数的初步介绍 ……79
11.7.1　广义函数的定义和例 ……80
11.7.2　广义函数的运算 ……86
11.7.3　广义函数的局部性质 ……93
11.7.4　广义函数的 Fourier 变换 ……100
11.7.5　广义函数在偏微分方程理论上的应用 ……105
§11.8　补充习题 ……111

进一步阅读的参考文献 ··· 121

第 12 章 复分析初步 ··· 122

§12.1 两个微分算子和两个复值的一次微分形式 ··· 122

§12.2 全纯函数 ··· 126

§12.3 留数与 Cauchy 积分公式 ··· 135

§12.4 Taylor 公式和奇点的性质 ··· 143

§12.5 多值映射和用回路积分计算定积分 ··· 154

§12.6 复平面上的 Taylor 级数和 Laurent 级数 ··· 166

§12.7 全纯函数与二元调和函数 ··· 169

§12.8 复平面上的 Γ 函数 ··· 179

§12.9 习题 ··· 188

进一步阅读的参考文献 ··· 215

第 13 章 欧氏空间中的微分流形 ··· 216

§13.1 欧氏空间中微分流形的定义 ··· 216

§13.2 构筑流形的两个方法 ··· 235

§13.3 切空间 ··· 236

§13.4 定向 ··· 245

§13.5 约束条件下的极值问题 ··· 255

§13.6 习题 ··· 258

进一步阅读的参考文献 ··· 266

第 14 章 重线性代数 ··· 267

§14.1 向量与张量 ··· 267

§14.2 交替张量 ··· 272

§14.3 外积 ··· 278

§14.4 坐标变换 ··· 282

§14.5 习题 ··· 287

进一步阅读的参考文献······288

第 15 章 微分形式······289

§15.1 $\mathbf{R}^n$ 上的张量场与微分形式······289

§15.2 外微分算子······291

§15.3 外微分算子与经典场论中的三个微分算子······293

§15.4 回拉······296

§15.5 Poincaré引理······299

§15.6 流形上的张量场······302

§15.7 $\mathbf{R}^n$ 的开集上微分形式的积分······308

§15.8 习题······309

进一步阅读的参考文献······310

第 16 章 欧氏空间中的流形上的积分······311

§16.1 流形的可定向与微分形式······311

§16.2 流形上微分形式的积分······314

§16.3 流形上函数的积分······322

§16.4 Gauss 散度定理及它的应用······335

§16.5 调和函数······337

§16.6 习题······343

*§16.7 补充教材一：Maxwell 电磁理论初步介绍······349

*§16.8 补充教材二：Hodge 星算子 $\star$······355

*§16.9 补充教材三：Maxwell 电磁理论的微分形式表示······362

进一步阅读的参考文献······369

结束语······371

进一步阅读的参考文献······373

参考文献······374

关于以上所列参考文献的说明······377

名词索引······378

第 11 章　调和分析初步和相关课题

在例 10.7.1 中已经说明, 对于任何 $L \in (0, \infty)$ 和 $a \in \mathbf{R}$, 函数列

$$\mathrm{d}_n(x) = L^{-1/2} \exp\left(\frac{2\pi \mathrm{i} n(x-a)}{L}\right), \quad n \in \mathbf{Z}$$

在 $L^2([a, a+L), m; \mathbf{C})$ 中构成一组正交规范基, 其中 m 表示区间 $[a, a+L)$ 上的 Lebesgue 测度. 换言之, 对于任何 $f \in L^2([a, a+L), m; \mathbf{C})$, f 在 Hilbert 空间 $L^2([a, a+L), m; \mathbf{C})]$ 范数的意义下可以写成

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{d}_n(x),$$

其中

$$c_n = \int_a^{a+L} f(x) \overline{\mathrm{d}_n(x)} dx, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

以上 f 的展式中的记号 $\sim$ 表示右端级数在 Hilbert 空间 $L^2([a, a+L), m; \mathbf{C})$ 范数的意义下收敛于 f:

$$\lim_{N \to \infty} \left| f(x) - \sum_{n=-N}^{N} c_n \mathrm{d}_n(x) \right|_{L^2([a,a+L),m;\mathbf{C})} = 0.$$

级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{d}_n(x)$ 称为 f 的 **Fourier级数**. 法国数学家 **Joseph Fourier** 在他的 1807 年递交给法兰西科学院 (未发表) 的报告 *Théorie de la propagation de la Chaleur dans les solides*(固体中热传播的理论) 中为了求解热方程的边值问题引进了 Fourier 级数和 Fourier 积分的概念, 他用冗长的计算并不严谨地得到了函数展成 Fourier 级数时的展开系数 c_n 的公式 (现在称它为 Fourier 系数公式). 应该指出, **D.Bernoulli, d'Alembert, Euler** 和 **Lagrange** 在 Fourier 之前已经研究过周期函数按三角函数展开的问题, 而且 Euler 和 Lagrange 已经在自己的工作中接触过如今获得 Fourier 系数 c_n 公式常用的三角函数

正交的概念, 但 Fourier 是第一个系统地利用 Fourier 系数公式研究了函数的 Fourier 级数的应用数学家. 对于大量具体的函数 f, Fourier 发现: f 的 Fourier 级数的部分和在除去个别点外的所有点处的确非常接近 f. 鉴于 Fourier 级数及 Fourier 积分的研究对数学分析理论的发展与数学应用范围的开拓有着重大影响, 这应该说是 Fouier 的伟大贡献. Fourier 的工作发表后, **Poisson, Cauchy** 和 **Harnack** 等做了不少工作试图证明 f 的 Fourier 级数收敛于 f 的一般定理, 但只对于较狭窄的一个函数类取得了成功. 直到 1829 年, 德国数学家 **Dirichlet** 才对很一般的一个函数类中的 f 严格地证明了 f 的 Fourier 级数收敛于 f 的一般定理. 后来 **Riemann** 和 **Cantor** 等建立了一般的 Fourier 级数理论. 法国数学家 **Poisson** 和匈牙利数学家 **Fejér** 等还发展了发散的 Fourier 级数在某种求和法的意义下收敛于 f 的理论. 到了 20 世纪 30 年代, 苏联数学家 **Kolmogorov** 给出了一个可积函数 f, 它的 Fourier 级数处处不收敛于 f. 20 世纪 60 年代, 瑞典数学家 **Carleson** 证明了: 当 $p>1$ 时, L^p 中任何函数 f 的 Fourier 级数几乎处处收敛于 f. 这些属于近代调和分析技巧性很高的内容本讲义就不涉及了. 本章的正文将简述一个攻读数学的本科生应该知道的 Fourier 级数和 Fourier 积分理论的梗概. 本章的两个附录将分别介绍局部紧度量空间上的积分理论和广义函数理论的梗概以及它们与 Fourier 变换之间的联系.

Fourier 级数及 Fourier 变换的理论常称为调和分析.

§11.1 Fourier 级数

函数列 $\{\mathrm{d}_n(x)\}(n\in\mathbf{Z})$ 的正交规范性的证明只不过是简单的定积分计算. 它在 $L^2([a,a+L),m;\mathbf{C})$ 中构成一组正交规范基的证明可参看 §10.9 的第 13 题. 它的证明主要分成两个部分:

(1) 空间 $C([a,a+L];\mathbf{C})$ 中的以 L 为周期的周期函数构成的子空间在空间 $L^2([a,a+L),m;\mathbf{C})$ 中稠密 (相当于 §10.9 第 13 题的 (i),(ii),(iii) 和 (vi));

(2) 上述函数列的 (有限) 线性组合全体在以 L 为周期的周期函数

构成的空间中稠密. 这就是 Weierstrass 关于周期连续函数能用三角多项式一致逼近的定理, 它是 (在第七章中的)Stone-Weierstrass 逼近定理的推论.

下面我们用另外的办法证明上述第二部分 (2). 为了书写方便, 在本小节中除非作出相反的申明, 我们总是假设 $a=0$, $L=1$. 一般情形的证明方法可以相似地获得.

定理 11.1.1 对于 $m\in\mathbf{Z}$ 和 $0\leqslant x\leqslant 1$, 记

$$\mathbf{e}_m(x)=\exp(2\pi i m x),\quad m\in\mathbf{Z}.$$

设 ψ 是 $[0,1]$ 上的以 1 为周期 (即满足条件: $\psi(0)=\psi(1)$) 的连续周期函数. 对于 $0\leqslant r<1$, $0\leqslant x\leqslant 1$, 记

$$\psi_r(x)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} r^{|m|}(\psi,\mathbf{e}_m)_{L^2_{[0,1]}}\mathbf{e}_m(x), \tag{11.1.1}$$

则对于一切 $r\in[0,1)$, 上式右端的级数在 $x\in[0,1]$ 上一致收敛, 因而 $\psi_r(x)$ 是连续周期函数, 而且当 $r\to 1-0$ 时, ψ_r 关于 $x\in[0,1]$ 一致收敛于 ψ:

$$\lim_{r\to 1-0}|\psi-\psi_r|_{C([0,1],\mathbf{C})}=\lim_{r\to 1-0}\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|\psi(x)-\psi_r(x)|=0. \tag{11.1.1$'$}$$

注 易见, $\forall m\in\mathbf{Z}(\lim\limits_{r\to 1-0} r^{|m|}=1)$, 故 (11.1.1)$'$ 似乎可以写成

$$\psi(x)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(\psi,\mathbf{e}_m)_{L^2_{[0,1]}}\mathbf{e}_m(x). \tag{11.1.1$''$}$$

在一般情形, 我们只能得到 (11.1.1)$'$, 而 (11.1.1)$''$ 未必成立. 但若 (11.1.1)$''$ 右端的级数收敛, 则由 §3.7 第 32 题的 (iii), (11.1.1)$'$ 便是 (11.1.1)$''$ 的推论了. 故 (11.1.1)$'$ 比 (11.1.1)$''$ 弱. 当 (11.1.1)$'$ 成立时, 我们说, Fourier 级数 $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}(\psi,\mathbf{e}_m)_{L^2_{[0,1]}}\mathbf{e}_m(x)$ 在 **Poisson 求和的意义下**有 (广义) 和 $\psi(x)$.

证 因 $|\mathbf{e}_m(x)|_{L^2_{[0,1]}}=1$, 又由 Cauchy-Schwarz 不等式,

$$|(\psi,\mathbf{e}_m)_{L^2_{[0,1]}}|\leqslant|\psi|_{L^2_{[0,1]}}|\mathbf{e}_m(x)|_{L^2_{[0,1]}}=|\psi|_{L^2_{[0,1]}},$$

又因 $\forall x \in [0,1](|\mathbf{e}_m(x)|=1)$, 我们有

$$|r^{|m|}(\psi, \mathbf{e}_m)_{L^2_{[0,1]}}\mathbf{e}_m(x)| \leqslant |\psi|_{L^2_{[0,1]}}|r^{|m|}|,$$

由 Weierstrass 优势级数判别法, 对于给定的 $r \in [0,1)$, (11.1.1) 的右端的级数对于 $x \in [0,1]$ 是一致收敛的. 所以, 对于给定的 $r \in [0,1)$, (11.1.1) 的右端的级数代表一个 $[0,1]$ 上的以 1 为周期的连续函数. 为了证明当 $r \to 1-0$ 时, $\psi_r(x)$ 关于 $x \in [0,1]$ 一致收敛于 ψ, 我们作如下计算:

$$\begin{aligned}
\psi_r(x) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} r^{|m|}(\psi, \mathbf{e}_m)_{L^2_{[0,1]}}\mathbf{e}_m(x)\\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} r^{|m|}\int_0^1 \psi(y)\exp(-2\pi \mathrm{i} m y)dy\exp(2\pi \mathrm{i} m x)\\
&= \int_0^1 \psi(y)\left[\sum_{m=0}^{\infty} r^m \exp(2\pi \mathrm{i} m(x-y))\right]dy\\
&\quad + \int_0^1 \psi(y)\left[\sum_{m=1}^{\infty} r^m \exp(-2\pi \mathrm{i} m(x-y))\right]dy\\
&= \int_0^1 \psi(y)\left[\frac{1}{1-r\exp(2\pi \mathrm{i}(x-y))} + \frac{r\exp(-2\pi \mathrm{i}(x-y)}{1-r\exp(-2\pi \mathrm{i}(x-y))}\right]dy\\
&= \int_0^1 \psi(y)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(2\pi(x-y))+r^2}dy\\
&= \int_0^1 \psi(y)P_r(x-y)dy = \int_0^1 \psi(x-y)P_r(y)dy, \qquad (11.1.2)
\end{aligned}$$

其中

$$P_r(u) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(2\pi u)+r^2}. \qquad (11.1.3)$$

(在 (11.1.2) 的第三个等式的推导时, 我们用了第三个等式的右边的两个方括弧中的级数相对于 $y \in [0,1]$ 是一致收敛的事实. 而最后一个等式的推导中, 我们用了 ψ 和 P_r 皆为以 1 为周期的周期函数这个事实.) 函数 $P_r(u)$ 常称为 **Poisson 核**(有时, 也将 $P_r(x-y)$ 称为 **Poisson 核**). 易见

$$P_r(u) = \frac{1-r^2}{(1-r)^2+2r(1-\cos(2\pi u))}. \qquad (11.1.4)$$

Poisson 核有以下三条重要性质:

(1) 当 $0 \leqslant r < 1, u \in \mathbf{R}$ 时, $P_r(u) > 0$, 且 $P_r(u)$ 是个以 1 为周期的周期函数;

(2) $\int_0^1 P_r(u)du = 1$;

(3) 对于任何 $\delta \in (0, 1/2)$, 有

$$\lim_{r\to 1-0} \sup_{\delta\leqslant u\leqslant 1-\delta} P_r(u) = 0.$$

性质 (1) 可由方程 (11.1.3) 看出. 让 $\psi = \mathbf{e}_0 \equiv 1$ 代入方程 (11.1.2), 便得性质 (2). 性质 (3) 可由 $P_r(u)$ 的定义 (11.1.4) 直接获得.

因 ψ 是 $\mathbf{R}$ 上的以 1 为周期的连续周期函数, 换言之, ψ 可以看成是商空间 $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ 上的连续函数. 常常把 $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ 看成 $[0,1]$, 但约定 $[0,1]$ 的两个端点 0 和 1 是粘在一起的.ψ 在 $[0,1]$ 上是一致连续的, 换言之, 对于任何给定的 $\varepsilon > 0$, 有 $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0, 1/2)$, 使得任何 $x \in [0,1]$ 都有

$$y \in A(\varepsilon) \equiv [0,\delta] \cup [1-\delta, 1] \Longrightarrow |\psi(x-y) - \psi(x)| < \varepsilon. \tag{11.1.5}$$

因此

$$\begin{aligned}
0 \leqslant &\limsup_{r\to 1-0} \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |\psi_r(x) - \psi(x)| \\
= &\limsup_{r\to 1-0} \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} \left| \int_0^1 [\psi(x-y) - \psi(x)] P_r(y)dy \right| \\
\leqslant &\limsup_{r\to 1-0} \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} \int_0^1 |\psi(x-y) - \psi(x)| P_r(y)dy \\
\leqslant &\limsup_{r\to 1-0} \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} \left[\int_{A(\epsilon)} |\psi(x-y) - \psi(x)| P_r(y)dy \right. \\
&\left. + \int_{[0,1]\setminus A(\varepsilon)} |\psi(x-y) - \psi(x)| P_r(y)dy \right] \\
\leqslant &\limsup_{r\to 1-0} \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} \int_{A(\varepsilon)} |\psi(x-y) - \psi(x)| P_r(y)dy \\
&+ \limsup_{r\to 1-0} \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} \int_{[0,1]\setminus A(\varepsilon)} |\psi(x-y) - \psi(x)| P_r(y)dy \\
\leqslant &\epsilon \int_0^1 P_r(y)dy + 2 \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |\psi(x)| \cdot \lim_{r\to 1-0} \sup_{\delta\leqslant u\leqslant 1-\delta} P_r(u) \\
\leqslant &\varepsilon + 0 = \varepsilon.
\end{aligned} \tag{11.1.6}$$

这里我们用了 Poisson 核的性质 (1),(2) 和 (3) 以及 (11.1.5). 由 (11.1.6) 的右端的 ε 的任意性, 我们得到

$$\lim_{r\to 1-0}\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|\psi_r(x)-\psi(x)|=0.$$

定理最后的结论得证. □

注 1 我们看到 Poisson 核的三条性质 (1),(2) 和 (3) 在上面的证明中扮演了重要的角色. 以后我们还会遇到也有类似三条性质的其他的核, 它们将扮演 Poisson 核在上面证明中所扮演的相仿角色.

注 2 我们也可以用 $L^2([a,a+L),m;\mathbf{R})$ 中下面这一组正交规范基

$$\mathrm{g}_0(x)=L^{-1/2},\quad \mathrm{g}_n(x)=\left(\frac{L}{2}\right)^{-1/2}\cos\left(\frac{2\pi\mathrm{i}n(x-a)}{L}\right)\quad (n\in\mathbf{N}),$$

$$\mathrm{h}_n(x)=\left(\frac{L}{2}\right)^{-1/2}\sin\left(\frac{2\pi\mathrm{i}n(x-a)}{L}\right)\quad (n\in\mathbf{N})$$

替代上面用的 $L^2([a,a+L),m;\mathbf{R})$ 中的正交规范基

$$\mathrm{d}_n(x)=L^{-1/2}\exp\left(\frac{2\pi\mathrm{i}n(x-a)}{L}\right)\quad (n\in\mathbf{Z})$$

去建立 Fourier 级数理论. 细节留给同学自行思考了.

§11.2 Fourier 变换的 L^1-理论

在第 10 章中, 我们得到了以下关于 Fourier 级数的公式:

$$f(x)=(2L)^{-1/2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\exp\left(\frac{2\pi\mathrm{i}nx}{2L}\right),$$

其中右端的级数是在 $L^2[0,2L]$ 的范数意义下收敛的, 而

$$a_n=(2L)^{-1/2}\int_{-L}^{L}f(y)\exp\left(\frac{-2\pi\mathrm{i}ny}{2L}\right)dy.$$

把后一公式代入前一公式, 得到

$$f(x)=(2L)^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{2\pi \mathrm{i}nx}{2L}\right)\int_{-L}^{L}f(y)\exp\left(\frac{-2\pi \mathrm{i}ny}{2L}\right)dy.$$

对于任何函数 F, 表达式 $(2L)^{-1}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}F(n/(2L))$ 可以看做积分 $\int_{-\infty}^{\infty}F(\xi)d\xi$ 的 Riemann 和 (把变量 $n/(2L)$ 看做离散变量 ξ_n, 小区间长度为 $1/(2L)$), 让 $L\to\infty$(即小区间长度 $\to 0$), 则上式 (形式地) 趋于下式:

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\exp\big(2\pi \mathrm{i}\xi x\big)\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\exp\big(-2\pi \mathrm{i}\xi y\big)dy\right]d\xi.$$

这个形式的推演并非以上等式的严格的数学证明. 但这个形式的推演告诉我们, 在一定条件下, 以上等式在某个意义下似乎应该是成立的. 本章的剩下部分将对以上论断在 n 维情形的推广进行严格的数学讨论. 设 f 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的函数. 以下等式所定义的函数 $\hat{f}$ 称为函数 f 的 **Fourier 变换**(假若下式右端的积分在某种意义下收敛):

$$\hat{f}(\boldsymbol{\xi})=\int_{\mathbf{R}^n}f(\mathbf{y})\exp\big(-2\pi \mathrm{i}\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{y}\big)m(d\mathbf{y}).$$

我们又把用以下等式所定义的函数 $\check{f}$ 称为函数 f 的 **Fourier逆变换**, 其中 (假若下式右端的积分在某种意义下收敛)

$$\check{f}(\boldsymbol{\xi})=\int_{\mathbf{R}^n}f(\mathbf{y})\exp\big(2\pi \mathrm{i}\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{y}\big)m(d\mathbf{y}).$$

显然 $\check{f}(\boldsymbol{\xi})=\hat{f}(-\boldsymbol{\xi})$. 由上面直观地得到的公式, 似乎应该有 $\check{\hat{f}}=f$, 换言之, Fourier 逆变换似乎应该是 Fourier 变换的逆变换. 在本章中, 我们将阐明这个公式的确切涵义, 换言之, 我们将阐明: 在 f 满足什么条件时 Fourier 逆变换的确是 Fourier 变换的逆变换? 依赖于 Fourier 变换和 Fourier 逆变换中的积分收敛涵义的不同, 这个问题的解答有很多种. 在本章正文中, 我们只给出形式最简单明了的两种解答. 本节先给出第一种解答, 后两节将给出第二种解答. 习题中将给出另外的解答. 在本章的两个附录中还要给出两个解答.

注 1　不同的数学群体给函数 f 的 Fourier 变换下的定义会略有差异, 例如, 不少的文献把 f 的 Fourier 变换定义为

$$\hat{f}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{y}) \exp\big(-\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{y}\big) m(d\mathbf{y}).$$

有些文献则把 f 的 Fourier 变换定义为

$$\hat{f}(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{y}) \exp\big(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{y}\big) m(d\mathbf{y}).$$

概率论的文献中通常用后一定义, 且把 Fourier 变换改称为**特征函数**. 这样的差异并不带来数学理论的重大改变, 当然, 关于 Fourier 变换及 Fourier 逆变换的公式的形式将作相应的修改.

注 2　如下形状的积分

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{y}) \exp\big(-2\pi\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{y}\big) m(d\mathbf{y})$$

常称为 f 的 **Fourier 积分**. 由这个 Fourier 积分所代表的函数称为 f 的 Fourier 变换. 事实上, 这个意义下的 Fourier 积分与 Fourier 变换常交替使用. 有时, Fourier 变换是指映射: $f \mapsto \hat{f}$.

现在, 我们先引进以下引理.

引理 11.2.1　设 $f\in L^1(\mathbf{R}^n;\mathbf{C})$, 则 $\hat{f}\in C_b(\mathbf{R}^n,\mathbf{C})$, 其中 $C_b(\mathbf{R}^n,\mathbf{C})$ 表示$C(\mathbf{R}^n,\mathbf{C})$中全体有界连续函数组成的线性子空间, 空间$C_b(\mathbf{R}^n,\mathbf{C})$上的范数是函数绝对值在 $\mathbf{R}^n$ 上的上确界:

$$|f|_{C_b(\mathbf{R}^n,\mathbf{C})} = \sup_{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n} |f(\mathbf{x})|.$$

另外我们还有

$$\lim_{|\mathbf{x}|\to\infty} \hat{f}(\mathbf{x}) = 0. \tag{11.2.1}$$

又, 映射 $L^1(\mathbf{R}^n;\mathbf{C}) \ni f \mapsto \hat{f} \in C_b(\mathbf{R}^n,\mathbf{C})$ 是线性且连续的, 换言之,

$$\forall a,b\in\mathbf{C}\,\forall f,g\in L^1(\mathbf{R}^n;\mathbf{C})\big(\widehat{af+bg} = a\hat{f}+b\hat{g}\big),$$

且

$$|f_j - f|_{L^1(\mathbf{R}^n;\mathbf{C})} \to 0 \Longrightarrow |\hat{f}_j - \hat{f}|_{C_b(\mathbf{R}^n;\mathbf{C})} \to 0.$$

最后, 若 $f, g \in L^1(\mathbf{R}^n; \mathbf{C})$, 则

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{x})\overline{\check{g}(\mathbf{x})}m(d\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{R}^n} \hat{f}(\boldsymbol{\xi})\overline{g(\boldsymbol{\xi})}m(d\boldsymbol{\xi}). \tag{11.2.2}$$

注 由等式 (11.2.1) 表示的结论常称为 **Riemann-Lebesgue引理**.

证 易见, 映射 $f \mapsto \hat{f}$ 是线性的, 且

$$|\hat{f}|_{C_b(\mathbf{R}^n;\mathbf{C})} \equiv \sup_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbf{R}^n} |\hat{f}(\boldsymbol{\xi})| \leqslant |f|_{L^1(\mathbf{R}^n;\mathbf{C})}. \tag{11.2.3}$$

因而映射 $L^1(\mathbf{R}^n; \mathbf{C}) \ni f \mapsto \hat{f} \in C_b(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ 是连续的. 剩下要证明的是 (11.2.1) 和 (11.2.2).

先证 (11.2.1): 因对于一切 $p\in[1, \infty)$, $C_0{}^\infty(\mathbf{R}^n)$ 在 $L^p(\mathbf{R}^n, m)$ 中稠密 (参看 §10.9 第 13 题的 (iii) 或第 22 题的 (v)), 考虑到 (11.2.3), 只须证明 (11.2.1) 对于一切 $f\in C_0{}^\infty(\mathbf{R}^n)$ 成立就够了 (同学应补出这个论断的证明细节). 由 Green 公式 (参看 §10.9 的第 27 题), 注意到 f 是紧支集的, 有

$$\begin{aligned}-|2\pi\boldsymbol{\xi}|^2\hat{f}(\boldsymbol{\xi}) &= \int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{x})\Delta_{\mathbf{x}} \exp\big(-2\pi\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}\big)m(d\mathbf{x}) \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} \Delta f(\mathbf{x}) \exp\big(-2\pi\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}\big)m(d\mathbf{x}) \\ &= \widehat{\Delta f}(\boldsymbol{\xi}).\end{aligned}$$

因 $\Delta f \in L^1$, 由 (11.2.3), $|\widehat{\Delta f}|_{C_b(\mathbf{R}^n;\mathbf{C})} < \infty$. 故

$$\limsup_{|\boldsymbol{\xi}|\to\infty} |\hat{f}(\boldsymbol{\xi})| \leqslant \limsup_{|\boldsymbol{\xi}|\to\infty} |2\pi\boldsymbol{\xi}|^{-2}|\widehat{\Delta f}(\boldsymbol{\xi})| = 0.$$

Riemann-Lebesgue 引理 (11.2.1) 证毕.

下面证明 (11.2.2): 注意到定义在 $\mathbf{R}^n_{\mathbf{x}} \times \mathbf{R}^n_{\boldsymbol{\xi}}$ 上的函数

$$f(\mathbf{x})\overline{g(\boldsymbol{\xi})}\exp\big(-2\pi\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}\big)$$

是 Lebesgue 可积的, 利用 Fubini-Tonelli 定理, 我们有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^n} \hat{f}(\boldsymbol{\xi})\overline{g(\boldsymbol{\xi})}m(d\boldsymbol{\xi}) &= \int_{\mathbf{R}^n}\left[\int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{x})\exp\big(-2\pi\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}\big)m(d\mathbf{x})\right]\overline{g(\boldsymbol{\xi})}m(d\boldsymbol{\xi}) \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{x})\overline{\int_{\mathbf{R}^n} \exp\big(2\pi\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}\big)g(\boldsymbol{\xi})m(d\boldsymbol{\xi})}m(d\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{x})\overline{\check{g}(\mathbf{x})}m(d\mathbf{x}).\end{aligned}$$

引理 11.2.1 证毕. □

引理 11.2.2　对于任何 $t \in (0,\infty)$, 带参数 t 的映射 $\gamma_t : \mathbf{R}^n \to (0,\infty)$ 定义为

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \left(\gamma_t(\mathbf{x}) = t^{-n/2} \exp\left[-\frac{\pi|\mathbf{x}|^2}{t} \right] \right),$$

则对于一切 $t > 0$ 和一切 $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbf{C}^n$, 我们有

$$\int_{\mathbf{R}^n} \mathrm{e}^{2\pi(\boldsymbol{\zeta},\mathbf{x})_{\mathbf{C}^n}} \gamma_t(\mathbf{x}) m(d\mathbf{x}) = \exp\left(t\pi \sum_{j=1}^n \zeta_j^2 \right). \tag{11.2.4}$$

特别, 对于一切 $t > 0$, 有

$$\int_{\mathbf{R}^n} \gamma_t(\mathbf{x}) m(d\mathbf{x}) = 1; \tag{11.2.5}$$

又对于一切 $t > 0$ 和 $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^n$, 有

$$\hat{\gamma}_t(\boldsymbol{\xi}) = g_t(\boldsymbol{\xi}) \equiv \mathrm{e}^{-t\pi|\boldsymbol{\xi}|^2}, \quad \text{而} \quad \check{g}_t = \gamma_t. \tag{11.2.6}$$

换言之, $\gamma_t(\boldsymbol{\xi})$ 的 Fourier 变换的 Fourier 逆变换就是 $\gamma_t(\boldsymbol{\xi})$.

证　由 Fubini-Tonelli 定理, 只要能证明 (11.2.4) 在 $n=1$ 时成立,(11.2.4) 便对任何 $n \in \mathbf{N}$ 成立. 下面证明: (11.2.4) 在 $n = 1$ 时成立, 换言之, 下式成立:

$$t^{-1/2} \int_{\mathbf{R}} \exp\left(-\frac{\pi x^2}{t} + 2\pi\zeta x \right) m(dx) = \mathrm{e}^{t\pi\zeta^2}.$$

以上积分的被积函数可展成如下的级数:

$$\exp\left(-\frac{\pi x^2}{t} + 2\pi\zeta x \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2\pi\zeta)^j}{j!} x^j \exp\left(-\frac{\pi x^2}{t} \right).$$

我们要把这个级数代入前边等式左端的积分, 并实施积分号与求和号交换. 为了证明这个交换的合法性, 我们进行以下讨论.

对于任何 $n \in \mathbf{N}$,

$$\left| \sum_{j=0}^n \frac{(2\pi\zeta)^j}{j!} x^j \exp\left(-\frac{\pi x^2}{t} \right) \right| \leqslant \left[\sum_{j=0}^n \frac{(2\pi|\zeta|)^j}{j!} |x|^j \right] \exp\left(-\frac{\pi x^2}{t} \right)$$