A CONCISE
COURSE BOOK
ON MATRIX THEORY

矩阵理论
简明教程

周海云 陈东青 董士杰 杜艳可 ◎ 编著

国防工業出版社
National Defense Industry Press

矩阵理论简明教程

周海云　陈东青　董士杰　杜艳可　编著

国防工业出版社
·北京·

内 容 简 介

本书比较全面、系统地介绍了矩阵的理论、方法及其应用. 全书共分为六章，分别介绍了线性空间与线性变换、欧氏空间与酉空间理论、向量与矩阵的范数理论及应用、矩阵分析与应用、矩阵的分解与特征值的估计、广义逆矩阵等内容. 各章后有一定数量的习题.

本书可作为工科院校研究生和高年级本科生的教材，也可作为相关专业的教师及工程技术人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

矩阵理论简明教程/周海云等编著. —北京：国防工业出版社，2011.4

ISBN 978-7-118-07122-1

Ⅰ.①矩... Ⅱ.①周... Ⅲ.①矩阵—理论—教材

Ⅳ.①O151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 015127 号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

北京嘉恒彩色印刷有限责任公司

新华书店经售

*

开本 710×960 1/16 **印张** 14½ **字数** 276 千字

2011 年 4 月第 1 版第 1 次印刷 **印数** 1—4000 册 **定价** 38.00 元

国防书店：(010)68428422　　发行邮购：(010)68414474

发行传真：(010)68411535　　发行业务：(010)68472764

前言

矩阵论有着悠久的历史和颇为丰富的内容，作为一种实用的数学工具，矩阵论在数学学科与其他科学技术领域，如数值分析、优化理论、微分方程、几何学、函数论、概率统计、运筹学、控制论、系统工程等学科都有广泛的应用，甚至在经济管理、社会科学等各方面，矩阵论也都是不可缺少的数学工具，特别是在电子计算机及计算技术高度发展的今天，矩阵论的作用就更显得重要了. 掌握矩阵的基本理论和方法，对于将来从事工程技术工作的工科研究生来说是至关重要的、不可或缺的.

目前，国内已出版了多部矩阵论教材. 这些教材各具特色，深浅不一. 有的偏重于基本原理的推演；有的则着力于一般方法的陈述；有的兼顾到应用案例的解析. 在多年的教学实践中，发现了不少使学生感到困惑的问题，针对这些问题，对矩阵论的内容重新进行了梳理、优化与整合，取众家之长，化繁为简，化难为易，编著此书.

增加了两个附录. 附录 A 以一种简单的方式介绍了一元多项式的基本理论，以弥补大多数工科院校学生未学过高等代数的不足. 一元多项式理论是研究和学习 Jordan 标准型理论的重要工具. 附录 B 介绍了在本书中被广泛使用的基本理论与方法，特别是矩阵乘积的秩以及分块矩阵的逆.

将欧氏空间与酉空间理论单列为一章，以突显其重要地位. 欧氏空间与酉空间有着十分丰富的几何内容，如平行四边形法则、勾股定理、变分引理、正交分解定理等，它们是解决某些数学问题和工程实际问题的有力工具.

注重概念的起源与背景；注重将抽象的概念通俗化、直观化；注重将一般理论应用于实际问题中去.

本书比较全面、系统地介绍了矩阵论的各个论题. 在编写过程中力求做到深入浅出、简明易懂、深度与广度适当.

本书共分为六章，第 1 章介绍线性空间与线性变换；第 2 章介绍欧氏空间与

酉空间理论;第 3 章介绍向量与矩阵的范数理论和计算方法;第 4 章介绍矩阵函数与函数微积分及其应用;第 5 章介绍矩阵的分解与特征值的估计;第 6 章介绍矩阵的广义逆理论与计算方法.

本书曾作为讲义在军械工程学院多届研究生教学中使用过,在广泛征求听课学员和有关专家意见的基础上,经过多次修改,并由周海云教授执笔编写而成.参与本书编写和修订工作的还有军械工程学院陈东青、董士杰、杜艳可三位同志.刘立红、何江彦、张玉萍、孟明强等同志为本书的打印与修订付出了辛勤的劳动,在此一并致谢.

本书可作为工科院校研究生和高年级本科生教材,也可作为相关专业的教师及工程技术人员的参考书.

限于水平,书中难免有不妥之处,诚望国内同行与读者批评指正.

编著者

2011 年 3 月

符 号 说 明

$\varnothing$	空集
$a \in S$	元素 a 属于集合 S
$a \notin S$	元素 a 不属于集合 S
$S_1 \subset S_2$	集合 S_1 包含于集合 S_2
$S_1 \cap S_2$	集合 S_1 与集合 S_2 的交
$S_1 \cup S_2$	集合 S_1 与集合 S_2 的并
$S_1 + S_2$	集合 S_1 与集合 S_2 的线性和
$S_1 \oplus S_2$	集合 S_1 与集合 S_2 的直和
$\sigma: K \to S$	σ 是集合 K 到集合 S 的映射
$\det \boldsymbol{A}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式
$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹
V^n	n 维线性空间
$\dim V^n$	V^n 的维数
$\mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$	n 阶对角矩阵
$\mathrm{diag}\{\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_s\}$	准对角矩阵
$\mathrm{adj}\boldsymbol{A}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵
$V \cong U$	线性空间 V 与线性空间 U 同构
$\mathbf{R}$	实数域
$\mathbf{R}^n$	实 n 维向量空间
$\mathbf{R}^{m \times n}$	实 $m \times n$ 型矩阵空间
$\mathbf{R}_r^{m \times n}$	秩为 r 的实 $m \times n$ 型矩阵空间
$\mathbf{C}$	复数域
$\mathbf{C}^n$	复 n 维向量空间
$\mathbf{C}^{m \times n}$	复 $m \times n$ 型矩阵空间
$\mathbf{C}_r^{m \times n}$	秩为 r 的复 $m \times n$ 型矩阵空间

$\boldsymbol{e}_i$	n 维欧氏空间的第 i 个单位坐标向量
$R(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的值域,$\boldsymbol{A}$ 的列空间
$N(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的核空间,$\boldsymbol{A}$ 的零空间
$r(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩,$\dim R(\boldsymbol{A})$
$n(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的零度,$\dim N(\boldsymbol{A})$
$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B}$
$p_n(x)\mid q_m(x)$	n 次多项式 $p_n(x)$ 整除 m 次多项式 $q_m(x)$
$\boldsymbol{J}$	矩阵的 Jordan 标准形
$\boldsymbol{J}_i(\lambda_i)$	矩阵的第 i 个 Jordan 块
$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$	向量 $\boldsymbol{x}$ 与向量 $\boldsymbol{y}$ 的内积
$\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{y}$	向量 $\boldsymbol{x}$ 与向量 $\boldsymbol{y}$ 正交(垂直)
$L(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_s)$	向量 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_s$ 生成的子空间
$V^{\perp}$	子空间 V 的正交补
$\boldsymbol{A}^T$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置
$\boldsymbol{A}^H$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置
$(\boldsymbol{A})_{ij}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的(i,j)元素
$\|\|\boldsymbol{A}\|\|$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任意范数
$\|\|\boldsymbol{A}\|\|_F$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Frobenius 范数
$\rho(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径
$\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的条件数
$\|\|\boldsymbol{x}\|\|_p$	向量 $\boldsymbol{x}$ 的 p -范数,l_p 范数
$\boldsymbol{T}_{ij}$	平面$[\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j]$中的旋转矩阵
$\sigma_i=\sqrt{\lambda_i}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 个奇异值
λ_i	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 个特征值
$\mathrm{Re}(\lambda)$	复数 λ 的实部
$\mathrm{Im}(\lambda)$	复数 λ 的虚部
G_i	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 个盖尔圆
R_i	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 个盖尔圆之半径
$\boldsymbol{A}^{+}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Moore - Penrose 逆
$\boldsymbol{A}^{-}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 g -逆矩阵,$\{1\}$-逆
$\boldsymbol{A}_L^{-1}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的左逆

$\boldsymbol{A}_R^{-1}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的右逆
$\boldsymbol{A}_m^-$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的极小范数 g -逆矩阵,$\{1,4\}$-逆
$\boldsymbol{A}_l^-$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最小二乘 g -逆矩阵,$\{1,3\}$-逆
$\forall$	对所有的
$\exists$	存在
$s.t.$	使得,满足
$\Rightarrow$	蕴含
$\Leftrightarrow$	当且仅当,充分必要
$\square$	证完

目 录

第 1 章 线性空间与线性变换

线性空间及其作用于线性空间之间的线性变换是矩阵论中的两个基本概念. 线性空间的概念是通常的 n 维向量空间概念的抽象和一般化,而线性变换的概念则是保持线性运算的一种特殊映射,它揭示了线性空间之间的联系,是矩阵论的主要研究对象之一.

1.1 线 性 空 间

定义 1.1 设 $V\neq\varnothing$ 为一给定的集合,K 为一个数域. 在 V 中定义了一个加法运算,$\forall x,y\in V$,$\exists$ 唯一的 $x+y\in V$,s. t.

(1) 结合律:$\forall x,y,z\in V$,有 $x+(y+z)=(x+y)+z$.

(2) 交换律:$\forall x,y\in V$,有 $x+y=y+x$.

(3) $\exists$ 零元素 $0\in V$,s. t. $x+0=x$.

(4) $\exists$ 负元素,即 $\forall x\in V$,$\exists y\in V$,s. t. $x+y=0$,则称 y 为 x 的负元素,记为 $-x$,于是有 $x+(-x)=0$.

在 V 中定义了一个数乘运算,即 $\forall x\in V$,$\forall k\in K$,$\exists$ 唯一的 $kx\in V$,s. t.

(5) 数因子分配律:$\forall k\in K$,$\forall x,y\in V$,有 $k(x+y)=kx+ky$.

(6) 分配律:$\forall k,l\in K$,$\forall x\in V$,有 $(k+l)x=kx+lx$.

(7) 结合律:$\forall k,l\in K$,$\forall x\in V$,有 $k(lx)=(kl)x$.

(8) $1\cdot x=x$.

则称 V 为数域 K 上的线性空间(Linear Space),记为 $(V,K;+,\cdot)$. 当 $K=\mathbf{R}$ 时,$(V,\mathbf{R};+,\cdot)$ 称为实线性空间;当 $K=\mathbf{C}$ 时,称 $(V,\mathbf{C};+,\cdot)$ 为复线性空间,V 中的元素称为向量. 加法与数乘运算统称为线性运算.

例 1.1 $\mathbf{R}^n=\{a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}\,|\,a_i\in\mathbf{R}\}$

$\mathbf{C}^n=\{(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)^{\mathrm{T}}\,|\,\lambda\in\mathbf{C}\}$

按向量的加法与数乘运算分别构成数域 $\mathbf{R}$ 上与 $\mathbf{C}$ 上的实线性空间与复线性空

间.

例 1.2 $\mathbf{R}^{m\times n}=\{(a_{ij})_{m\times n}\,|\,a_{ij}\in\mathbf{R}\}$

$\mathbf{C}^{m\times n}=\{(c_{ij})_{m\times n}\,|\,c_{ij}\in\mathbf{C}\}$

按矩阵的加法与数乘运算分别构成数域 $\mathbf{R}$ 上与 $\mathbf{C}$ 上的实性线空间与复线性空间,称 $\mathbf{R}^{m\times n}$或 $\mathbf{C}^{m\times n}$为矩阵空间(Matrix Space).

仿照 n 维线性空间 $\mathbf{R}^n$ 或 $\mathbf{C}^n$ 中向量组的线性相关性,给出线性空间中 V 有限多个向量线性相关性的概念.

设 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m\in V$,若 $\exists\, c_i\in K(i=1,2,\cdots,m)$, s. t. $\boldsymbol{x}=\sum\limits_{i=1}^{m}c_i\boldsymbol{x}_i$,则称 $\boldsymbol{x}$ 为向量组 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 的线性组合,或说 $\boldsymbol{x}$ 可由向量组 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 线性表示(出). 若 $\exists\, c_i\in K$ $(i=1,2,\cdots,m)$,c_i 不全为 0,s. t. $\sum\limits_{i=1}^{m}c_i\boldsymbol{x}_i=\mathbf{0}$,则称 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 线性相关,否则称其线性无关,即若 $\sum\limits_{i=1}^{m}c_i\boldsymbol{x}_i=\mathbf{0}$,则 $c_i=0(i=1,2,\cdots,m)$.

定义 1.2 线性空间 V 中线性无关向量组所含向量最大个数称为 V 的维数(Dimension). 若 V 中最大无关组所含向量个数为 n,则称 V 的维数是 n,记为 $\dim V=n$,维数是 n 的线性空间称为数域 K 上的 n 维线性空间,记为 V^n,当 $n=+\infty$时称为无限(穷)维线性空间,矩阵论只研究有限维线性空间,而无穷维线性空间是泛函分析研究的对象.

例 1.3 $\dim\mathbf{R}^n=\dim\mathbf{C}^n=n$,而 $\dim\mathbf{R}^{m\times n}=\dim\mathbf{C}^{m\times n}=mn$

例 1.4 $P_n[x]=\{$所有次数不超过 n 的实系数多项式全体$\}\cup\{$零多项式$\}$,按多项式的加法与数乘运算,$(P_n[x],\mathbf{R};+,\cdot)$构成一个线性空间,则 $\dim P_n[x]=n+1$,这是因为 $1,\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^2,\cdots,\boldsymbol{x}^n$ 是 $P_n[\boldsymbol{x}]$的最大线性无关组.

例 1.5 $P[x]=\{$所有实系数多项式全体$\}$,按多项式的加法与数乘运算,$P[x]$构成实数域 $\mathbf{R}$ 上的一个线性空间,则 $\dim P[x]=\infty$,这是因为对于任意正整数 N,都有 N 个线性无关的向量 $1,\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^2,\cdots,\boldsymbol{x}^{N-1}$.

定义 1.3 设$(V,K;+,\cdot)$为线性空间,$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_r(r\geqslant 1)$是 V 的 r 个向量,如果它们满足

(1) $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_r$ 是线性无关的;

(2) $\forall\,\boldsymbol{x}\in V$, $\exists\, c_i\in K(i=1,2,\cdots,r)$, s. t. $\boldsymbol{x}=\sum\limits_{i=1}^{r}c_i\boldsymbol{x}_i$,则称 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_r$ 为 V 的一个基底(Base),称 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_r$ 为 V 的基向量.

由此可知，$\dim V=r$ 为基向量的个数.

$\boldsymbol{e}_1=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_2=(0,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{e}_n=(0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 或 $\mathbf{C}^n$ 的一个基底.

$\boldsymbol{E}_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 为 $\mathbf{R}^{m\times n}$ 或 $\mathbf{C}^{m\times n}$ 的一个基底，其中 $\boldsymbol{E}_{ij}\in\mathbf{R}^{m\times n},\boldsymbol{E}_{ij}=(e_{ij})_{m\times n},e_{ij}=1$，其他元素为 0.

$1,\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^2,\cdots,\boldsymbol{x}^n$ 为 $P_n[\boldsymbol{x}]$的一个基底.

齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中所含向量即为其解空间 $N(\boldsymbol{A})$的一个基底.

需要注意：一个线性空间的基不是唯一的，线性空间 V 的任意一个最大线性无关组均可充当 V 的一个基底. 不过，通常选取最简单的那个最大线性无关组作为 V 的基底，这种基底俗称自然基，如上面提到的 $\mathbf{R}^n(\mathbf{C}^n)$的自然基是 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$；$\mathbf{R}^{m\times n}(\mathbf{C}^{m\times n})$的自然基是 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\cdots,\boldsymbol{E}_{1n},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22},\cdots,\boldsymbol{E}_{2n},\cdots,\boldsymbol{E}_{m1},\cdots,\boldsymbol{E}_{mn}$；$P_n[x]$的自然基是 $1,\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^2,\cdots,\boldsymbol{x}^n$.

定义 1.4 称线性空间 V^n 的一个基 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 为 V^n 的一个坐标系(Coordinate System). 设 $\boldsymbol{x}\in V^n$，它在该基下的线性表示为

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\boldsymbol{x}_i \tag{1.1}$$

则称 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 为 $\boldsymbol{x}$ 在该坐标系中的坐标，记为

$$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}} \tag{1.2}$$

定理 1.1 设 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 是 V^n 的一个基，$\boldsymbol{x}\in V^n$，则 $\exists$ 唯一 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}}\in K^n$, s. t. $\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\boldsymbol{x}_i$.

证　设 $\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\boldsymbol{x}_i=\sum_{i=1}^{n}\xi'_i\boldsymbol{x}_i$，则 $\sum_{i=1}^{n}(\xi'_i-\xi_i)\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{0}$. 由于 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 线性无关，故 $\xi'_i=\xi_i(i=1,2,\cdots,n)$. □

注意：维数与线性空间的数域 K 有关，如复数域 $\mathbf{C}$ 是其自身上的线性空间时，$\dim\mathbf{C}=1$；而 $\mathbf{C}$ 作为实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间时，$\dim\mathbf{C}=2$，1 与 i 是$(\mathbf{C};\mathbf{R})$的一个基，这是因为 1 与 i 线性无关，而 $\forall z\in\mathbf{C},z=a+bi,a,b\in\mathbf{R}$.

定理 1.2 设 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_r\in V^n$，$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_r$ 线性无关，但 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_r,\boldsymbol{x}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{x}$ 可被 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_r$ 唯一地线性表出 .

证　因 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_r,\boldsymbol{x}$ 线性相关，故存在不全为 0 的一组数 $k_i\in K(i=1,$

$2,\cdots,r+1$)，使得 $k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{x}_r+k_{r+1}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，从而 $k_{r+1}\neq 0$. 若不然，$k_{r+1}=0$，则 $k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{x}_r=\boldsymbol{0}$，由于 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_r$ 线性无关，故 $k_i=0(i=1,2,\cdots,r)$，这与 k_i 不全为 0 矛盾.

既然 $k_{r+1}\neq 0$，那么 $\boldsymbol{x}=-\dfrac{k_1}{k_{r+1}}\boldsymbol{x}_1-\dfrac{k_2}{k_{r+1}}\boldsymbol{x}_2-\cdots-\dfrac{k_r}{k_{r+1}}\boldsymbol{x}_r$.

设 $\boldsymbol{x}=\xi_1\boldsymbol{x}_1+\xi_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\xi_r\boldsymbol{x}_r$，则

$$\left(\xi_1+\frac{k_1}{k_{r+1}}\right)\boldsymbol{x}_1+\left(\xi_2+\frac{k_2}{k_{r+1}}\right)\boldsymbol{x}_2+\cdots+\left(\xi_r+\frac{k_r}{k_{r+1}}\right)\boldsymbol{x}_r=0$$

这推出 $\xi_i=-\dfrac{k_i}{k_{r+1}}\ (i=1,2,\cdots,r)$. □

设 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 是 V^n 的旧基，$\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_n$ 为其新基，则由基的定义可得

$$\begin{cases}\boldsymbol{y}_1=c_{11}\boldsymbol{x}_1+c_{21}\boldsymbol{x}_2+\cdots+c_{n1}\boldsymbol{x}_n\\ \boldsymbol{y}_2=c_{12}\boldsymbol{x}_1+c_{22}\boldsymbol{x}_2+\cdots+c_{n2}\boldsymbol{x}_n\\ \qquad\vdots\\ \boldsymbol{y}_n=c_{1n}\boldsymbol{x}_1+c_{2n}\boldsymbol{x}_2+\cdots+c_{nn}\boldsymbol{x}_n\end{cases}\tag{1.3}$$

记 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}$，则式(1.3)可写为

$$(\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_n)=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{C}\tag{1.4}$$

称 $\boldsymbol{C}$ 为由旧基改变为新基的过渡矩阵，而式(1.4)称为基变换公式.

定理 1.3 过渡矩阵 $\boldsymbol{C}$ 是非奇异的.

证 记 $\boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_n)$，$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)$，则 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 均为非奇异的，由式(1.4)得 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{Y}$ 是非奇异的. □

设 $\boldsymbol{x}\in V^n$，$\boldsymbol{x}=\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i\boldsymbol{x}_i=\sum\limits_{i=1}^{n}\eta_i\boldsymbol{y}_i$，则

$$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{bmatrix}=(\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_n)\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \vdots\\ \eta_n\end{bmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{C}\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \vdots\\ \eta_n\end{bmatrix}$$

由于 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 是线性无关的，故有

$$
\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} \tag{1.5}
$$

或者

$$
\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} = C^{-1} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \tag{1.6}
$$

式(1.5)与式(1.6)给出了在基变换式(1.4)下向量坐标的变换公式(图 1.1).

例 1.6 已知矩阵空间 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 的两个基

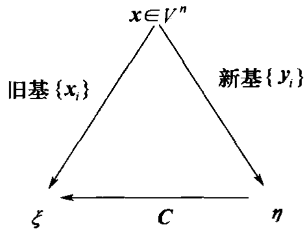

图 1.1 向量坐标变换

$$
(\mathrm{I}):\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{A}_3=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\boldsymbol{A}_4=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}.
$$

$$
(\mathrm{II}):\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix},\boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{B}_3=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{B}_4=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}.
$$

求由基(Ⅰ)改变为基(Ⅱ)的过渡矩阵.

解 引进 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 的自然基

$$
(\mathrm{III})\boldsymbol{E}_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{E}_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{E}_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{E}_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}.
$$

由基(Ⅲ)改变为基(Ⅰ)的过渡矩阵为

$$
\boldsymbol{C}_1=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\\1&-1&0&0\end{bmatrix}
$$

即$(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4)=(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})\boldsymbol{C}_1$.

由基(Ⅲ)改变为基(Ⅱ)的过渡矩阵为

$$C_2=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

即$(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4)=(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})\boldsymbol{C}_2$.

故有$(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4)=(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4)\boldsymbol{C}_1^{-1}\boldsymbol{C}_2$.

于是得由基(Ⅰ)改变为基(Ⅱ)的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}_1^{-1}\boldsymbol{C}_2=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&0&0&-1\\0&1&1&0\\0&1&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&1&1&1\\0&1&1&1\\2&2&1&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

1.2　线性子空间

研究一个系统的常用方法是研究它的子系统,通过子系统来构造整个系统.因此,为了研究线性空间,引入并研究它的子空间是必要的.

定义 1.5　设$(V,K;+,\cdot)$为给定的线性空间,V_1 是 V 的一个非空子集,称 V_1 是 V 的(线性)子空间(Subspace),如果 V_1 关于 V 的加法与数乘运算是封闭的,即$\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V_1$,$\forall k,l\in K$,有 $k\boldsymbol{x}+l\boldsymbol{y}\in V_1$.

显然,V 是它自身的子空间;$V_1=\{\boldsymbol{0}\}$是 V 的子空间,这两个子空间都是平凡的,称它们为 V 的平凡子空间;称 V 的其他子空间为 V 的非平凡子空间,有时也称 $V_1=\{\boldsymbol{0}\}$为 V 的零子空间.

定义 1.6　设 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m\in V$,其所有可能的线性组合的集合

$V_1=\{k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{x}_m\mid k_i\in K,i=1,2,\cdots,m\}\neq\varnothing$且 V_1 关于 V 的线性运算是封闭的,因而 V_1 是 V 的一个线性空间,称此子空间为由 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 生成的子空间(Generated Subspace),记为 $L(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m)$. 本质上,$L(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m)$由 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 的一个最大无关组生成,即若 $\boldsymbol{x}_{i_1},\boldsymbol{x}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{x}_{i_r}$是 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 的一个最大无关组,则 $L(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m)=L(\boldsymbol{x}_{i_1},\boldsymbol{x}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{x}_{i_r})$,特别地,若 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 是 n 维线性空间 V^n 的一个基,则 $V^n=L(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)$.

定义 1.7　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{m\times n}$,$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$,称子空间 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,$