



21世纪全国高等院校汽车类**创新型**应用人才培养规划教材

# 汽车振动 分析与测试

周长城 周金宝 编著  
任传波 王仁广



北京大学出版社  
PEKING UNIVERSITY PRESS

21 世纪全国高等院校汽车类创新型应用人才培养规划教材

# 汽车振动分析与测试

周长城 周金宝 编著  
任传波 王仁广



北京大学出版社  
PEKING UNIVERSITY PRESS

## 内 容 简 介

本书通过汽车简化振动模型和实际行驶振动模型,介绍了汽车振动分析的基本概念,分别对单自由度振动、二自由度振动、多自由度振动、固有特性的近似计算方法、连续系统振动、非线性振动、随机振动、车辆悬架阻尼比匹配和减振器阻尼特性以及 MATLAB 软件在汽车振动问题分析中的应用进行讲解,最后对汽车振动特性试验的基本方法、技术方案和仪器设备进行讲解,对汽车特性室内模型试验进行介绍,并对某轻型越野车的整车行驶平顺性进行实际测试和试验结果分析。本书以学生为本,注重能力培养,内容叙述力求深入浅出、层次分明,既有理论分析,又有试验测试。各章节都有理论分析和实例讲解,最后编排有小结和习题。

本书是编者在多年的教学实践和科研成果总结基础上编写而成的,其中,第1章~第5章可作为高等院校机械工程、车辆工程、交通运输、工程机械及相关专业的本科生教材;第6章~第12章可作为研究生教材,还可作为车辆工程技术人员的参考用书。

### 图书在版编目(CIP)数据

汽车振动分析与测试/周长城等编著. —北京:北京大学出版社, 2011. 3

(21世纪全国高等院校汽车类创新型应用人才培养规划教材)

ISBN 978-7-301-18524-7

I. ①汽… II. ①周… III. ①汽车—振动—分析—高等学校—教材②汽车—振动—测试—高等学校—教材 IV. ①U467.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 015233 号

书 名: 汽车振动分析与测试

著作责任者: 周长城 周金宝 任传波 王仁广 编著

策划编辑: 童君鑫

责任编辑: 宋亚玲

标准书号: ISBN 978-7-301-18524-7/TH·0233

出版者: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区成府路 205 号 100871

网 址: <http://www.pup.cn> <http://www.pup6.com>

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62750667 出版部 62754962

电子邮箱: [pup\\_6@163.com](mailto:pup_6@163.com)

印刷者: 三河市富华印装厂

发 行 者: 北京大学出版社

经 销 者: 新华书店

787 毫米×1092 毫米 16 开本 21 印张 490 千字

2011 年 3 月第 1 版 2011 年 3 月第 1 次印刷

定 价: 40.00 元

---

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究

举报电话: 010-62752024

电子邮箱: [fd@pup.pku.edu.cn](mailto:fd@pup.pku.edu.cn)

# 前 言

随着汽车工业的发展,大众对汽车的乘坐舒适性和操纵稳定性提出了更高的要求。我国加入 WTO 以后,已把研发具有自主知识产权的汽车产品,提到了议事日程。要提高我国汽车的自主研发能力,就必须从基本原理出发,对汽车的动态特性进行分析和研究。因此,汽车振动分析理论受到越来越多的重视,已成为车辆工程中必不可少的基础理论之一。

本书为高等院校汽车工程专业的本科生及研究生,提供了一本比较系统的有关汽车振动理论的教科书,对于从事汽车或其他车辆工程的技术人员也具有较好的参考价值。本书力求深入浅出、循序渐进,以振动的基本概念、各种车辆简化振动模型为主线,分别对单自由度、二自由度、多自由度车辆简化模型振动进行了分析,对连续体系统和非线性振动系统的振动进行了探究,并以实际车辆振动情况为框架,分别对汽车随机振动、行驶振动情况进行了研究,对车辆悬架阻尼比匹配进行了探讨,对减振器阻尼特性进行了分析,对 MATLAB 软件在汽车振动问题中的应用进行了介绍,并附有相关程序,最后对汽车振动特性试验的基本方法、技术方案和仪器设备进行了讲解,对汽车特性室内模型试验进行了介绍,并对某轻型越野车的整车行驶平顺性进行了实际测试和试验结果分析。通过这种教学结构,使学生更加了解振动理论在汽车设计实践中的应用,激发学生的学习兴趣和求知欲。本书内容突出了汽车工程专业特点,充分考虑教学计划的变更和相关专业不同学时数的要求,尽量采用图表代替文字论述性内容。各章开始部分根据章节内容的特点,给出学习目标、教学要点和学习方法,中间列举例题,最后附有小结和习题,以让学生更好地掌握各章节内容。

本书由山东理工大学交通与车辆工程学院周长城教授、任传波教授,总装备部汽车试验场周金宝高级工程师和中国汽车技术研究中心王仁广博士合作编写。其中,第 1~6 章、第 8 章、第 10 章和第 11 章由周长城编写,第 12 章由周金宝编写,第 7 章由任传波编写,第 9 章由王仁广编写。本书由周长城整理、修改和统稿。

本书在编写过程中,得到了山东理工大学研究生赵雷雷、毛少坊、郭剑、李红艳、文森森、高春蕾等同学的大力支持,他们对书中的文字内容进行了校对,对书中的插图进行了绘制,在此表示感谢。

限于编者水平,书中难免存在不妥之处,恳请读者批评指正。

编著者  
2010 年 12 月

# 目 录

<b>第 1 章 振动基本概念</b> .....	1	3.2.1 谐波激励力下的 强迫振动 .....	56
1.1 振动系统组成要素及等效参数 .....	2	3.2.2 叠加法求系统响应 .....	58
1.1.1 振动系统组成要素 .....	2	3.3 路面激励下的强迫振动 .....	60
1.1.2 振动系统的等效参数 .....	4	3.3.1 车身与车轮双质量系统 ...	60
1.2 振动的分类 .....	10	3.3.2 双轴汽车振动 .....	62
1.3 振动方程建立及响应的求解 .....	11	小结 .....	65
1.3.1 简谐振动 .....	11	习题 .....	65
1.3.2 谐波分析 .....	13	<b>第 4 章 多自由度振动</b> .....	67
1.4 车辆振动简化模型 .....	15	4.1 多自由度系统振动微分方程 .....	68
小结 .....	17	4.1.1 直接法 .....	68
习题 .....	17	4.1.2 拉格朗日法 .....	70
<b>第 2 章 单自由度振动</b> .....	18	4.1.3 影响系数法 .....	73
2.1 单自由度振系的自由振动 .....	19	4.2 多自由度振动系统的固有特性 ...	76
2.2 单自由度振系的强迫振动 .....	22	4.2.1 固有频率 .....	76
2.2.1 简谐激励下的强迫 振动 .....	23	4.2.2 主振型 .....	77
2.2.2 一般性周期激励下的 强迫振动 .....	29	4.3 多自由度无阻尼振动系统的 模态分析 .....	80
2.2.3 任意激励下的强迫振动 ...	31	4.3.1 广义坐标和坐标变换 .....	80
2.3 振动隔离 .....	38	4.3.2 模态分析 .....	82
2.3.1 主动隔振 .....	38	4.4 多自由度无阻尼振动系统的 响应计算 .....	87
2.3.2 被动隔振 .....	39	4.4.1 自由振动响应 .....	87
小结 .....	40	4.4.2 强迫振动响应 .....	90
习题 .....	41	4.5 多自由度有阻尼振动系统的 实模态分析 .....	93
<b>第 3 章 二自由度振动</b> .....	44	4.5.1 实模态分析的条件 .....	93
3.1 二自由度自由振动 .....	45	4.5.2 有阻尼系统的自由 衰减振动响应 .....	94
3.1.1 二自由度振动微分方程 ...	45	4.5.3 比例阻尼多自由度系统在 简谐激励下的振动响应 ...	95
3.1.2 二自由度无阻尼 自由振动 .....	46	4.5.4 任意激励下比例阻尼 多自由度系统振动响应 ...	96
3.1.3 二自由度有阻尼 自由振动 .....	55	4.6 多自由度有阻尼振动系统的 复模态分析 .....	97
3.2 二自由度强迫振动 .....	56		



4.6.1	状态空间方法	97	6.5.2	矩形薄板自由振动的 Levy解	139
4.6.2	复特征值、复特征向量和 复模态矩阵	98	6.5.3	圆形薄板的自由振动	148
4.6.3	复特征向量对矩阵 $A$ 和 $B$ 的正交性	99	6.5.4	薄板固有频率的 变分式	151
4.6.4	坐标变换	101	6.5.5	用 Rayleigh - Ritz 法 分析薄板的自由振动	154
小结		102	6.5.6	薄板的强迫振动	156
习题		102	6.6	连续系统振动响应的 模态分析法	160
<b>第 5 章</b>	<b>固有特性近似计算方法</b>	105	6.6.1	连续系统振型的 正交性	160
5.1	矩阵迭代法	106	6.6.2	连续系统无阻尼强迫振动的 模态分析	160
5.1.1	基频和振型的求法	106	小结		163
5.1.2	二阶固有频率和振型的 求法	108	习题		163
5.1.3	高阶固有频率和振型的 求法	110	<b>第 7 章</b>	<b>非线性振动分析</b>	166
5.2	子空间迭代法	111	7.1	非线性振动及基本概念	167
5.3	瑞利能量法和邓克莱法	114	7.1.1	相平面	168
5.3.1	瑞利能量法	114	7.1.2	平衡的稳定性	170
5.3.2	邓克莱法	117	7.2	非线性自由振动的近似解析法	174
5.4	传递矩阵法	118	7.2.1	摄动法	174
5.4.1	单元传递矩阵	118	7.2.2	参数变易法	175
5.4.2	系统传递矩阵	120	7.2.3	谐波平衡法	177
5.4.3	传递矩阵法求固有频率和 振型	121	7.3	非线性强迫振动的 近似解析法	177
5.4.4	分支传动系统的 传递矩阵法	123	7.3.1	跳跃现象	177
5.5	具有零特征根和重特征根的 系统振型解法	125	7.3.2	次谐波振动	178
小结		126	7.4	非线性 Duffing 系统与 特性分析	179
习题		126	7.4.1	非线性 Duffing 系统的 自由振动精细积分法	179
<b>第 6 章</b>	<b>连续系统振动分析</b>	128	7.4.2	非线性 Duffing 时滞系统的 强迫振动特性分析	182
6.1	弦的横向振动问题	129	7.4.3	非线性 Duffing 刚度扰动系统的 强迫振动特性分析	185
6.2	时间与空间变量分离方法	131	7.5	自激励振动	188
6.3	杆的纵向振动及 轴的扭转振动	132	小结		191
6.4	梁的横向振动	134	习题		191
6.5	薄板的弯曲振动	136			
6.5.1	薄板振动微分方程	136			

<b>第 8 章 随机振动</b> .....	193	10.1.1 单轮二自由度悬架系统 响应的频响函数 .....	239
8.1 随机振动基本概念 .....	194	10.1.2 车身垂直加速度均方值 .....	239
8.1.1 平稳随机振动 .....	194	10.1.3 基于舒适性的车辆悬架 最佳阻尼比 $\xi_{oc}$ .....	240
8.1.2 各态历经随机振动 .....	194	10.2 基于安全性的悬架系统最佳 阻尼比 .....	240
8.2 随机振动的统计特性 .....	195	10.3 基于舒适性和安全性的半主动 悬架最佳阻尼比 .....	241
8.2.1 幅值域(时域)特性 .....	195	10.3.1 悬架动挠度 .....	241
8.2.2 相关域特性 .....	197	10.3.2 基于舒适性和安全性的 半主动悬架最佳阻尼比 计算 .....	241
8.2.3 频率域特性 .....	198	10.3.3 路况及车速预测 .....	244
8.2.4 随机振动的概率分布 .....	200	10.4 被动悬架最佳阻尼匹配 减振器特性 .....	244
8.3 线性振动系统随机响应计算 .....	201	10.4.1 被动悬架系统最佳阻尼 可行性设计区 .....	244
8.3.1 线性系统随机激励 响应统计特性 .....	202	10.4.2 悬架系统最佳匹配减振器的 阻尼特性 .....	245
8.3.2 线性系统传递特性 .....	205	小结 .....	248
8.4 汽车随机振动计算实例 .....	206	习题 .....	248
小结 .....	207	<b>第 11 章 MATLAB 及在汽车振动分析 中的应用</b> .....	250
习题 .....	208	11.1 MATLAB 软件及其特点 .....	251
<b>第 9 章 车辆行驶振动</b> .....	209	11.1.1 MATLAB 的 工作空间 .....	251
9.1 路面不平度及其功率谱 .....	210	11.1.2 MATLAB 的 命令窗口 .....	252
9.1.1 路面不平度的测量 .....	210	11.1.3 MATLAB 的程序 编辑/调试器 .....	253
9.1.2 路面不平度及其功率谱 密度 .....	212	11.1.4 MATLAB 的帮助 系统 .....	254
9.1.3 测量数据处理及路面 不平度表示 .....	212	11.2 MATLAB 语言程序设计 .....	255
9.2 车辆振动性能的评价 .....	214	11.2.1 矩阵的定义 .....	255
9.2.1 车轮动载、行驶安全性和 道路应力 .....	214	11.2.2 矩阵运算 .....	259
9.2.2 弹簧挠度 .....	216	11.2.3 MATLAB 的函数 .....	263
9.2.3 舒适性评价 .....	217	11.2.4 MATLAB 的 控制语句 .....	264
9.3 单轮车辆模型 .....	220	11.2.5 M 文件的编写 .....	265
9.3.1 轮胎和座椅的简化模型 .....	221	11.2.6 MATLAB 图形命令 .....	267
9.3.2 车辆单轮模型 .....	222		
9.3.3 单轮车辆模型运动方程 .....	224		
9.3.4 幅频特性和评价尺度 .....	224		
9.3.5 评价尺度的影响因素 .....	229		
小结 .....	236		
习题 .....	237		
<b>第 10 章 车辆悬架最佳阻尼匹配</b> .....	238		
10.1 基于舒适性的悬架系统最佳 阻尼比 .....	239		



11.2.7	Simulink 的应用 .....	269	12.3.3	激光全息振动测量 .....	305
11.3	MATLAB 在汽车振动分析中的 应用实例 .....	272	12.3.4	模态分析试验与参数 识别 .....	306
11.3.1	单自由度简谐激振 问题 .....	272	12.3.5	悬架系统固有频率和 阻尼比的测定 .....	309
11.3.2	车身车轮二自由度 振动问题 .....	273	12.3.6	汽车定置的振动试验 方法 .....	311
11.3.3	整车七自由度振动 问题 .....	276	12.3.7	汽车行驶的振动试验 方法 .....	311
11.3.4	车辆在 C 级路面行驶下的 悬架功率谱问题 .....	280	12.3.8	汽车起步、制动时的 振动试验方法 .....	311
小结	.....	283	12.4	整车室内振动特性模拟试验 .....	312
习题	.....	283	12.4.1	整车室内振动道路 模拟试验台及功能 .....	312
<b>第 12 章 汽车振动测试</b>	.....	285	12.4.2	试验激励信号 .....	314
12.1	振动测试技术基础 .....	286	12.4.3	道路模拟试验的 工作过程 .....	315
12.1.1	测量方法和技术 .....	286	12.4.4	关于道路模拟试验的 几个问题 .....	315
12.1.2	传感器的作用和分类 .....	286	12.4.5	现代汽车驾驶模拟器 介绍 .....	316
12.1.3	振动测试系统及 性能指标 .....	287	12.5	整车行驶平顺性试验实例及 测试结果分析 .....	318
12.1.4	测量信号处理 .....	288	12.5.1	悬架系统固有频率和 阻尼比测定 .....	318
12.1.5	振动测量系统校准 .....	291	12.5.2	平顺性试验的各测点 布置 .....	318
12.2	汽车振动测试仪器和设备 .....	291	12.5.3	平顺性脉冲输入行驶 试验 .....	319
12.2.1	振动传感器 .....	291	12.5.4	平顺性随机输入行驶 试验 .....	319
12.2.2	放大器和滤波器 .....	297	小结	.....	324
12.2.3	激振信号发生器 .....	297	习题	.....	324
12.2.4	激振设备及方法 .....	298	<b>参考文献</b>	.....	326
12.2.5	信号处理及仪器 .....	300			
12.3	汽车振动参量测量及试验 方法 .....	301			
12.3.1	机械振动基本参量的 测量 .....	301			
12.3.2	汽车动力学系统振动 特性的测量 .....	303			



# 第 1 章

## 振动基本概念



### 本章学习目标

- ★ 了解振动系统的组成、振动系统的分类；
- ★ 掌握振动方程的建立及响应的求解，熟练掌握简谐振动表示方法，以及一般周期振动的谐波分析方法；
- ★ 熟悉车辆振动系统模型的简化。



### 本章教学要点

知识要点	能力要求	相关知识
振动系统的组成	了解振动系统组成的四要素，即弹簧、阻尼、质量和激励，了解等效参数的计算	弹簧刚度、阻尼系数、质量、刚体转动惯量；等效刚度、等效质量、等效阻尼
振动系统的分类	了解振动系统的分类	振动的分类方法；自由振动、强迫振动、自激振动和参数振动；线性振动和非线性振动；单自由度振动、多自由度振动和弹性体振动；周期振动、非周期振动和随机振动
振动方程的建立及响应的求解	掌握系统振动微分方程的建立及响应的求解，熟练掌握简谐振动的各种表示方法，以及一般周期振动的谐波分析方法	牛顿定律、达朗贝尔原理；简谐振动的函数表示方法、矢量表示方法和复数表示方法；傅里叶级数、谐波分析
车辆振动系统模型的简化	熟悉车辆振动模型的简化及条件	车辆振动系统、七自由度模型、四自由度模型、二自由度模型和单自由度模型



### 本章学习方法

本章所涉及的内容主要是振动的基本概念、基本知识，因此，主要采用课堂授课学习和课下自学的方法。应了解振动的基本概念和基本知识，掌握振动系统微分方程的建立及响应的求解，熟练掌握简谐振动的各种表示方法，以及一般周期振动的谐波分析方法，熟悉车辆振动模型的简化及条件。通过建立起系统的基本概念和知识，为后续章节的深入学习奠定扎实的基础。



如果把汽车作为一个系统来研究,汽车本身就是一个具有质量、弹簧和阻尼的振动系统。由于汽车各部分的固有频率不同,汽车在行驶中常因路面不平、车速和运动方向的变化,车轮、发动机和传动系统的不平衡以及齿轮的冲击等各种外部和内部的激振作用,而极易产生整车和局部的强烈振动。汽车的这种振动使汽车的动力性得不到充分的发挥,经济性变坏。同时,还将影响汽车的通过性、操纵稳定性和平顺性,使驾、乘人员产生不舒服和疲乏的感觉,甚至损坏汽车的零部件和运载的货物,缩短汽车的使用寿命。汽车振动和一般机械振动问题一样,可以用机械振动的方法来研究。

汽车是由多个系统组成的复杂的振动系统,有发动机和传动系统的振动、制动系统的振动、转向系统的振动、车身和车架系统的振动以及悬架系统的振动,其中每个系统都存在振动问题。例如,当汽车行驶时,路面的不平度会激起汽车的振动,车轮与路面之间的动载荷,不仅影响轮胎的附着效果,而且影响汽车的操纵稳定性;由弹簧和减振器组成的悬架系统需要缓和由不平路面传给车身的冲击载荷,衰减由冲击载荷引起的承载系统的振动。消除悬架系统的振动问题,主要是研究汽车平顺性。所谓汽车平顺性,就是保持汽车在行驶过程中驾、乘人员所处的振动环境具有一定舒适度的性能,对载货汽车还应包括保持货物完好的性能。此外,还要考虑汽车振动引起的车轮与路面间动载对车轮接地性的影响。

## 1.1 振动系统组成要素及等效参数

### 1.1.1 振动系统组成要素

系统之所以会产生振动,从外部条件来看是因为系统受到了外界激励,从内部条件来看是由于系统具有质量和弹性。从能量转化过程来看,外界对系统的激励就是对系统做功,其中一部分转化为质量块的动能;另一部分转化为弹性件的变形势能。反复振动过程就是激励功、动能和势能之间的不断转换。如果系统没有阻尼,只要给系统以初始激励,振动就一直延续下去;若系统具有阻尼,而系统又没有继续从外界获得能量,则振动在经历一段时间之后终将停止。由此可见,激励、质量、弹性和阻尼是振动系统的四大要素。

因此,从实际机械简化出的理想的力学模型,若要确切反映其物理过程,就要确定这四个要素。实际机器或结构元件的质量是有分布的,弹性也是如此。这种分布参数系统(或称为连续系统)往往不能按照解析法求解,所以,通常是将分布参数的系统简化成离散系统,也就是简化成具有若干集中质量并由相应的弹簧和阻尼器联结在一起的系统。下面将弹簧、阻尼器、质量的特性予以说明。

#### 1. 弹簧

弹簧是表示力与位移关系的元件,如图 1.1(a)所示。在力学模型中,它被抽象为无质量并具有线弹性的元件。这就是说,若它的一端受作用力  $F_s$ ,则它的另一端产生大小与  $F_s$  相等、方向与之相反的力,力的大小与弹簧两端点的相对位移成正比,即

$$F_s = k(x_2 - x_1) \quad (1-1)$$

式中,  $k$  为弹簧刚度;  $x_1$ ,  $x_2$  分别为弹簧左、右两端部的位移。

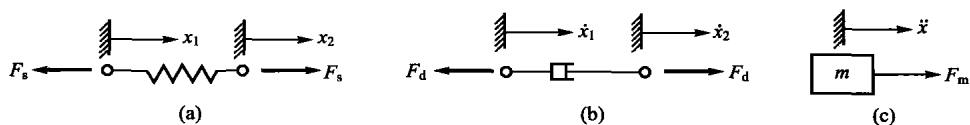


图 1.1 振动系统元件

式(1-1)中所表示的是直线位移的弹簧。在扭转振动系统中,质量作扭转运动,这种情况下采用扭转弹簧  $k_t$ , 扭转弹簧产生的广义力是扭矩,位移是角度,力和位移的关系式与式(1-1)类似。

### 2. 阻尼器

阻尼器是表示力与速度关系的元件,如图 1.1(b)所示。力学模型中,它被抽象为无质量而且具有线性阻尼系数的元件。若它的一端受  $F_d$  力的作用,则它的另一端产生大小相等、方向相反的力。这个力称为阻尼力,其大小与阻尼器两端的相对速度成正比,即

$$F_d = c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \quad (1-2)$$

式中,  $c$  为阻尼系数;  $\dot{x}_1, \dot{x}_2$  分别为阻尼器两端的速度。

根据式(1-2),阻尼力  $F_d$  与相对速度的一次方成正比,因为粘性阻尼具有这种关系,因此,系数  $c$  又称为粘性阻尼系数。

### 3. 质量

质量是表示力和加速度关系的元件,如图 1.1(c)所示。在力学模型中,它被抽象为绝对不变形的刚体。若对质量施加一个作用力  $F_m$ ,质量就会产生一个与  $F_m$  方向相同的加速度  $\ddot{x}$ ,对于直线的平移运动,力与加速度的关系为

$$F_m = m\ddot{x} \quad (1-3)$$

式中,  $m$  为刚体的质量。对于扭转振动系统,力为扭矩,加速度为角加速度,而质量为刚体绕旋转中心线的转动惯量。

将实际振动系统简化成一定的力学模型后,就要进一步确定力学模型中的四大要素,也就是确定系统的质量、刚度、阻尼参数以及系统所受的激励,这样,一个振动系统就可以完全确定下来。

### 4. 激励

振动系统会受到各种各样的外界激励。当系统仅在开始时受到外界干扰(位移或速度),系统靠本身固有特性进行的振动称为自由振动,也就是这时系统所受的外界激励为零。若系统无阻尼,则系统将保持等幅振动;若系统有阻尼,则振动将在一定时间内逐渐衰减,直至停止。

如果系统受到外界持续激励,系统就会不断地从外界获得能量,补充阻尼所消耗的能量,使系统保持等幅振动。这种由外界激励所引起的振动称为强迫振动,所引起的系统的振动状态,称为系统对激励的响应。对应不同的外界激励,系统就有不同的响应。最简单最常见的外界激励就是简谐激励力,或由支座简谐运动引起的激励。以此为基础研究单自由度系统在一般周期激励下的强迫振动的响应,以及在其他非周期的任意激励下的强迫振动的响应。



### 1.1.2 振动系统的等效参数

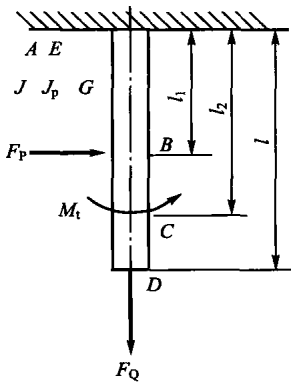
#### 1. 等效刚度

##### 1) 刚度 $k$ 的定义

弹性元件的刚度在振动问题分析中, 具有特定的含义, 通常用  $k$  或  $k_i$  符号表示。使系统某点沿着指定方向产生单位位移(线位移或角位移)时, 在该点同一方向所需要施加的力(或力矩), 就称为系统在该点沿指定方向的刚度, 即系统沿指定方向单位位移所需要施加的力, 就是系统沿指定方向的刚度。根据刚度的定义, 设参考点施加广义力  $F$  时, 所产生的位移为  $x$ , 则系统在该点在指定方向的刚度可表示为

$$k = \frac{F}{x}$$

例如, 图 1.2 中, 弹性元件为等截面直圆杆, 质量忽略不计, 圆杆的截面积为  $A$ , 弹性模量为  $E$ , 总长度为  $l$ 。在  $D$  点受到的拉力为  $F_Q$ , 在  $B$  点受到的水平方向的力  $F_P$ , 在  $C$  点受到弯矩为  $M_t$ 。



杆上不同位置点处的刚度均不同。

(1) 在  $D$  点的拉压刚度。在拉力  $F_Q$  作用下, 在  $D$  点位置的伸长量为

$$x_D = \frac{F_Q l}{EA}$$

因此, 杆的拉压刚度为

$$k_D = \frac{F_Q}{x_D} = \frac{EA}{l}$$

式中,  $A$  为杆的截面积;  $E$  为杆的拉压弹性模量;  $l$  为杆的计算长度, 即杆作用力处的总长度。

图 1.2 等截面直圆杆的刚度

(2) 在  $B$  点的弯曲刚度。在  $B$  点, 沿水平方向的弯曲挠度为

$$f_B = \frac{F_P l_1^3}{3EJ}$$

因此, 在  $B$  点处的弯曲刚度为

$$k_B = \frac{F_P}{f_B} = \frac{3EJ}{l_1^3}$$

式中,  $J$  为圆杆截面对中性轴的惯性矩。

(3) 在  $C$  点的扭转刚度。在  $C$  点截面处绕纵轴的扭转角为

$$\theta_C = \frac{M_t l_2}{GJ_p}$$

因此, 杆在  $C$  截面处的扭转刚度为

$$k_C = \frac{M_t}{\theta_C} = \frac{GJ_p}{l_2}$$

式中,  $G$  为剪切弹性模量;  $J_p$  为截面极惯矩。

##### 2) 组合弹簧系统的等效刚度

在实际振动系统中, 常常不是单独地使用一个弹性元件, 因此, 在简化振动系统模型时, 需要将组合弹簧系统折算成一个等效弹簧, 其刚度和组合弹簧的刚度相等, 称为等效

弹簧刚度  $k_e$ 。

(1) 并联弹簧的等效刚度。图 1.3(a)所示的两根弹簧并联，可等效为图 1.3(c)所示的等效弹簧。

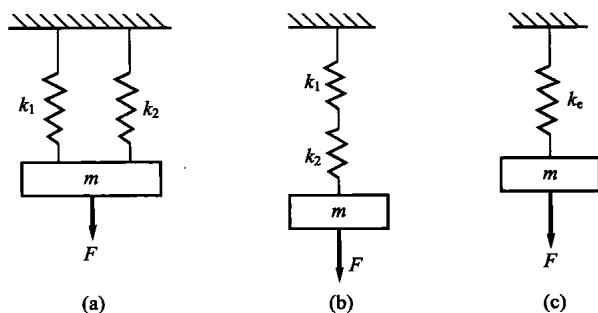


图 1.3 组合弹簧等效刚度

两根弹簧并联时，由于两根弹簧的伸长量是相等的，且等于总伸长量  $x$ ，即

$$x_1 = x_2 = x$$

所以弹性力为

$$F = k_1 x_1 + k_2 x_2 = (k_1 + k_2) x$$

式中， $k_1$ 、 $k_2$  分别为并联弹簧的刚度。

因此，并联弹簧的等效刚度  $k_e$  为

$$k_e = \frac{F}{x} = k_1 + k_2$$

可知并联弹簧的等效刚度，等于各弹簧刚度之和。

(2) 串联弹簧的等效刚度。图 1.3(b)所示的两根弹簧串联，可等效为图 1.3(c)所示的等效弹簧。

在力  $F$  作用下，两根弹簧的伸长量分别为

$$x_1 = \frac{F}{k_1}, \quad x_2 = \frac{F}{k_2}$$

式中， $k_1$ 、 $k_2$  分别为串联弹簧的刚度。

因此，两根弹簧串联之和的总的伸长量  $x$  为

$$x = x_1 + x_2 = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} = \frac{F(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}$$

所以，两根弹簧串联之后的等效刚度  $k_e$  为

$$k_e = \frac{F}{x} = \frac{F}{\frac{F(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

或

$$\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

可知串联弹簧的等效刚度，等于各弹簧刚度倒数之和。

### 3) 用能量法确定等效刚度

当实际系统比较复杂时，按照定义来求系统的等效刚度比较困难，而按照实际系统要转化的弹簧的弹性势能与等效系统弹性势能相等的原则，来计算系统的等效刚度就比较容



易, 即

$$U_a = U_e = \frac{1}{2} k_e x^2$$



例 T.1

对图 1.4 所示的弹簧-质量振动系统, 假设滑轮与绳索之间无相对运动, 滑轮半径为  $r$ , 对其中心的转动惯量为  $J$ , 绳索悬挂一个作上下振动的质量为  $m$  的质量块。若选取滑轮的角位移作为系统的运动坐标, 试求系统的等效刚度  $k_e$ 。

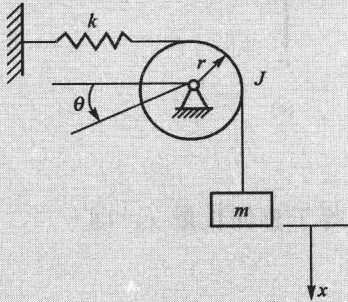


图 1.4 弹簧-质量振动系统

解: 当滑轮的转角为  $\theta$  时, 实际系统的弹性势能为

$$U_a = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k (r\theta)^2 = \frac{1}{2} k r^2 \theta^2$$

等效系统的弹簧势能为

$$U_e = \frac{1}{2} k_e \theta^2$$

因为  $U_a = U_e = \frac{1}{2} k_e \theta^2 = \frac{1}{2} k (r\theta)^2$

所以, 等效刚度  $k_e$  为

$$k_e = k r^2$$



例 T.2

图 1.5 所示为水平杠杆振系, 在左边有一个固定铰支座, 质量和弹簧的分布如图所示, 将振系简化为 C 点的单自由度振系, 试求振动的等效刚度。

解: 当 C 点位移为  $x$  时, 实际系统的弹性势能为

$$U_a = \frac{1}{2} 2k \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \frac{1}{2} k \left(\frac{2x}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{2k}{3}\right) x^2$$

等效系统的弹簧势能为

$$U_e = \frac{1}{2} k_e x^2$$

因为  $U_a = U_e = \frac{1}{2} k_e x^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{2k}{3}\right) x^2$

所以, 等效刚度  $k_e$  为

$$k_e = \frac{2k}{3}$$

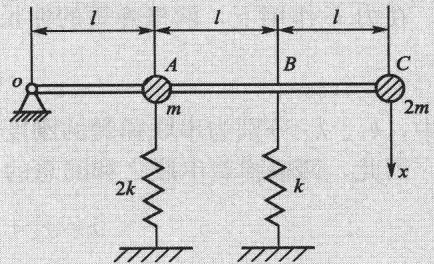


图 1.5 水平杠杆振系



例 T.3

图 1.6 所示为两轴平行、速比为  $i$  的齿轮传动系统, 齿轮的转动惯量忽略不计。轴 I 的刚度为  $k_1$ , 转角为  $\theta_1$ ; 轴 II 的刚度为  $k_2$ , 转角为  $\theta_2$ ; 定义速比  $i = \frac{\theta_1}{\theta_2}$ 。试求轴 I 向轴 II 转化的单根的振动系统的等效刚度。

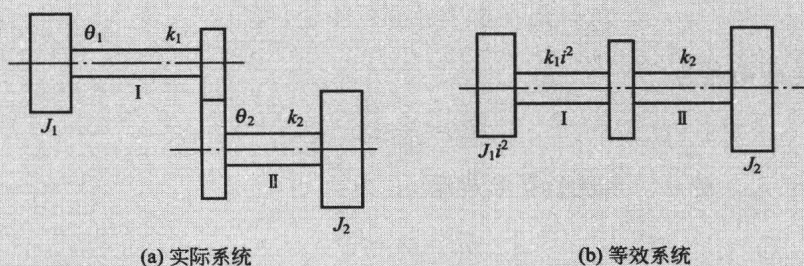


图 1.6 齿轮传动机构的等效刚度

解：在求等效刚度时，先夹住盘 1 和盘 2 不动，设轴 II 的转角为  $\theta_2$ ，则轴 I 通过齿轮 I 将扭转  $\theta_1$ ，而且  $\theta_1 = i\theta_2$ 。因此，实际系统的弹性势能为

$$U_a = \frac{1}{2} k_1 \theta_1^2 = \frac{1}{2} k_1 (i\theta_2)^2 = \frac{1}{2} k_1 i^2 \theta_2^2$$

等效系统的弹簧势能为

$$U_e = \frac{1}{2} k_e \theta^2$$

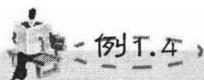
因为  $U_a = U_e$ ，所以，齿轮传动机构的等效刚度  $k_e$  为

$$k_e = i^2 k_1$$

## 2. 等效质量

与等效刚度一样，在实际系统比较复杂时，可以利用能量法来确定系统的等效质量。即根据实际系统要转化的质量的动能与等效质量动能相等的原则，来求系统的等效质量，即

$$T_a = T_e$$



例 1.4

在图 1.7 中，除了质量块的质量  $m$  外，还要考虑弹簧  $k$  的质量的影响。假设弹簧单位长度的质量为  $\rho$ ，弹簧长度为  $L$ ，求一个与之等效的单自由度振动系统的等效质量  $m_e$ 。

解：在距弹簧固定端  $\zeta$  处，取一微元  $d\zeta$ ，则微元的质量为  $\rho d\zeta$ ，位移为  $\left(\frac{\zeta}{L}\right)x$ ，速度为  $\left(\frac{\zeta}{L}\right)\dot{x}$ ，动能为  $\frac{1}{2} \left(\frac{\zeta}{L}\dot{x}\right)^2 \rho d\zeta$ ，则弹簧的振动动能为

$$T_s = \int_0^L \frac{1}{2} \left(\frac{\zeta}{L}\dot{x}\right)^2 \rho d\zeta = \frac{1}{2} \left(\frac{\rho L}{3}\right) \dot{x}^2$$

质量块的动能为

$$T_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

因此，系统的总动能为

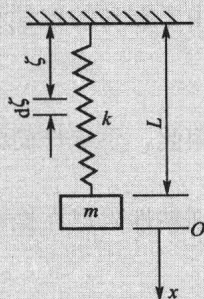


图 1.7 考虑弹簧质量的振系





$$T_a = T_m + T_s = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\rho L}{3} \right) \dot{x}^2$$

等效系统的动能为

$$T_e = \frac{1}{2} m_e \dot{x}^2$$

由于  $T_a = T_e$ ，所以，系统的等效质量  $m_e$  为

$$m_e = m + \frac{\rho L}{3}$$

可知，当弹簧质量不可忽略时，并不是将弹簧的质量直接与质量块的质量进行简单的叠加，而是将弹簧质量的  $1/3$  加在质量块上。

### 3. 等效阻尼

#### 1) 阻尼的概念

振动系统中的阻尼力有各种来源，例如，两个物体之间的干摩擦力，有润滑的两表面之间的摩擦力，空气和液体等介质的阻力，电磁阻力以及材料的内部阻力等，在振动系统中统称为阻尼。

工程中常利用各种阻尼来控制振动。例如，汽车的钢板弹簧就是利用板簧片之间的干摩擦来产生阻尼效果的，而汽车减振器大都是利用流体介质阻尼来抑制悬架的振动。在各种阻尼中，只有粘性阻尼是线性的，即阻尼力与速度成正比， $F = c\dot{x}$ ，其中  $c$  代表粘性阻尼系数。粘性阻尼比较简单，易于进行数学处理。应用粘性阻尼分析振动问题时，可使求解大为简化，因此，对系统进行振动分析，大都假设系统的阻尼为粘性阻尼，而对于其他比较复杂的阻尼，则被转化为等效粘性阻尼来处理。

#### 2) 等效阻尼系数

粘性阻尼与速度成正比，故对于具有粘性阻尼的振动系统，其响应都可以比较方便地求得。当振动系统的阻尼为其他类型时，由于是非线性的，因此，处理起来就比较麻烦。为了方便起见，在工程中经常将其他类型的阻尼等效为粘性阻尼，即振动一周中实际消耗的能量等于粘性阻尼所消耗的能量。虽然这是一种近似的方法，但是，在工程应用中具有实际效果。

由于振动的位移和速度分别为

$$x = X \sin(\omega t - \varphi)$$

$$\dot{x} = \omega X \cos(\omega t - \varphi)$$

因此，系统作简谐振动时的粘性阻尼力为

$$F_c = c\dot{x} = c\omega X \cos(\omega t - \varphi)$$

则粘性阻尼在振动的一个周期内所做的功为

$$\begin{aligned} W_c &= \int_0^T F_c \dot{x} dt = \int_0^{2\pi} \omega^2 X^2 \cos^2(\omega t - \varphi) dt \\ &= \pi c \omega X^2 \end{aligned}$$

当系统的阻尼为非线性阻尼时，可以用等效阻尼  $c_e$  代替。同样令系统作简谐强迫振动，等效阻尼在一个周期内所做的功，应该等于非粘性阻尼在一个周期内所做的功  $W_d$ ，即



$$\pi c_e \omega X^2 = W_d$$

于是, 振动系统的等效阻尼为

$$c_e = \frac{W_d}{\pi \omega X^2} \quad (1-4)$$



### 例 1.5

试求图 1.8 所示的干摩擦阻尼系统的等效粘性阻尼系数, 其中摩擦面的干摩擦系数为  $\mu$ 。

解: 摩擦面的干摩擦系数为  $\mu$ , 则干摩擦力为

$$F = \mu mg$$

干摩擦力在整个强迫振动过程中大小不变, 但方向与运动方向相反, 在一个振动周期内所做的功为

$$W_d = 4FX = 4\mu mgX$$

将上式代入式(1-4), 可得干摩擦系统的等效黏性阻尼为

$$c_e = \frac{4\mu mg}{\pi \omega X}$$

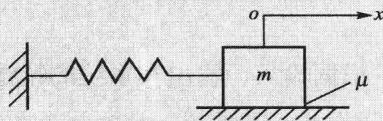


图 1.8 干摩擦阻尼系统



### 例 1.6

试求高速流体阻尼的等效黏性阻尼系数。

解: 当物体以较大速度在黏性较小的流体中运动时, 阻力与速度的平方成正比, 称为流体阻尼。它是一种非线性阻尼, 可表示为

$$F_a = \gamma \dot{x}^2$$

式中,  $\gamma$  为比例常数, 由介质的物理特性所决定。

因此, 流体阻尼在一个周期内所做的功为

$$\begin{aligned} W_d &= 4 \int_0^{\frac{T}{4}} F_a \dot{x} dt = 4 \int_0^{\frac{T}{4}} \gamma \dot{x}^3 dt \\ &= 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \gamma \omega^3 X^3 \cos^3(\omega t - \varphi) dt = \frac{8}{3} \gamma X^3 \omega^2 \end{aligned}$$

将上式代入式(1-4), 可得高速流体阻尼的等效黏性阻尼系数为

$$c_e = \frac{8}{3} \frac{\gamma X^3 \omega^2}{\pi \omega X^2} = \frac{8}{3} \frac{\gamma X \omega}{\pi}$$



### 例 1.7

试求结构阻尼的等效黏性阻尼系数。

解: 结构阻尼所耗散的能量与振幅的平方成正比, 而与振动频率无关。因此, 结构阻尼系统在一个周期内所耗散的能量为

$$W_d = aX^2$$