普通高等教育“十一五”国家级规划教材

■数学类专业数学基础教程

数学分析（下册）

■张 岩 李克俊

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

■ 数 学 类 专 业 数 学 基 础 教 程

数学分析（下册）

SHUXUE FENXI

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书是普通高等教育"十一五"国家级规划教材"数学类专业数学基础教程"的分册之一。作者根据新世纪数学类专业的要求,针对当前高等院校(特别是一般本科院校)的教学实际，结合数学分析在专业人才培养中的作用以及在数学专业知识结构中的地位，选择较为合理的教学内容与结构体系，突出概念背景和建模思想，注重化解理论难点。

本书为下册，内容包括数项级数、函数项级数、多元函数微分学、多元函数微分法的应用、重积分、曲线积分、曲面积分、含参变量积分共八章，各章配有适量的习题，书末附有习题答案。

本书可作为高等学校数学类专业教材，也可供其他理工科教师和学生使用。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析. 下册/张岩，李克俊编. —北京：高等教育出版社，2011. 1

ISBN 978-7-04-031209-6

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①张… ②李… Ⅲ. ①数学分析-高等学校-教材 Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 245942 号

策划编辑 张长虹 **责任编辑** 李华英 **封面设计** 王 睢
责任绘图 黄建英 **版式设计** 余 杨 **责任校对** 刘 莉
责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
			http://www.hep.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
印　　刷	北京中科印刷有限公司		http://www.landraco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960 1/16	版　　次	2011 年 1 月第 1 版
印　　张	20.5	印　　次	2011 年 1 月第 1 次印刷
字　　数	370 000	定　　价	30.00 元

物料号 31209-00

数学类专业数学基础教程编委会

目录

第十章

数 项 级 数

微分和积分理论也被称为无穷小演算，它从 17 世纪开始发展，近代数学就是在这个时期诞生的. 事实上，在探索无穷小演算的同时，另一类涉及无穷多(无穷大)的问题也进入了数学实践，其中一个就是关于“无穷多个数量之和”的问题，本章将要介绍的无穷级数就是这一问题.

例如，将一个面积为 1 的三角形依次无限取其各边中点作成一些新的三角形，所有这些三角形的面积之和可表示为

$$1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^{2}+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\cdots,$$

对于上式，我们遇到了无穷多个数相加的问题. 我们自然要问：这种“无穷多个数相加”是否一定有意义？怎么判断有无意义？另外有限个数相加的一些运算法则，例如加法交换律、加法结合律对于无穷个数相加是否依然成立？所有这些，正是本章所要讨论的数项级数的内容. 通过讨论，我们将看到数项级数实际上是有限项“和”的概念的推广.

§1 无穷级数的概念

本节主要给出数项级数的有关概念和收敛级数的有关性质，它们都是进一步学习级数理论的基础.

一、级数的收敛与发散、收敛级数的和

定义 10.1 给定一个数列$\{u_n\}$，它的各项的“和”，即各项依次用加号连接起来的式子

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{10.1.1}$$

叫**数项级数**(简称**级数**)，记为 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots,$$

式中的 u_n 称为级数(10.1.1)的**一般项或通项**，u_1 称为级数(10.1.1)的**首项**.

当然，我们无法直接对级数的无穷多个数逐一地相加计算出结果，所以必须对(10.1.1)中无穷多个数如何相加给出一个合理的计算办法，并对由此产生的结果给出合乎逻辑的界定. 为此作级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的前 n 项和

$$s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n=\sum_{k=1}^{n}u_k(n=1,2,\cdots), \tag{10.1.2}$$

则可得到一个无穷数列$\{s_n\}$，称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的**前 n 项和数列或部分和数列**. 有了部分和数列$\{s_n\}$，我们就可定义数项级数的收敛、发散以及收敛级数的和等概念了.

定义 10.2 如果数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和数列$\{s_n\}$收敛，即

$$\lim_{n\to\infty}s_n=s,$$

则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，并称其极限值 $s=\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}u_k$ 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的和，记作 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots=s$；如果部分和数列$\{s_n\}$发散，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散. 发散的级数没有和.

显然当级数收敛时，其部分和 s_n 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=s$ 的近似值，而且 n 越大，一般其近似程度就越高，称收敛级数的和 $s=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与其部分和 $s_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$ 之差

$$r_n=s-s_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots=\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k$$

为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的**余项**. 用近似值 s_n 代替和 $s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 所产生的误差是这个余项的绝对值，即误差是 $|r_n|$.

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的收敛性与发散性，统称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性.

有了敛散性概念，我们就可以解决本章开始提到的所有三角形面积之和问题. 首先所有三角形的面积之和就是级数

$$1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n-1}},$$

其前 n 项和 $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^{k-1}} = \dfrac{1 - \frac{1}{4^n}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{4}{3},$$

即前面提到的所有三角形的面积之和是 $\frac{4}{3}$.

例 10.1.1 讨论**等比级数**(也称为**几何级数**)

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots \tag{10.1.3}$$

的敛散性($a \neq 0$)，如果收敛，求其和.

解 当 $q \neq 1$ 时，所给级数的前 n 项和为

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} aq^k = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q};$$

当 $q = 1$，$s_n = na$.

显然当 $q = 1$，$q = -1$ 与 $|q| > 1$ 时，$\lim_{n\to\infty} s_n$ 都不存在，即此时级数发散.

当 $|q| < 1$ 时，$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q}$，即此时级数收敛于$\frac{a}{1-q}$，可表示为

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots = \frac{a}{1-q}.$$

综上讨论得:

当 $|q| < 1$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ 收敛，其和为$\frac{a}{1-q}$；当 $|q| \geqslant 1$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ 发散. ■

从例 10.1.1 容易知道：$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{e}{3}\right)^n = \frac{3}{e+3}$，$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} = 3 + 2\sqrt{3}$；而

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\dfrac{e}{2}\right)^n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ 都是发散的.

例 10.1.2 讨论数项级数

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

的敛散性.

解 所给级数的前 n 项和

$$s_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)},$$

无法直接相加，但可应用下述折项公式

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1},$$

有

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1,$$

因而所给级数收敛，且$\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}+\cdots=1$. ■

例 10.1.3 在下午一点到两点之间的什么时间，一个时钟的分针恰好与时针重合?

解 从下午一点开始，当分针走到下午 1 点时，时针走到 $1+\dfrac{1}{12}$;

当分针走到 $1+\dfrac{1}{12}$时，时针又向前走到了 $1+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{12}\times\dfrac{1}{12}$; …; 以此类推，分针要追上时针需费时为

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{12}\times\frac{1}{12}+\frac{1}{12}\times\frac{1}{12}\times\frac{1}{12}+\cdots.$$

上式是一个首项 $a=\dfrac{1}{12}$，公比 $q=\dfrac{1}{12}$的等比级数，因为 $|q|=\dfrac{1}{12}<1$，故此级数收敛，其和为

$$\frac{a}{1-q}=\frac{\frac{1}{12}}{1-\frac{1}{12}}=\frac{1}{11}(\text{小时})\approx 5\text{ 分 }27\text{ 秒 }27.$$

即分针要追上时针需要的时间为 5 分 27 秒 27，也就是说，分针与时针重合的

时间约为下午 1 点 5 分 27 秒 27. ∎

二、数列与数项级数的关系

由定义 10.2 知：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性，实际上就是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{s_n\}$ 的敛散性；另一方面，任给一个数列 $\{a_n\}$，我们也可将其看成是通项为 $u_n = a_n - a_{n-1}(a_0 = 0,\ n = 1,\ 2,\ \cdots)$ 的数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和构成的数列. 因而可得

定理 10.1.1（级数柯西(Cauchy)收敛准则） 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是：任给 $\varepsilon > 0$，总存在 $N \in \mathbf{N}^+$，对于 $n > N$ 的任意 n 以及任意正整数 p，有

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon. \tag{10.1.4}$$

上述定理的证明只需将数列的柯西收敛准则运用到级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{s_n\}$ 上即可得到，请读者自证.

注 由以上定理可得，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散的充要条件是：$\exists\, \varepsilon_0 > 0$，对任意 $N \in \mathbf{N}^+$，总存在一个大于 N 的正整数 n_0 和一个正整数 p_0（p_0 不要求大于上面的 N），使得

$$|u_{n_0+1} + u_{n_0+2} + \cdots + u_{n_0+p_0}| \geqslant \varepsilon_0. \tag{10.1.5}$$

例 10.1.4 应用级数柯西收敛准则证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ 收敛.

证 因为对 $\forall\, p \in \mathbf{N}^+$，要求

$$\begin{aligned}
&|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| \\
&= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} \\
&< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon,
\end{aligned}$$

因此，对 $\forall\, \varepsilon > 0$，取 $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] > 0$，当 $n > N$ 及对任意的正整数 p，有

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon.$$

由级数柯西收敛准则知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ 收敛. ∎

推论（收敛级数的必要条件）　级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

证　级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，由级数柯西收敛准则，对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbf{N}^+$，当 $n > N$ 时，有

$$|u_{n+1}| < \varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ 成立. ■

注　此推论还可用 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{s_n\}$ 收敛加以证明，请读者自证.

推论的逆命题不成立，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的通项 u_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 不一定收敛，参见下面例 10.1.5.

此推论常用来说明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，例如，对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n+1}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$，$\lim\limits_{n\to\infty} \sin n$ 不存在，$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1 \neq 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \neq 0$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n+1}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}$ 都发散. 由此，今后若需判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性，一般可以先考察 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ 是否成立，如果不成立，即可断定 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散；如果成立，再根据具体情况寻求其他敛散性判别方法.

以上级数柯西收敛准则常用在级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和不易求出时的敛散性的探究中.

例 10.1.5　证明：**调和级数**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

发散.

证　对 $\forall N \in \mathbf{N}^+$ 与 $\forall n > N$，令 $p = n$，则有

$$\begin{aligned} |u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{2n}| &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &> \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

因此，取 $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2} > 0$，对 $\forall N \in \mathbf{N}^+$，只要 $n > N$，取 $p = n$，就有(10.1.5)式成立，故调和级数发散. ■

注　例 10.1.5 还可用 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 的部分和数列 $\{s_n\}$ 的某一子列发散加以证明. 例如 $\{s_{2^n}\}\subset\{s_n\}$，因 $s_2=1+\frac{1}{2}$，

$$s_{2^2}=s_4=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=1+\frac{2}{2},$$

$$s_{2^3}=s_8=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)$$

$$>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)=1+\frac{3}{2},$$

一般地，有

$$s_{2^n}\geqslant 1+\frac{n}{2},$$

因 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{n}{2}\right)=+\infty$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}s_{2^n}=+\infty$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n$ 不存在，即调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

三、级数的性质

既然级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的敛散性与其部分和数列 $\{s_n\}$ 的敛散性等价，因此根据数列极限的性质，不难得到级数的以下性质：

定理 10.1.2　如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛，且 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=s_1$，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n=s_2$，则对任意的常数 α，β，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha u_n+\beta v_n)$ 也收敛，且其和为 $\alpha s_1+\beta s_2$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha u_n+\beta v_n)=\alpha\sum_{n=1}^{\infty}u_n+\beta\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\alpha s_1+\beta s_2.$$

此定理请读者自证.

例 10.1.6　判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{3^n}$ 的收敛性，若收敛，则求其和.

解　因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{3^n}+\frac{(-1)^n}{3^n}\right]$，而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}}=1,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}=\frac{-\frac{1}{3}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=-\frac{1}{4},$$

从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{3^n}$ 收敛，且有