2011 人大考研

全面突破考研数学

2011 考研数学新编考试参考书

主编／李恒沛

权威命题专家亲自编写　理工经济通用

针对历年考研试题概念性强、综合性强、运算性强，灵活考查考生推理与应用能力的特点，全面精讲精练，重点突出

例题选择多样化，典型性强，解析透彻，侧重于概念的理解、理论的掌握、方法的运用

每章后精选习题，与例题相互补充，深化内容

中国人民大学出版社

考研数学新编考试参考书

主　编　李恒沛
副主编　高文森　侯书会
编　者　李恒沛　高文森　侯书会
　　　　陆淑珍　陶其武

2011

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

考研数学新编考试参考书/李恒沛主编．7版
北京：中国人民大学出版社，2010
ISBN 978-7-300-04657-0

Ⅰ．①考…
Ⅱ．①李…
Ⅲ．①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料
Ⅳ．①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第071891号

考研数学新编考试参考书
主编　李恒沛
Kaoyan Shuxue Xinbian Kaoshi Cankaoshu

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街31号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.1kao.com.cn(中国1考网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京宏伟双华印刷有限公司		
规　　格	210 mm×285 mm　16开本	**版　　次**	2004年4月第1版
			2010年5月第7版
印　　张	38	**印　　次**	2010年5月第1次印刷
字　　数	1 117 000	**定　　价**	59.00元

前　言

本书是为报考硕士研究生参加全国数学统考的考生而编写的，也可作为大学生的补充读物及教师的教学参考书。

遵循考试大纲规定的内容，全书分高等数学（第一至八章）、线性代数（第九章）、概率论与数理统计（第十章）三部分共十章。每章下面分节，每节又分“内容摘要与考查重点”和“例题分析”两部分。第一部分简明扼要地把本节考查内容介绍出来，并指出考查重点；第二部分列举典型例子分析解题思路，并示明考试题型。这些例子侧重于概念的理解、理论的掌握、方法的运用，可以使考生触类旁通、举一反三。书末有三个附录，附录 1 为差分方程简介（仅供报考“数学三”的考生使用），附录 2、附录 3 分别为 2009 年和 2010 年研究生入学考试数学试题及参考解答，便于广大考生复习使用。本书也可供在读本科生加深理解学习内容、复习备考以及教师教学参考使用。

从历年研究生入学考试数学试题来看，试题有如下特点：(1) 概念性强。着重考查考生对基本概念的掌握，会运用基本定理完成对一些命题的证明，从不同角度、不同提法（即所谓变形、变式）来考查考生对其掌握的熟练程度。(2) 综合性强。一道试题着重考查一部分内容，而这部分内容又有很多知识点，不可能面面俱到，只能综合几个知识点来考查。这类题几乎年年试卷都有，旨在考查考生的能力与数学素质。(3) 运算性强。正确的运算基于正确的概念和方法，数学试题虽有一定的计算量，但只要考生基本概念清楚，基本理论融会贯通，基本方法运用自如，运算起来就能快捷正确。试题具有一定的灵活性，从不同侧面（或不同角度或相关的几个知识点）考查考生的能力，注意一题多解，好让考生临场发挥，运算自如。此外，试题还注意到论证性和应用性，考查考生逻辑推理的能力和综合应用的能力。这是必不可少的能力，不论是对工学、经济学，还是管理学各专业的考生来说，都是这样。本书就是针对上述特点来精选例题和编写习题的。

本书内容紧扣大纲，全面而不烦琐，条理清晰，重点突出；再现考题，例题选择多样化，典型性强，解析透彻；章章小结，前后照应，便于掌握；每章之后附有习题，便于考生自我测试。本书中例题和习题互相补充，起到深化内容的作用，要求考生不仅要看懂例题，还要演算习题，两者都是很重要的。

本书由李恒沛、高文森、侯书会、陆淑珍、陶其武编写，全书由李

恒沛统稿。编著者均长期在重点大学从事数学教学和科研工作，有的参加过多年全国统考数学试题的命制，有的从事过多年考研辅导，并都参与过历年考研数学试卷的评阅和分析，积累了丰富的教学经验，对考研命题有深入的研究，考研辅导效果显著。编著者愿本书的出版对考研学子有所裨益。

编者建议预备报考硕士研究生的考生在阅读本书时，应先看《数学考试大纲》，以便明确考试的有关规定和要求，配合有关教材，认真阅读本书和相关参考书（推荐考生参阅由中国人民大学出版社出版，李恒沛、高文森主编的《历年考研数学真题名家解析与指导》，以及由该出版社出版，李恒沛、高文森、侯书会主编的《考研数学模拟冲刺试卷（理工类）》）。在阅读完本书及参考书之后，建议考生把本书中的全部习题做上1～2遍，从而达到熟练、正确解答的水平。

本书在编辑、出版过程中，得到有关编辑的大力支持和帮助，在此表示感谢。

祝愿考生胸有成竹，心想事成。

编著者

于北京，2010年3月

目 录

第一章

函数、极限、连续性

§1 函　　数

一、内容摘要与考查重点

1. 函数的概念与表示法

函数的定义：设有两个变量 x 与 y，如果当变量 x 在某数集 D 内任取一值时，变量 y 按照一定的法则总有一个确定值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记为 $y = f(x)$.

这时称 x 为自变量，也称 y 是因变量，称 D 是函数 $f(x)$ 的定义域.

2. 函数的简单性质

(1) 单调性：设 $y = f(x)$ 在某区间 I 内有定义，如果对于该区间内的任意两点 $x_1 < x_2$，恒有 $f(x_1) < f(x_2)$（或 $f(x_1) > f(x_2)$），则称 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的（或单调减少的）.

(2) 奇偶性：设 $y = f(x)$ 在某对称于原点的区间 I 内有定义，如果对于 I 内任意点 x，恒有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 在 I 内是偶函数；如果恒有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 在 I 内是奇函数.

偶函数的图形对称于 y 轴，奇函数的图形对称于原点.

(3) 周期性：设 $y = f(x)$ 在实数集 $\mathbf{R}$ 内有定义，若存在一个正的常数 T，使得 $f(x+T) = f(x)$ 对于任何的 $x \in \mathbf{R}$ 都成立，则称 $f(x)$ 是周期函数. 通常将满足关系式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期.

(4) 有界性：设 $y = f(x)$ 在区间 I 内有定义，如果存在 $M > 0$，使得对于任何 $x \in I$，都有 $|f(x)| \leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 I 内有界.

3. 复合函数

设 $y = f(u)$ 的定义域为 D_u，$u = \varphi(x)$ 的定义域为 D_x，值域为 E，若 $E \subseteq D_u$，则对于任何 $x \in D_x$，有 $u = \varphi(x)$ 与 x 对应，而 $u \in E \subseteq D_u$，故又有确定的 y 与 u 对应，从而，对于任何 $x \in D_x$，都有确定的 y 与 x 对应，按照函数的定义，确定了 y 是 x 的函数. 此函数是通过中间变量 u 建立起 y 与 x 的对应关系的，因而，称此函数为 $y = f(u)$ 与 $u = \varphi(x)$ 的复合函数，记为 $y = f(\varphi(x))$.

4. 反函数

设 $y = f(x)$ 的值域为 D_y，如果对于 D_y 中的任何一个 y 值，从关系式 $y = f(x)$ 中可确定唯一的 x 值，则按照函数的定义，也确定了 x 是 y 的函数，称此函数为 $y = f(x)$ 的反函数，记为 $x = f^{-1}(y)$.

习惯上，用 x 表示自变量、y 表示因变量，因此也称 $y = f^{-1}(x)$ 是 $y = f(x)$ 的反函数.

$y = f^{-1}(x)$ 与 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称.

注意：$x = f^{-1}(y)$ 与 $y = f(x)$ 的图象是同一个.

5. 初等函数与基本初等函数

(1) 基本初等函数：称下述五种函数为基本初等函数.

幂函数　$y = x^{\mu}$(μ 为实数).

指数函数　$y = a^x (a > 0, a \neq 1)$.

对数函数　$y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$.

三角函数　$y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$.

反三角函数　$y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$.

(2) 初等函数:由常数和基本初等函数经过有限次四则运算、有限次复合而成并能用一个解析式表示的函数称为初等函数.

6. 分段函数

如果一个函数 $f(x)$ 在其定义域内的不同的区间内,其对应法则有着不同的初等函数表达式,则称此函数为分段函数.

对于本小节的内容,应重点掌握以下几点:

(1) 理解函数的概念,掌握函数的表示法.

例如,应会求函数的定义域和值域,会从函数的复合表达式中求出原来函数的表达式,即从 $f(\varphi(x)) = g(x)$ 中求出 $f(x)$ 的表达式,尤其应注意求分段函数的复合问题.

(2) 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

例如,应会判定函数的单调性(用定义或用后面所述的导数方法)、奇偶性等.

(3) 掌握基本初等函数的性质及其图形.

二、例题分析

例 1　已知 $f(x+\frac{1}{x}) = \frac{x^2}{x^4+1}$,求 $f(x)$.

分析:这是已知复合函数 $f(\varphi(x))$ 的表达式,欲求函数 $f(x)$ 的表达式的问题.此问题的一般解法是在 $f(\varphi(x))$ 的表达式中,令 $\varphi(x) = u$,即可得到 $f(u)$ 的表达式,从而可得出 $f(x)$ 的表达式.

解:令 $x + \frac{1}{x} = u$,则有

$$f(u) = \frac{x^2}{x^4+1} = \frac{1}{x^2+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{(x+\frac{1}{x})^2-2} = \frac{1}{u^2-2},$$

所以　$f(x) = \frac{1}{x^2-2}$.

例 2　已知 $f(x)$ 在$[-2,2]$上为偶函数,且 $f(x) = 2x^2 + x (x \in [-2,0])$,那么当 $x \in [0,2]$ 时,$f(x)$ 的表达式为(　　).

(A)$2x^2 + x$　　(B)$2x^2 - x$　　(C)$-2x^2 + x$　　(D)$-2x^2 - x$

分析:已知函数的奇偶性时,可以由奇偶性的性质来得出对称区间上的函数的表达式.

当 $x \in [0,2]$ 时,$-x \in [-2,0]$,由于 $f(x)$ 是偶函数,所以有

$$f(x) = f(-x) = 2(-x)^2 + (-x) = 2x^2 - x.$$

解:应选 B.

例 3　设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 2-x^2, & |x| \leqslant 2, \\ 2, & |x| > 2, \end{cases}$ 求 $f(g(x))$.

分析:这是一个分段函数求复合函数的问题,按照一般求复合函数的方法,先将 $f(x)$ 的表达式中的 x 用 $g(x)$ 替换.这里的关键是要注意到 $g(x)$ 也是分段函数,要讨论分段函数 $g(x)$ 的取值范围.

解:$f(g(x)) = \begin{cases} 1, & |g(x)| \leqslant 1, \\ 0, & |g(x)| > 1, \end{cases}$

以下的关键问题是要知道当 x 在什么范围内变化时 $|g(x)| \leqslant 1$,当 x 在什么范围内变化时 $|g(x)| > 1$.

先来讨论使 $|g(x)|\leqslant 1$ 的 x 的范围.

由 $g(x)$ 的表达式清楚地看出只有当 $|x|\leqslant 2$ 时才可能使 $|g(x)|\leqslant 1$.

在 $|x|\leqslant 2$ 范围内,要使 $|g(x)|=|2-x^2|\leqslant 1$,只需

$$1\leqslant|x|\leqslant\sqrt{3}.$$

所以,当 $1\leqslant|x|\leqslant\sqrt{3}$ 时,有 $|g(x)|\leqslant 1$.

再来讨论使 $|g(x)|>1$ 的 x 的范围.

由 $g(x)$ 的表达式可知当 $|x|>2$ 时 $|g(x)|>1$. 另外,当 $\sqrt{3}<|x|\leqslant 2$ 或 $|x|<1$ 时,也有 $|g(x)|>1$.

综合上述讨论知

$$f(g(x))=\begin{cases}1, 1\leqslant|x|\leqslant\sqrt{3},\\ 0,\ |x|>\sqrt{3} \text{ 或 } |x|<1.\end{cases}$$

例 4 设 $y=(a-x^b)^{\frac{1}{n}}$,当 a,b 满足条件________时,该函数的反函数与该函数相等.

分析:由 $y=(a-x^b)^{\frac{1}{n}}$ 可得

$$x=(a-y^n)^{\frac{1}{b}},$$

也即反函数为 $y=(a-x^n)^{\frac{1}{b}}$.

与直接函数比较就知当 $b=n,a$ 为任意值时,反函数与直接函数相等.

解:应填 $b=n,a$ 为任意值.

例 5 设 $g(x)$ 在$[a,b]$上单增,$f(x)$ 在$[g(a),g(b)]$上单减,则 $f(g(-x))$(　　).

(A) 在$[a,b]$上单增　　(B) 在$[a,b]$上单减

(C) 在$[-b,-a]$上单增　　(D) 在$[-b,-a]$上单减

分析:首先,可知保证 $f(g(-x))$ 有定义的区间应是$[-b,-a]$,所以,可排除 A、B 选项.

然后,再用单调性定义判断.

任取 $x_1,x_2\in[-b,-a]$,$x_1<x_2$,则

$$-x_1,-x_2\in[a,b],\text{且}-x_1>-x_2.$$

由 $g(x)$ 的单增性有 $g(-x_1)>g(-x_2)$.

再由 $f(x)$ 的单减性有 $f(g(-x_1))<f(g(-x_2))$.

所以复合函数 $f(g(-x))$ 在$[-b,-a]$上单增.

解:应选 C.

例 6 设 $y=\dfrac{1}{2x}f(t-x)$,当 $x=1$ 时,$y=\dfrac{1}{2}t^2-t+5$,求 $f(x)$.

解:$x=1$ 时,$y=\dfrac{1}{2}f(t-1)=\dfrac{1}{2}t^2-t+5$.

从而　$f(t-1)=t^2-2t+10$.

令　$t-1=x$, $f(x)=(x+1)^2-2(x+1)+10$.

所以　$f(x)=x^2+9$.

例 7 设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$　$(x\neq 1)$,则 $f(f(f(f(x))))=$________.

分析:$f(f(x))=\dfrac{f(x)}{f(x)-1}=\dfrac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x}{x-1}-1}=x\quad(x\neq 1)$,

$$f(f(f(x)))=\frac{f(f(x))}{f(f(x))-1}=\frac{x}{x-1}\quad(x\neq 1).$$

$$f(f(f(f(x)))) = f(f(x)) = x \quad (x \neq 1).$$

解:应填 $x(x \neq 1)$.

例 8 下列函数中是偶函数的应为(　　).

(A) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$　　(B) $f(x) = ([x])^2$

(C) $f(x) = (2+\sqrt{3})^x + (2-\sqrt{3})^x$　　(D) $f(x) = \mathrm{sgn}(x) \cdot \cos x$

分析:此题是考查函数的奇偶性的定义以及一些典型函数的定义. 容易验证 A、D 选项的函数是奇函数,B 选项的函数非奇非偶,故只有选择 C.

因为此时

$$f(-x) = (2+\sqrt{3})^{-x} + (2-\sqrt{3})^{-x} = \left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^x$$
$$= (2-\sqrt{3})^x + (2+\sqrt{3})^x = f(x).$$

解:应选 C.

例 9 下列函数中不是周期函数的应为(　　).

(A) $f(x) = \sin^2 x$　　(B) $f(x) = \sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{3}$

(C) $f(x) = \sin 2x + \cos \pi x$　　(D) $f(x) = x - [x]$

分析:因 $f(x) = \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$,故 $f(x)$ 为周期函数,其最小正周期为 $T = \pi$. 容易看出,$\sin\frac{x}{2}$ 的最小正周期为 4π,$\cos\frac{x}{3}$ 的最小正周期为 6π,从而其和的最小正周期为 12π. 同理 $\sin 2x$ 的最小正周期为 π,$\cos \pi x$ 的最小正周期为 2,从而其和不是周期函数. 至于 $f(x) = x - [x]$(若 $x = n + \alpha$,n 为整数,且 $0 \leqslant \alpha < 1$,则 $[x] = n$),容易验证它为周期函数. 事实上,设 $x = n + \alpha$,n 为整数,$0 \leqslant \alpha < 1$,m 为整数,则

$$f(m+x) = f(m+n+\alpha) = m+n+\alpha - [m+n+\alpha]$$
$$= m+n+\alpha - m - [n+\alpha] = n+\alpha - [n+\alpha]$$
$$= x - [x] = f(x).$$

于是所有整数 m 都是 $f(x)$ 的周期,而最小正周期为 1. 综上分析,应选 C.

解:应选 C.

§2 极　　限

一、内容摘要与考查重点

1. 极限的有关定义

(1) 数列极限的定义:对于数列 $\{x_n\}$,如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$,总存在正整数 N,使得当 $n > N$ 时,恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$,则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的当 n 趋于无穷时的极限,记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,也记为 $x_n \to a(n \to \infty)$.

(2) 当自变量趋于无穷时函数极限的定义.

① 设 $f(x)$ 当 $|x|$ 充分大时有定义. 如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$,总存在 $X > 0$,使得当 $|x| > X$ 时,恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$,则称常数 A 是 $f(x)$ 的当 x 趋于无穷时的极限,记为 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$,也记为 $f(x) \to A(x \to \infty)$.

② 设 $f(x)$ 当 x 充分大时有定义. 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $X>0$，使得当 $x>X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数 A 是 $f(x)$ 的当 x 趋于正无穷时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，也记为 $f(x)\to A(x\to+\infty)$.

③ 设 $f(x)$ 当 $-x$ 充分大时有定义. 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $X>0$，使得当 $x<-X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数 A 是 $f(x)$ 的当 x 趋于负无穷时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，也记为 $f(x)\to A(x\to-\infty)$.

(3) 当自变量趋于某定点时函数极限的定义：

① 设 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义. 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数 A 是 $f(x)$ 的当 x 趋于 x_0 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，或 $f(x)\to A(x\to x_0)$.

② 设 $f(x)$ 在 x_0 的左邻域内有定义. 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数 A 是 $f(x)$ 的当 x 趋于 x_0 时的左极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$，或 $f(x)\to A(x\to x_0^-)$.

③ 设 $f(x)$ 在 x_0 的右邻域内有定义. 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数 A 是 $f(x)$ 的当 x 趋于 x_0 时的右极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$，或 $f(x)\to A(x\to x_0^+)$.

(4) 无穷小的定义：如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，则称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ 时的无穷小.

类似地，可定义当 $x\to\infty$(或其他过程) 时的无穷小.

(5) 无穷大的定义：设 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义. 如果对于任意给定的 $M>0$，总存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)|>M$，则称 $f(x)$ 是当 x 趋于 x_0 时的无穷大. 记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

类似地，可定义 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$.

类似地，还可定义当 $x\to\infty$(或其他过程) 时的无穷大.

(6) 无穷小阶的定义：设 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}\beta=0$，

① 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=0$，则称当 $x\to x_0$ 时，α 是比 β 高阶的无穷小，记为 $\alpha=o(\beta)$；

② 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=A(A\neq0)$，则称当 $x\to x_0$ 时，α 是与 β 同阶的无穷小，记为 $\alpha=O(\beta)$；特别地，当 $A=1$ 时，则称当 $x\to x_0$ 时，α 是与 β 等阶的无穷小，记为 $\alpha\sim\beta$；

③ 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$，则称当 $x\to x_0$ 时，α 是比 β 低阶的无穷小.

类似地，可定义当 $x\to\infty$(或其他过程) 情形下的无穷小的阶.

2. 极限的有关性质

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

(2)(保号性) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $A>0(A<0)$，则存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0(f(x)<0)$.

(3) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $f(x)\geqslant0(f(x)\leqslant0)$，则 $A\geqslant0(A\leqslant0)$.

(4)(局部有界性) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则存在 x_0 的某去心邻域 $U^0(x_0,\delta)$，使得 $f(x)$ 在 $U^0(x_0,\delta)$ 内有界.

以上 4 条性质在 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$(或其他过程) 的情形下也有相应的形式.

3. 极限存在准则

(1) 单调有界数列必有极限.

(2)(夹逼准则) 若在 x_0 的某去心的邻域(或 $|x|$ 充分大时) 内有 $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$,且 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} h(x) = A$,则有 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = A$.

4. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

(2) $\lim\limits_{x \to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$.

通过变量替换这两个公式可写成更加一般的形式:设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$,且 $f(x) \neq 0$,则有

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1,$$

$$\lim_{x \to x_0}(1 + f(x))^{\frac{1}{f(x)}} = \mathrm{e}.$$

5. 极限的运算法则

设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A, \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$,则

(1) $\lim\limits_{x \to x_0}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$;

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = AB$;

(3) 若 $B \neq 0$,则 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

上述性质当 $x \to \infty$ 时也成立.

6. 无穷小的有关性质

(1) 有限个无穷小的代数和是无穷小.

(2) 有限个无穷小的乘积是无穷小.

(3) 有界变量乘无穷小是无穷小.

(4) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $f(x) = A + \alpha$,其中 $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha = 0$.

(5) 若 $f(x)$ 是当 $x \to x_0$ 时的无穷小,且 $f(x) \neq 0$,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是当 $x \to x_0$ 时的无穷大;反之,若 $f(x)$ 是当 $x \to x_0$ 时的无穷大,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是当 $x \to x_0$ 时的无穷小.

(6)(等价无穷小替换) 设 $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha = 0, \lim\limits_{x \to x_0} \beta = 0$,且 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$,则 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

上述性质当 $x \to \infty$ 时也成立.

对于本小节的内容,应重点掌握以下几点:

① 利用极限的运算法则求极限.

② 利用两个重要极限求极限.

③ 利用等价无穷小替换求极限.

④ 利用极限存在准则求极限.

⑤ 利用左、右极限求极限或证明极限不存在.

⑥ 利用函数的连续性求极限.

⑦ 利用“洛必达法则”求极限.

上述 ⑥、⑦ 项的内容将在后面复习.

二、例题分析

例 1 “对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$，总存在正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，恒有 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$”是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的(　　).

(A) 充分但非必要条件　　(B) 必要但非充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既非充分又非必要条件

分析：此题是 1999 年全国考研数学二的原题，考查对数列极限的定义的理解. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的定义是“对任意给定的 $\varepsilon_1>0$，总存在正整数 N_1，当 $n>N_1$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon_1$”. 两种说法相比较，似乎定义中的条件更强些，显然，由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的定义必能推出“对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$，总存在正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$”. 其逆是正确的. 因为对任意 $\varepsilon_1>0$，取 $\varepsilon=\min\left(\frac{\varepsilon_1}{3},\frac{1}{3}\right)$，显然 $\varepsilon\in(0,1)$，所以总存在正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，恒有 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$. 现取 $N_1=N-1$，于是当 $n>N_1$ 时，恒有 $|x_n-a|\leqslant\frac{2\varepsilon_1}{3}<\varepsilon_1$. 所以以上两种说法是等价的，即选项 C 是正确的.

解：应选 C.

例 2 若 ε 为任意给定的正数，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的充要条件为(　　).

(A) $U(a,\varepsilon)$ 内含有 $\{x_n\}$ 的全部点

(B) $U(a,\varepsilon)$ 内含有 $\{x_n\}$ 的无穷多个点

(C) $U(a,\varepsilon)$ 之外至多有 $\{x_n\}$ 的有限个点

(D) $U(a,\varepsilon)$ 之外可能有 $\{x_n\}$ 的无穷多个点

分析：由于“$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$”的精确含义是“对任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 N，当 $n>N$ 时，恒有 $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$”，所以，在 $U(a,\varepsilon)$ 内不一定有 $\{x_n\}$ 的全部点，只含有满足 $n>N$ 的 x_n，所以 A 不对. 而 B“$U(a,\varepsilon)$ 内含有 $\{x_n\}$ 的无穷多个点”只能保证在某 N 之后的无穷多项 x_n 在 $U(a,\varepsilon)$ 内，而不能保证 N 之后的一切 x_n 都在 $U(a,\varepsilon)$ 内，故 B 也不对. C“$U(a,\varepsilon)$ 之外至多有 $\{x_n\}$ 的有限个点”能保证存在 N，当 $n>N$ 时的 x_n 都在 $U(a,\varepsilon)$ 内，所以，C 与“$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$”是可以互相推出的. 易知 D 项也不对.

解：应选 C.

例 3 设对任意的 x，总有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}(g(x)-\varphi(x))=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$(　　).

(A) 存在且等于零　　(B) 存在但不一定为零

(C) 一定不存在　　(D) 不一定存在

分析：此题是 2000 年全国考研数学三的原题. 有的考生认为由条件“$\lim\limits_{x\to\infty}(g(x)-\varphi(x))=0$”则可得出“$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)$”，但它们不一定为零，故错选为 B. 事实上，由条件“$\lim\limits_{x\to\infty}(g(x)-\varphi(x))=0$”不一定能保证 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$，$\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)$ 的存在，例如若取 $g(x)=e^x+e^{-x}$，$\varphi(x)=e^x-e^{-x}$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)-\varphi(x))=0$，但 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$ 都不存在. 这样，可以想象，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 也不一定存在了. 例如取 $f(x)=e^x$，则 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)-\varphi(x))=0$，但 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x$ 不存在.

解：应选 D.

例 4 设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，则必有(　　).

(A) $a_n<b_n$ 对任意 n 成立　　(B) $b_n<c_n$ 对任意 n 成立

(C) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在　　(D) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在

分析：由于极限值的大小只能反映当 $n\to\infty$ 时的数列的变化趋势，不能反映前面有限项的取值情况. 所以，A、B 选项都是不正确的. 又如 $\lim\limits_{n\to+\infty}x\cdot\frac{1}{x}=1$ 知 C 选项也不正确. 由无穷大的定义易知 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n=\infty$，所

以,D 选项正确.

解:应选 D.

例 5 设 $x_n=\begin{cases}\dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n}, & n\text{ 为奇数},\\ \dfrac{1}{n}, & n\text{ 为偶数},\end{cases}$ 则当 $n\to\infty$ 时,x_n 为(　　).

(A) 无穷大量　　(B) 无穷小量

(C) 有界变量　　(D) 无界变量

分析:n 为奇数时,$x_n\to\infty$.

n 为偶数时,$x_n\to 0$.

所以,x_n 既不是无穷大量,也不是无穷小量. 由于 $x_n\to\infty$(n 为奇数),所以 x_n 不是有界变量而是无界变量,故 D 选项正确.

解:应选 D.

例 6 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界,$\{x_n\}$ 为数列,下列命题正确的是(　　).

(A) 若 $\{x_n\}$ 收敛,则 $\{f(x_n)\}$ 收敛　　(B) 若 $\{x_n\}$ 单调,则 $\{f(x_n)\}$ 收敛

(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛,则 $\{x_n\}$ 收敛　　(D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调,则 $\{x_n\}$ 收敛

分析:由于 $f(x)$ 单调,所以若 $\{x_n\}$ 单调时必有 $\{f(x_n)\}$ 单调,又 $f(x)$ 有界,因此 $\{f(x_n)\}$ 是单调有界的数列,由极限存在的准则知 $\{f(x_n)\}$ 收敛,故应选择 B. 下面再看选项 A、C、D 的不正确性.

设 $x_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$,$f(x)=\begin{cases}\arctan x+1, & x\geqslant 0,\\ \arctan x-1, & x<0,\end{cases}$ 易知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界,且 $x_n\to 0\ (n\to\infty)$. 但

$$f(x_n)=\begin{cases}\arctan\left[\dfrac{(-1)^n}{n}\right]+1, & n\text{ 为偶数},\\ \arctan\left[\dfrac{(-1)^n}{n}\right]-1, & n\text{ 为奇数},\end{cases}$$

有　$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_{2n})=1$,　$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_{2n+1})=-1$,

从而 $\{f(x_n)\}$ 不收敛,此例说明 A 不正确.

设 $x_n=n$,$f(x)=\arctan x$,易知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调,$f(x_n)=\arctan n\to\dfrac{\pi}{2}\ (n\to\infty)$,但是 $\{x_n\}$ 不收敛. 此例说明 C 不正确. 由于此时 $\{f(x_n)\}$ 也是单调的,故此例也说明 D 不正确.

解:应选 B.

例 7 若 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=A$,则必有(　　).

(A) $f(x_0)=A$　　(B) $f(x_0)$ 存在但不一定为 A

(C) 存在邻域 $U^0(x_0,\delta)$,使 $f(x)$ 在其中有界　　(D) 对任何邻域 $U^0(x_0,\delta)$,$f(x)$ 在其中有界

分析:由极限的定义知"$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$"的精确含义是"对任何给定 $\varepsilon>0$,存在 $U^0(x_0,\delta)$,使得 $x\in U^0(x_0,\delta)$ 时,$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$",易知 C 正确. 而 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 与 $f(x_0)$ 的存在是无关的,故 A、B 不正确. 由极限的定义可知"$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$"只能保证 $f(x)$ 在 x_0 的附近有界,故要求 $U^0(x_0,\delta)$ 中的 δ 较小,不能保证在任何的 $U^0(x_0,\delta)$ 内 $f(x)$ 有界,所以 D 也不对.

解:应选 C.

例 8 当 $x\to 0^+$ 时,与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是(　　).

(A) $1-e^{\sqrt{x}}$　　(B) $\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$

(C) $\sqrt{x+\sqrt{x}}-1$　　(D) $1-\cos\sqrt{x}$

分析:由于当 $x\to 0^+$ 时,

$$1-e^{\sqrt{x}}\sim -\sqrt{x},$$

$$1-\cos\sqrt{x}\sim \frac{x}{2},$$

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-1\to -1,$$

所以选项 A,C,D 均不正确,

又 $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}-\frac{\ln(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right],$$

而 $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0,$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=-1,$$

所以 $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}=0-(-1)=1.$$

故当 $x\to 0^+$ 时,$\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}\sim\sqrt{x}$.

解:应选 B.

例 9 当 $x\to 0$ 时,$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小,则( ).

(A)$a=1,b=-\dfrac{1}{6}$ (B)$a=1,b=\dfrac{1}{6}$

(C)$a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$ (D)$a=-1,b=\dfrac{1}{6}$

分析:由题意知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$,且 $b\neq 0$.

而 $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin ax}{-bx^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^2},$$

可知应有 $a=1$,否则上面极限不可能等于 1. 从而有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{-3bx^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{-3bx^2}=-\frac{1}{6b}.$$

所以 $$-\frac{1}{6b}=1,$$

即 $$b=-\frac{1}{6}.$$

综上可知 $a=1,b=-\dfrac{1}{6}$.

解:应选 A.

例 10 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{(k+1)!}$.

分析:这是一个 n 项求和求极限的问题. 对这类问题首先应考虑是否这个和式能够求和,即用一个单项表示. 此时,所谓的"拆项法"要经常用到,即将和式"$\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$"写成"$\sum\limits_{k=1}^{n}(b_k-b_{k+1})$"的形式,再展开求和时就会有许多项"抵消",剩下一个单项形式. 然后再求极限.

解：$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{(k+1)!}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(k+1)-1}{(k+1)!}=\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\dfrac{1}{k!}-\dfrac{1}{(k+1)!}\right]$

$$=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$$

$$=1-\frac{1}{(n+1)!}.$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=1.$$

例 11 设 $f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\ln[f(1)f(2)\cdot\cdots\cdot f(n)]=$________.

分析：此题是 1999 年全国考研数学四的原题. 此题考查的是对数函数性质，数列极限的求法，以及利用对数性质运算.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln f(1)\cdot\cdots\cdot f(n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\ln f(i)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\ln a^i=\lim_{n\to\infty}\ln a\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i$$

$$=\lim_{n\to\infty}\ln a\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{\ln a}{2}.$$

解：应填 $\dfrac{1}{2}\ln a$.

例 12 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2-4}-x)$.

分析：此式中含有“$\infty-\infty$”的因子，不好判断其极限值，而且该因子含根号，常用的处理方法是分子分母同乘一个共轭根式来变形.

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2-4}-x)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt{x^2-4}-x)(\sqrt{x^2-4}+x)}{(\sqrt{x^2-4}+x)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x}{\sqrt{x^2-4}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}+1}=-2.$$

例 13 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x\sin^2 x}$.

分析：这是一个“$\dfrac{0}{0}$”型的极限，分母上可用等价无穷小替换为 x^3，但分子上是两个等价无穷小 $\tan x$ 与 $\sin x$，它们都与 x 等价但是不能都替换为 x，因为在加、减运算中不能用等价无穷小替换. 可以将分子也写成无穷小之积的形式，为此，将 $\tan x$ 提到括号外来.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x\sin^2 x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

注：这里用到了 $\tan x\sim x,1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}\ (x\to 0)$.

当 $x\to 0$ 时，常用的等价无穷小还有：$\ln(1+x)\sim x, e^x-1\sim x, (1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$ 等.

例 14 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{x\sin^2 x}$.