JINPAI AOSAI KAOSHI GAOSHOU

浙大优学

金牌奥赛考试高手

数学

九年级

高　高于教材

准　准确合理

新　新颖独特

精　精选例题

名　名师荟萃

■ 王向东　主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

金牌奥赛考试高手

数学 九年级

丛书主编　王向东
本册主编　王向东
编　　委　张彩霞　王笑宇

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

金牌奥赛考试高手．数学．九年级／王向东主编．
—杭州：浙江大学出版社，2011.4
ISBN 978-7-308-08583-0

Ⅰ.①金… Ⅱ.①王… Ⅲ.①中学数学课—初中—习题集 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 061678 号

金牌奥赛考试高手　数学九年级

王向东　主编

责任编辑　杨晓鸣
特邀编辑　冯慈璜
封面设计　刘依群
出版发行　浙江大学出版社
（杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310007）
（网址：http://www.zjupress.com）
排　　版　浙江时代出版服务有限公司
印　　刷　临安市曙光印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　13.75
字　　数　335 千字
版 印 次　2011 年 4 月第 1 版　2011 年 4 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-08583-0
定　　价　28.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话　(0571)88925591

前　言

中小学学科奥林匹克竞赛（简称学科奥赛）是我国覆盖面最广、参加人数最多、影响最大的一项中小学生学科竞赛活动。学科奥林匹克是由体育奥林匹克借鉴、引申而来。国际数学奥林匹克（简称 IMO）、国际物理奥林匹克（简称 IPHO）、国际化学奥林匹克（简称 ICHO）等是国际上影响较大的中学生学科竞赛活动，每年都受到了千百万青少年学生的向往与关注。之所以受到如此关注，究其原因是奥赛具有很强的创新性、灵活性、综合性以及注重培养学生的探索能力和启发学生的创新意识，而这些也恰恰是素质教育的核心内容。这些素质是未来发展的需要。

浙大优学系列丛书编委会在精心研究了多年国内外竞赛活动，以及大量该类优秀图书的基础上，邀请了全国各地一些潜心耕耘于这块园地的优秀园丁，陆续编写出版了一系列有关数学、语文、英语、物理、化学、生物、信息七大学科，共计 200 多个品种的奥赛和考试类读物。

浙大优学系列学科竞赛丛书的编写宗旨及特点是：

第一：高。来源于教材，又高于教材。来源于教材，就是参照教育部最新课程标准编写；高于教材，就是紧扣各级竞赛大纲，注意与各级竞赛在内容、题型及能力要求等各方面全面接轨，培养学生兴趣，开发学生智力，提高学生解决问题的能力。

第二：准。科学准确，结构合理。各册按照学科特点进行分层设计，科学编排；依照循序渐进的原则，进行深入浅出的分析，传授全面细致的解题方法。

第三：新。书中选用的题型新颖独特，趣味性强。博采了近年国内外奥赛、中考、高考试题精华，精选的内容代表了当前奥赛的最高水平，体现课程改革的新概念及竞赛命题的新思想、新方法、新动态。

第四：精。精选例题，难而不怪，灵活性强，高而可攀。重在举一反三，触类旁通；重在一题多解、一题多变、一题多问；注重对思维能力的训练，不搞题海战术，使学习成为一种兴趣和爱好。

第五：名。名师荟萃，名赛集锦。丛书编委会邀请了全国各地一些名牌大学的教授、重点中学的特级教师、高级教师、学科带头人，著名奥林匹克金牌教练共同编写。

虽然我们从策划、编写，再到设计、出版，兢兢业业、尽心尽力，力求完美，但疏漏之处在所难免。如果您有什么意见和建议，欢迎并感谢赐教，让我们共同努力，以使本系列丛书更好地服务于广大的中小学师生。

目 录

第一单元 一元二次方程……(1)
一、一元二次方程的解法……(1)
赛前强化练习一……(5)/答案(169)
二、一元二次方程的根的判别式……(5)
赛前强化练习二……(9)/答案(170)
三、韦达定理及其应用……(10)
赛前强化练习三……(19)/答案(171)
四、关于方程根的讨论……(19)
赛前强化练习四……(26)/答案(174)
五、一元二次方程的整数根……(27)
赛前强化练习五……(31)/答案(176)
六、可化为一元二次方程的代数方程……(32)
赛前强化练习六……(40)/答案(179)
七、二次三项式的因式分解……(41)
赛前强化练习七……(44)/答案(182)

第二单元 函数及其图像……(45)
一、平面直角坐标系与函数的基本概念……(45)
赛前强化练习一……(53)/答案(182)
二、一次函数及其应用……(54)
赛前强化练习二……(65)/答案(184)
三、反比例函数……(67)
赛前强化练习三……(70)/答案(188)
四、二次函数……(71)
赛前强化练习四……(76)/答案(188)
五、二次函数的最值……(77)
赛前强化练习五……(83)/答案(191)
六、二次函数的实际应用问题……(84)
赛前强化练习六……(90)/答案(193)

第三单元　解直角三角形……………………………………………………………………………（92）
一、锐角三角函数 ………………………………………………………………………………（92）
赛前强化练习一……………………………………………………………（99）/答案（194）
二、解直角三角形 ………………………………………………………………………………（100）
赛前强化练习二……………………………………………………………（105）/答案（197）

第四单元　圆………………………………………………………………………………………（106）
一、圆的基本性质 ………………………………………………………………………………（106）
赛前强化练习一……………………………………………………………（109）/答案（200）
二、直线与圆 ……………………………………………………………………………………（110）
赛前强化练习二……………………………………………………………（118）/答案（201）
三、圆和圆的位置关系 …………………………………………………………………………（121）
赛前强化练习三……………………………………………………………（128）/答案（205）
四、圆幂定理及其应用 …………………………………………………………………………（129）
赛前强化练习四……………………………………………………………（133）/答案（207）

第五单元　几何变换………………………………………………………………………………（135）
赛前强化练习………………………………………………………………（138）/答案（208）

第六单元　概　率…………………………………………………………………………………（141）
赛前强化练习………………………………………………………………（146）/答案（210）

第七单元　投影与视图……………………………………………………………………………（149）
赛前强化练习………………………………………………………………（155）/答案（212）

第八单元　几种重要的数学思想方法(三)………………………………………………………（159）
赛前强化练习………………………………………………………………（167）/答案（214）

第一单元

一元二次方程

一元二次方程是初中数学重要内容之一，其问题所涉及的知识面广、难度大、变化多、技巧性强，因而常成为初中数学竞赛中的“热门”试题.

一、一元二次方程的解法

● 知识要点与延伸拓展

1. 知识要点

(1)一般形式：$ax^2+bx+c=0$(a、b、c 为常数且 $a\neq0$).

(2)常用解法

①直接开平方法

若方程可化为$(ax+b)^2=(cx+d)^2$，则有 $ax+b=\pm(cx+d)$，解得 $x=\dfrac{-b\pm d}{a\mp c}$.

②配方法

配方法源于开平方法：$f^2=a\Leftrightarrow f=\pm\sqrt{a}$.

若方程可化为$(ax+b)^2=c(c\geqslant0)$，则 $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{c}}{a}(c\geqslant0)$.

③公式法

公式法是由配方法推出的：方程经过配方有：$(x+\dfrac{b}{2a})^2=\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$.

方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根为 $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}(\Delta=b^2-4ac\geqslant0)$

④因式分解法

因式分解法是基于这样一个原理：$f_1f_2\cdots f_n=0$ 的充要条件是 $f_i(i=1,2,\cdots,n)$中至少有一个为零.

若多项式 ax^2+bx+c 可分解为$(a_1x+b_1)(c_1x+d_1)$，则方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$的两根为 $x_1=-\dfrac{b_1}{a_1}$，$x_2=-\dfrac{d_1}{c_1}$.

(3)求一元二次方程的特殊根

对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$

①若 $a+b+c=0$，则 $x_1=1, x_2=\frac{c}{a}$；

②若 $a-b+c=0(b=a+c)$ 则 $x_1=-1, x_2=-\frac{c}{a}$.

2. 竞赛能力与要求

①能观察方程的特点，选择恰当的方法，使解法简洁，提高解题的效率；

②对于带有字母系数的方程，要能对字母的取值进行讨论.

3. 解题方法与技巧

①在解方程时，一般的，能够迅速分解因式的及带参变数的二次方程应着眼于因式分解法；对于常数项较大，不便分解因式及用公式时可考虑用配方法；对于系数符合“$a+b+c=0$”或“$a-b+c=0$”的方程可先求出一个根 1 或 -1，再用根与系数关系求出另一个根.

● 例题与解说

例 1 已知关于 x 的方程 $(m+\sqrt{3})x^{m^2-1}+(m-3)x-1=0$

(1) m 为何值时，它是一元二次方程，并求出此方程的解；

(2) m 为何值时，它是一元一次方程.

分析 此题要根据一元二次方程和一元一次方程的定义，确定 m 的值，此方程为一元二次方程的条件是 $m^2-1=2$ 且 $m+\sqrt{3}\neq 0$；此方程为一元一次方程的条件应按以下几个方面讨论：① $m+\sqrt{3}=0$ 且 $m-3\neq 0$；② $m^2-1=1$ 且 $(m+\sqrt{3})+(m-3)\neq 0$；③ $m^2-1=0$ 且 $m-3\neq 0$.

解 (1) $\begin{cases} m^2-1=2 \\ m+\sqrt{3}\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=\pm\sqrt{3} \\ m\neq -\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow m=\sqrt{3}$

当 $m=\sqrt{3}$ 时，原方程为一元二次方程；

(2) 若使原方程为一元一次方程，则 m 的情况应分以下三种情况讨论：

① $\begin{cases} m+\sqrt{3}=0 \\ m-3\neq 0 \end{cases} \Rightarrow m=-\sqrt{3}$；

② $\begin{cases} m^2-1=1 \\ (m+\sqrt{3})+(m-3)\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=\pm\sqrt{2} \\ m\neq \frac{1}{2}(3-\sqrt{3}) \end{cases} \Rightarrow m=\pm\sqrt{2}$；

③ $\begin{cases} m^2-1=0 \\ m-3\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=\pm 1 \\ m\neq 3 \end{cases} \Rightarrow m=\pm 1$；

当 $m=-\sqrt{3}$ 或 $m=\pm\sqrt{2}$、$m=\pm 1$ 时，原方程是一元一次方程.

评注 讨论关于 x 的方程是一次方程还是二次方程的问题，关键要考虑两点：一是未知数的最高次数；二是最高次项的系数不等于 0，本题运用了分类讨论思想，讨论时要进行严密的思考，做到不重不漏，本题中第(2)问的解答，由于受思维定式的影响，极易漏掉②、③两种情况.

例 2 解方程 $x^2-6x-2491=0$

分析 此方程常数项比较大，可考虑使用配方法.

解 $x^2-6x-2491=0$，$x^2-6x+9=2500$，$(x-3)^2=50^2$，

所以 $x-3=\pm50$，即 $x_1=53$，$x_2=-47$.

评注 解一元二次方程的方法应根据具体的题目而定，选择恰当的方法可使解题简洁且提高解题效率.

例 3 把关于 x 的方程 $x^2-2x+2=0$ 配方成 $a(x-2)^2+b(x-2)+c=0$ 的形式.

分析 因为 $(x-2)^2=x^2-4x+4$，所以可利用拆项和添项法进行配方；也可设 $y=x-2$，利用换元法解决问题；亦可用待定系数法解答.

解法 1 $(x^2-4x+4)+4x-4-2x+2=0$，$(x-2)^2+2x-4+2=0$，

所以 $(x-2)^2+2(x-2)+2=0$.

解法 2 设 $y=x-2$，则 $x=y+2$：

$$\begin{aligned}x^2-2x+2&=(y+2)^2-2(y+2)+2=y^2+4y+4-2y-4+2\\&=y^2+2y+2=(x-2)^2+2(x-2)+2,\end{aligned}$$

所以 $(x-2)^2+2(x-2)+2=0$.

解法 3 设 $x^2-2x+2=(x-2)^2+b(x-2)+c$ 因为两边恒等，故当 $x=2$ 时，两边也相等. $2^2-2\times2+2=0^2+b\times0+c$，所以 $c=2$；

所以 $x^2-2x+2=(x-2)^2+b(x-2)+2$，

$x(x-2)=(x-2)^2+b(x-2)=(x-2)(x-2+b)$，

所以 $x=(x-2)+b$，所以 $b=2$，

所以 $(x-2)^2+2(x-2)+2=0$.

评注 本题的三种解法都是借助配方的技巧来完成的.

配方法在因式分解、证明恒等式、求函数的极值等问题中都有广泛的应用，是一种很重要的很基本的数学方法.

例 4 已知关于 x 的二次方程 $2x^2-5x-a=0$（其中 a 为常数），若两根之比 $x_1:x_2=2:3$. 则 x_2-x_1 为（　　）.

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. $\frac{3}{2}$　　D. 2

分析 要求 x_2-x_1 的值，关键是求 x_1 和 x_2 的值，但需先根据已知条件求出 a 值.

解 $2x^2-5x-a=0$

由求根公式，得 $x_1=\frac{5-\sqrt{25+8a}}{4}$，$x_2=\frac{5+\sqrt{25+8a}}{4}$；

由题意，得 $x_1:x_2=\frac{5-\sqrt{25+8a}}{4}:\frac{5+\sqrt{25+8a}}{4}=2:3$，即 $\frac{5-\sqrt{25+8a}}{5+\sqrt{25+8a}}=\frac{2}{3}$，

也即 $2\times(5+\sqrt{25+8a})=3\times(5-\sqrt{25+8a})$，

所以 $\sqrt{25+8a}=1$，所以 $25+8a=1$，所以 $a=-3$.

由此得 $x_1=1$，$x_2=\frac{3}{2}$. 所以 $x_2-x_1=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$.

故选 A.

评注 在用含 a 的代数式表示 x_1、x_2 时，用求根公式是较简便的方法.

此题若用韦达定理，解法会更简洁：设 $x_1=2k$，$x_2=3k$，所以 $3k+2k=\frac{5}{2}$，$k=\frac{1}{2}$，得 x_1

$=1, x_2=\frac{3}{2}$，得解 $x_2-x_1=\frac{1}{2}$.

例 5 解方程$(1+\sqrt{2})x^2-(3+\sqrt{2})x+\sqrt{2}=0$

分析 此方程各项系数均为无理数，不太容易用因式分解法求解，可采用公式法求解.

解法 1 因为 $b^2-4ac=[-(3+\sqrt{2})]^2-4(1+\sqrt{2})\sqrt{2}=3+2\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^2$，

所以 $x_1=\frac{(3+\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})}{2(1+\sqrt{2})}=\sqrt{2}, x_2=\frac{(3+\sqrt{2})-(1+\sqrt{2})}{2(1+\sqrt{2})}=\sqrt{2}-1$.

解法 2 用因式分解法

方程两边同时乘以$(\sqrt{2}-1)$，得

$x^2+(1-2\sqrt{2})x+\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)=0$，所以$(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{2}+1)=0$，

$x_1=\sqrt{2}, x_2=\sqrt{2}-1$.

评注 对于系数均为无理数的方程，一般采用公式法求解；也可对方程进行恒等变形，看是否能运用因式分解法求解.

例 6 设关于 x 的方程 $a^2x^2-3(a^2x-5)+2a(a+4x)-13a=0$（其中 $a\geqslant0$）至少有一个整数根，求整数 a.

分析 先求出方程的根，然后按照题中的要求去确定 a 的值.

解 整理原方程为 $a^2x^2-(3a^2-8a)x+2a^2-13a+15=0$，即

$a^2x^2-(3a^2-8a)x+(a-5)(2a-3)=0$，所以$(ax-a+5)(ax-2a+3)=0$，

故若 $a=0$，则无解；

若 $a\neq0$，则有两个根 $x_1=1-\frac{5}{a}, x_2=2-\frac{3}{a}$，

因为 $a\geqslant0$ 且根为整数，故当 x_1 是整数时，a 可取 1、5；

当 x_2 是整数时，a 可取 1、3.

所以 a 的正整数值是 1、3、5.

评注 在这个方程中只有 x 是未知数，其他字母均为字母系数，用公式法解含字母系数的一元二次方程时，计算量很大，容易出错. 尽量用因式分解法效果比较好，因式分解实在困难时，再用公式法.

例 7 设 a、b、c 是不等的实数，且方程$(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$ 有两个相等的实根，证明 $2b=a+c$.

分析 解决这个问题的一般思考方法是：由方程有两个相等实根得 $\Delta=(c-a)^2-4(a-b)(b-c)=0$，化简得出 $2b=a+c$，其运算过程较繁，若认真审题易发现$(b-c)+(c-a)+(a-b)=0$. 因此知方程的两个根是 $x_1=1, x_2=\frac{a-b}{b-c}$. 再根据方程有等根得出 $2b=a+c$.

证明 因为$(b-c)+(c-a)+(a-b)=0$，所以 $x_1=1, x_2=\frac{a-b}{b-c}$为原方程的两个根，

又因为 $x_1=x_2$，即$\frac{a-b}{b-c}=1$，所以 $a-b=b-c$. 即有 $2b=a+c$.

评注 此题解法用到了方程的特殊性质：$a+b+c=0$ 必有一根为 1，另一根为$\frac{c}{a}$.

审题是至关重要的，它可以起到“磨刀不误砍柴工”的作用.

赛前强化练习一

1. 解关于 x 的方程 $a^2x^2-2a^3x+a^4-1=0(a\neq 0)$.

2. 关于 x 的方程 $6x^2=(2m-1)x+m+1$ 有一根 α，满足不等式：$-1988\leqslant\alpha\leqslant 1988$，且使得 $\frac{3}{5}\alpha$ 为整数，则 m 可取(　　)个值.

A. 6627　　B. 3977　　C. 2385　　D. 1989

3. 解方程 $444x^2-17x-427=0$.

4. 方程 $(2004x)^2-2003\cdot 2005x-1=0$ 的较大根为 α，$x^2+2003x-2004=0$ 的较小根为 β，求 $\alpha-\beta$ 的值.

5. 证明方程 $x^3-x-2008=0$ 没有整数解.

6. 已知 c 为实数，并且方程 $x^2-3x+c=0$ 的一个根的相反数是方程 $x^2+3x-c=0$ 的一个根，求方程 $x^2+3x-c=0$ 的根和 c 的值.

7. 用配方法证明 $-10x^2+7x-4$ 的值恒小于 0.

8. 已知 $M=4x^2-12xy+10y^2+4y+9$. 当式中 x、y 各取何值时，M 的值最小？并求此最小值.

二、一元二次方程的根的判别式

一元二次方程根的判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 是一元二次方程中的重要内容，应用十分广泛，应给以足够的重视，本单元将重点研究有关根的判别式问题.

● 知识要点与延伸拓展

1. 知识要点

(1)判别一元二次方程有无实数根；

(2)求方程和方程组的实数解；

(3)求方程中参系数的值和取值范围；

(4)求有关代数式的值；

(5)证明有关的不等式；

(6)与韦达定理综合应用(在下一单元学习).

2. 竞赛能力与要求

熟练地掌握和应用根的判别式解决以上 6 种问题.

在应用判别式时要注意以下几个问题：

(1)注意判别式法解题的等价转换；

(2)注意使用韦达定理的前提是 $\Delta\geqslant 0$；

(3)注意不要多余使用判别式；

(4)注意挖掘使用判别式法的隐含条件；

(5)注意创造条件使用判别式.

3. 解题方法与技巧

根的判别式的应用很广泛，一般与根及系数有关的题大多考虑使用根的判别式；逆向应用判别式求方程中的待定系数时要注意二次项系数不为0；符合判别式形式的不等式可考虑构造一元二次方程或二次函数求解.

● 例题与解说

例1 设 $a、b、c、d>0$，证明在方程：$\frac{1}{2}x^2+\sqrt{a+b}x+\sqrt{cd}=0$，$\frac{1}{2}x^2+\sqrt{b+c}x+\sqrt{ad}=0$，$\frac{1}{2}x^2+\sqrt{c+d}x+\sqrt{ab}=0$，$\frac{1}{2}x^2+\sqrt{d+a}x+\sqrt{bc}=0$ 中，至少有两个方程有两个不相等的实数根.

分析 当题中出现"至少"等数学术语时，可采用反证法，如本题考虑判别式 Δ 是否为正数.

证明 对于题中四个方程，有

$\Delta_1=a+b-2\sqrt{cd}$，$\Delta_2=b+c-2\sqrt{ad}$，$\Delta_3=c+d-2\sqrt{ab}$，$\Delta_4=d+a-2\sqrt{bc}$.

而 $\Delta_1+\Delta_3=a+b+c+d-2\sqrt{cd}-2\sqrt{ab}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+(\sqrt{c}-\sqrt{d})^2$；

$\Delta_2+\Delta_4=a+b+c+d-2\sqrt{ad}-2\sqrt{bc}=(\sqrt{a}-\sqrt{d})^2+(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2$；

当 $a、b、c、d$ 中至少有两数互不相等时，$\Delta_1+\Delta_3>0$，$\Delta_2+\Delta_4>0$，从而 Δ_1 和 Δ_3 中至少有一个正数；Δ_2 和 Δ_4 中至少有一个正数，所以原四个方程中至少有两个方程有两个不相等的实数根.

评注 反证法是解决数学问题常用的重要方法.

例2 若方程 $x^4+6x^3+(9-3p)x^2-9px+2p^2=0$ 有且仅有一个实数满足，求 p 的值.

分析 把原方程左边分解因式. 再利用判别式求之.

解 将原方程变形，得 $(x^2+3x-p)(x^2+3x-2p)=0$

由于这个方程仅有一个实数满足，因此方程 $x^2+3x-p=0$ 与 $x^2+3x-2p=0$，有一个有重根，另一个无实根，于是应有不等式组

(1) $\begin{cases}\Delta_1=9+4p=0\\ \Delta_2=9+8p<0\end{cases}$ 与 (2) $\begin{cases}\Delta_1=9+4p<0\\ \Delta_2=9+8p=0\end{cases}$

由不等式组(1)得 $p=-\frac{9}{4}$，不等式组(2)无解.

评注 解此题的关键是通过因式分解把原方程转化为两个方程.

例3 已知关于 x 的方程 $x^2-(3k+1)x+2k^2+2k=0$.

(1)求证：不论 k 取何实数值，方程必有实数根；

(2)若等腰三角形 ABC 的一边长 $a=6$，另两边 $b、c$ 恰好是这个方程的两根，求此三角

形周长.

分析 (1)把 Δ 的值配成完全平方式;(2)a、b、c 为等腰三角形的三边的可解性为 $a=b$,$a=c$,$b=c$ 三种情况.

解 (1)因为 $\Delta=[-(3k+1)]^2-4\times1\times(2k^2+2k)=(k-1)^2$,

因为不论 k 为何实数,总有 $(k-1)^2\geqslant0$,即 $\Delta\geqslant0$,所以方程有两个实数根.

(2)解方程 $x^2-(3k+1)x+2k^2+2k=0$,$x_1=2k$,$x_2=k+1$

所以 $b=2k$,$c=k+1$.

根据条件 $a=6$.

①若 $a=b=6$ 时,则 $2k=6$,即 $k=3$,$c=4$,$a+b+c=16$;

②若 $a=c=6$ 时,则 $k+1=6$,即 $k=5$,$b=10$,$a+b+c=22$;

③若 $b=c$ 时,则 $2k=k+1$,即 $k=1$,$b=c=2$,而 $a=6$.不能构成三角形.

故等腰三角形 ABC 的周长为 16 或 22.

评注 此题若没有第(1)问时,也应先证 k 的取值范围;

应注意的是:若 a、b、c 为等腰三角形三边时,有 $a=b$,$a=c$,$b=c$ 三种情况.

例 4 已知 a、b、c 三数满足方程组 $\begin{cases}a+b=8\\ab-c^2+8\sqrt{2}c=48.\end{cases}$ 试求方程 $bx^2+cx-4=0$ 的根.

分析 观察方程组可以 8 和 $c^2-8\sqrt{2}c+48$ 为根制造方程,通过根的判别式确定 c.

解法一 原方程组整理为 $\begin{cases}a+b=8,\\ab=c^2-8\sqrt{2}c+48.\end{cases}$

则 a、b 是方程 $y^2-8y+c^2-8\sqrt{2}c+48=0$ 的两根.

故 $\Delta=8^2-4(c^2-8\sqrt{2}c+48)=-4(c-4\sqrt{2})^2\geqslant0$

所以 $(c-4\sqrt{2})^2\leqslant0$ 得 $c-4\sqrt{2}=0$,$c=4\sqrt{2}$.

把 $c=4\sqrt{2}$ 代入原方程组,解得 $a=b=4$.

所以原一元二次方程可化为 $x^2+\sqrt{2}x-1=0$,

解得 $x_1=\dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$,$x_2=-\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.

解法二

由已知得 $(a-4)+(b-4)=0$,

所以 $(a-4)(b-4)=ab-4(a+b)+16\leqslant0$.

把已知两等式代入上式得 $c^2-8\sqrt{2}c+48-4\times8+16\leqslant0$,

化简,得 $(c-4\sqrt{2})^2\leqslant0$,所以 $c=4\sqrt{2}$.

把 $c=4\sqrt{2}$ 代入原方程组.解得 $a=b=4$.

所以原一元二次方程可化为 $x^2+\sqrt{2}x-1=0$,

解得 $x_1=\dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$,$x_2=-\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.

评注 方法一是以 a、b 为根构造一个含 c 的一元二次方程,根据方程有解,利用根的判别式确定 c;

方法二是应用了一个结论："如果两实数 a、b，$a+b=0$，则 $ab\leqslant 0$"．应用这个结论解答一些竞赛题十分简捷．

例 5 如图 1-1 城市 A 位于一条铁路线上，而附近的一小镇 B 需从 A 市购进大量生活、生产用品，如果铁路运费是公路运费的一半．问该如何从 B 修筑一条公路到铁路边，使从 A 到 B 的运费最低？

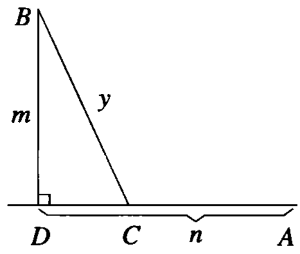

图 1-1

分析 从 B 到 A 的运费 $=BC$ 的运费 $+AC$ 的运费．可设铁路运费每千米 a 元，则公路运费为每千米 $2a$ 元．AC 可用含 n、m、y 的代数式表示．可写出一个关于 y 的一元二次方程，用根的判别式求最小值．

解 如图所示，设铁路与公路的交接点为 C，$BC=y$ 千米，$AD=n$ 千米，$BD\perp AD$ 且 $BD=m$ 千米，设铁路每千米的运费为 a，则从 A 到 B 的运费为 S．

$S=AC+BC=a(n-\sqrt{y^2-m^2})+2ay$，

即 $an-S+2ay=a\sqrt{y^2-m^2}$；

两边平方，整理得关于 y 的一元二次方程

$3a^2y^2+4a(an-S)y+(an-S)^2+a^2m^2=0$．

所以 $\Delta=[4a(an-S)]^2-4\times 3a^2[(an-S)^2+a^2m^2]=4a^2[(an-S)^2-3a^2m^2]$

因为此方程有实数解，所以 $4a^2[(an-S)^2-3a^2m^2]\geqslant 0$，

可化为 $(S-an)^2\geqslant 3a^2m^2$．

因为 $S>an$，所以 $S-an\geqslant\sqrt{3}am$ 即 $S\geqslant an+\sqrt{3}am$．

故 S 的最小值为 $an+\sqrt{3}am$．

评注 在初中数学竞赛中经常出现一些求最值（最大值或最小值）问题．利用根的判别式求最值是一元二次方程中常用的方法之一．

例 6 已知 a、b、c 是三个两两不同的奇质数，方程 $(b+c)x^2+(a+1)\sqrt{5}x+225=0$ 有两个相等的实数根．

(1)求 a 的最小值；

(2)当 a 达到最小值时，解这个方程．

分析 (1)根据方程有两个相等的实数根，可用判别式 Δ 及数的奇偶性来确定 a；

(2)由①的结论确定 a、b、c 的取值，确定方程求解．

解 (1)$\Delta=5(a+1)^2-4\times 225(b+c)=0$．即 $(a+1)^2=2^2\times 3^2\times 5(b+c)$，

可知 $5(b+c)$ 是一个完全平方数．

因为 b、c 是奇质数．所以 $b+c$ 是偶数．所以 $5(b+c)$ 是一个偶数的完全平方数．

要使 a 最小，必有 $5\times(b+c)=5^2\times 2^2$

因此 $(a+1)^2=2^2\times 3^2\times 5^2\times 2^2$，

即 $(a+1)^2$ 的最小值为 60^2，从而 a 的最小值为 59．

(2)当 $a=59$ 时，$b+c=20$．如取 $b=3$，$c=17$ 或 $b=13$，$c=7$ 等．

所以符合题意的 a、b、c 是存在的．

原方程为 $20x^2+60\sqrt{5}x+225=0$，求得 $x=-\frac{3}{2}\sqrt{5}$．

评注 此题实质上是应用判别式求方程中参系数的值. 但本题又考察了数的奇偶性及完全平方数的概念，属于一问为主、多问参与的综合题.

例 7 若方程 $x^4-2ax^2+a+6=0$ 有实根，求实数 a 的范围.

分析 将原方程看成关于 x^2 的一元二次方程. 再用根的判别式.

解 设 $t=x^2\geqslant 0$ 则原方程转化为 $t^2-2at+a+6=0$，

有$\begin{cases}\Delta=(-2a)^2-4(a+6)\geqslant 0\\ t_1+t_2=2a\geqslant 0\\ t_1\cdot t_2=a+6\geqslant 0\end{cases}$，

所以$\begin{cases}a\leqslant -2\text{ 或 }a\geqslant 3\\ a\geqslant 0\\ a\geqslant -6\end{cases}$，

从而得实数 a 的取值范围是 $a\geqslant 3$.

评注 解此题时要注意判别式解题的等价交换. 即 $t=x^2\geqslant 0$，不能只考虑 $\Delta\geqslant 0$，而得出 $a\leqslant -2$ 或 $a\geqslant 3$ 的错误结论.

例 8 若方程 $x^2+(a^2-5)x+a-1=0$ 有一个正根，一个负根，求实数 a 的取值范围.

分析 由于方程两根异号，可知 $x_1\cdot x_2<0$.

解 因为方程两根异号，所以 $x_1\cdot x_2=a-1<0$，所以 $a<1$.

评注 本题若由 $\Delta=(a^2-5)^2-4(a-1)>0$，此不等式难以求解，解题陷入绝境，实际上由 $\frac{c}{a}<0\Rightarrow ac<0\Rightarrow\Delta=b^2-4ac>0$. 列出 $\Delta>0$ 是多余的. 所以注意不要多余使用判别式.

例 9 已知 $\sqrt{3}y-3z=x$，求证：$y^2\geqslant 4xz$.

分析 由 $y^2\geqslant 4xz$ 联想到 $\Delta=b^2-4ac\geqslant 0$，根据判别式的法则，逆向构造满足题设表达式的一元二次方程. 再根据判别式证出 $y^2\geqslant 4xz$.

证 由 $\sqrt{3}y-3z=x$ 得 $x-\sqrt{3}y+3z=0$.

两边同除以 3，得

$\frac{1}{3}x-\frac{\sqrt{3}}{3}y+z=0$，即 $x(-\frac{\sqrt{3}}{3})^2+y(-\frac{\sqrt{3}}{3})+z=0$.

显然 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 是关于 t 的方程 $xt^2+yt+z=0$ 的一个根，故 $\Delta=y^2-4xz\geqslant 0$，

即 $y^2\geqslant 4xz$.

评注 由求证的 $y^2-4xz\geqslant 0$ 联想到若把 y、x、z 看成是某个一元二次方程的系数. 此不等式正符合 $\Delta=b^2-4ac$. 把原等式构造一个以 x、y、z 为系数的一元二次方程. 这种逆向思维创造条件利用判别式法往往能使解答竞赛题收到意想不到的效果.

赛前强化练习二

1. 证明两方程 $x^2+mx+1=0$ 和 $x^2-2x+(m-1)=0$ 中至少有一个方程有实数根.

2.若关于 x 的方程 $\frac{2k}{x-1}-\frac{x}{x^2-x}=\frac{kx+1}{x}$ 只有 1 个解，求 k 的值.

3.已知实数 a、b、c 满足 $a+b+c=0$，$a^2+b^2+c^2=6$，求 a 的最大值.

4.当 m 为整数时，关于 x 的方程 $(2m-1)x^2-(2m+1)x+1=0$ 是否有有理根？如果有，求出 m 的值；如果没有，请说明理由.

5.已知 $x^2-ax+3-b=0$ 有两个不相等的实数根，$x^2+(6-a)x+6-b=0$ 有两个相等的实数根，$x^2+(4-a)x+5-b=0$ 没有实数根，则 a、b 的取值范围是（　　）

A. $2<a<4$，$2<b<5$　　B. $1<a<4$，$2<b<5$

C. $1<a<4$，$1<b<5$　　D. $2<a<4$，$1<b<5$

6.已知实数 x、y、z 要满足 $x+y+z=a$，$x^2+y^2+z^2=\frac{a^2}{2}(a>0)$，求证：$0\leqslant x,y,z\leqslant\frac{2}{3}a$.

7.下面是一位初三学生编制的一道初中数学练习题：

x_1、x_2 是方程 $x^2-2x+3=0$ 的两个实数根，求 $x_1^2+x_2^2$ 的值.

另一位同学给出了解答：

解： 因为 x_1、x_2 是方程 $x^2-2x+3=0$ 的两个实数根.

所以 $x_1+x_2=2$，$x_1\cdot x_2=3$，

所以 $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=2^2-2\times3=-2$.（解答完）

(1)请你对上述这位学生编制的“练习题”以及第二位同学的“解答”进行判断，判断其是否合理，正确？并简要说明理由；

(2)只对原“练习题”中的方程进行合理改变，其他已知条件不变，改求 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ 的值.

三、韦达定理及其应用

一元二次方程的根与系数的关系即韦达定理以及它与根的判别式组合的应用在数学竞赛中比比皆是.下面只择其中部分应用，力争窥视全貌.

● 知识要点与延伸拓展

1.知识要点

(1)一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两个实根为 x_1，x_2，则有 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$，其逆命题也成立.

(2)根据韦达定理可证得：如果方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两根之比等于常数 k，则系数 a、b、c 之间必须满足 $kb^2=(k+1)^2ac$.

(3)如果两实数 a、b 满足 $a+b=0$，则 $ab\leqslant0$，应用这一结论解答一些竞赛题十分简捷.

2. 竞赛能力与要求

利用韦达定理及逆定理能解决以下问题：

(1)由方程的根的某些约束条件求参变量的值或范围；

(2)求关于方程根的代数式的值；

(3)若已知一元二次方程的一个根，不解方程.利用韦达定理求出另一个根；

(4)构造一元二次方程，利用一元二次方程的有关知识来解决有关问题；

(5)根的性质的讨论；

(6)有一定关系的两个一元二次方程；

(7)求极值；

(8)在几何求解中的应用.

3. 解题方法与技巧

(1)若两根之间存在有函数关系 $f(x_1,x_2)=0$. 再由韦达定理得到方程组 $\begin{cases} f(x_1,x_2)=0 \\ x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$ 由此消去 x_1x_2，即可得到 a、b、c 的关系式.

(2)欲求 $x_1^n+x_2^n$ 与 $x_1^n\cdot x_2^n$ 的值.要掌握如下基本公式：

①$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$

②$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)$

③$x_1-x_2=\pm\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$.

④已知 $\begin{cases} x+y=a \\ xy=b \end{cases}$，广义代入求下列对称式：

x^2+y^2，x^3+y^3，$(x-y)^2$，等的值是应掌握的一项基本功.

(3)只要满足两数和与两数积，则可以这两数为根构造一元二次方程解题.这一构造思维方法应用很广，应引起足够的重视.

(4)对于整系数的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$，若它的判别式 $\Delta=b^2-4ac\geqslant0$ 为一个完全平方数，则方程必有有理根，反之亦成立.若 $\Delta>0$ 且为非完全平方数，则方程有二共轭的无理数根：$-\dfrac{b}{2a}\pm\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$.

● 例题与解说

例 1 x_1，x_2 是一元二次方程 $4kx^2-4kx+k+1=0$ 的两个实数根.

(1)是否存在实数 k，使 $(2x_1-x_2)(x_1-2x_2)=-\dfrac{3}{2}$ 成立？若存在，求出 k 的值；若不存在，请说明理由.

(2)求使 $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}-2$ 的值为整数的实数 k 的整数值.

分析 (1)由 $\Delta\geqslant0$ 求出 k 的范围，再由 $(2x_1-x_2)(x_1-2x_2)=-\dfrac{3}{2}$ 求出 k. 比较确定是