GAODENGSHUXUEXUEXIZHIDAO

面向21世纪普通高等教育规划教材辅导用书

(理工类)

高等数学学习指导（第2版）

主　编　邱淦俤　副主编　郑书富　张纪平　主 [illegible]

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

面向21世纪普通高等教育规划教材辅导用书

高等数学学习指导

（理工类）

第2版

主　编　邱淦俤

副主编　郑书富　张纪平

主　审　韩　明

同济大学出版社

TONGJI UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书是《面向21世纪普通高等教育规划教材——高等数学》(理工类)第2版的配套学习指导书，按对应教材的章节体系，系统地给出学习指导内容. 全书由函数、极限与连续，一元函数微分学，一元函数积分学，向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，多元函数积分学，无穷级数与微分方程共8章内容组成，每章包括内容精要、知识脉络图、难题解答、典型例题以及自我检测题等内容，同时给出自我检测题的答案与提示，并有三套模拟试题和参考解答.

本书可以帮助学生强化基础知识和提高解题能力，适合普通高等院校理工科本科各专业的学生学习及考研复习参考，可供成教学院或申请升本的专科院校的学生选用，也可供相关专业人员和广大教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导. 理工类/邱淦俤主编. --2版.
--上海:同济大学出版社，2011.5
(面向21世纪普通高等教育规划教材辅导用书)
ISBN 978-7-5608-4522-7

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①邱… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第031841号

面向21世纪普通高等教育规划教材辅导用书
高等数学学习指导(理工类)第2版
主　编　邱淦俤
副主编　郑书富　张纪平
主　审　韩　明
责任编辑　曹　建　　责任校对　徐春莲　　封面设计　潘向蓁

出版发行　同济大学出版社　　www.tongjipress.com.cn
(地址:上海市四平路1239号　邮编:200092　电话:021－65985622)
经　销　全国各地新华书店
印　刷　同济大学印刷厂
开　本　787mm×960mm　1/16
印　张　15.5
印　数　1—4100
字　数　310000
版　次　2011年5月第2版　　2011年5月第1次印刷
书　号　ISBN 978-7-5608-4522-7

定　价　26.00元

前　言

本书是《面向21世纪普通高等教育规划教材——高等数学》(理工类)第2版上、下册的配套学习指导书.鉴于主课教材已修改并出版了第2版,为了与主课教材衔接更为紧凑,内容更为一致,故对本指导书第1版进行修订.在本次修订中,除订正第1版印刷上的错误之外,还根据主课教材(第2版)的内容,补充、更换了第1版中较多部分的内容与例题,以期从整体上能与主课教材(第2版)有机结合,互为呼应,使读者得到更大益处.

本次修订工作,由林秀清、张敏、陈大波、周仙耕、赵小珍完成,由邱淦俤统一整理、组织和审订.

限于作者水平,书中错误与不足之处难免,敬请广大读者不吝赐正.

邱淦俤

2011年5月

第 1 版前言

为适应当前高等教育改革需要，根据教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”，结合扩招及新升本科院校的学生基础和教学特点，我们九所本科院校联合编写了《面向21世纪普通高等教育规划教材》. 该套教材按照本科各类数学基础课程教学的基本要求，以“够用”为原则进行编写，各教材渗透现代化教学思想和手段，注重学生实际应用能力的培养，力求做到易教、易学、易懂，以达到培养高质量应用型人材的目的.

本书是《面向21世纪普通高等教育规划教材——高等数学》(理工类)上、下册的配套学习指导书，按主课教材的章节体系，系统地给出学习指导内容，每章包括内容精要、知识脉络图、难题解答、典型例题以及自我检测题等内容.

内容精要，是本章内容的高度概括与归纳. 通过它能帮助学生掌握本章主要的知识点.

知识脉络图，把本章主要知识点的联系通过脉络图的形式刻画出来. 通过它能帮助学生对本章的基本概念与主要结论的联系有一个较为清晰的认识，从而帮助学生更好地从整体上理解和掌握本章的内容.

难题解答，通过若干道难题对学生在概念认识和定理结论的掌握与使用上可能会出现的错误进行分析解答. 通过它能帮助学生准确地理解、掌握和使用有关的概念与定理结论.

典型例题，对典型例题进行详细的分析、解答和注释，涵盖常见错误，部分还加有“注”进行必要的说明、分析. 通过它能使学生巩固所学的知识，加深对本章内容的理解，掌握综合分析的思维方法，提高分析问题、解决问题的能力与计算技能、技巧.

自我检测题，内容涵盖了本章的主要知识点，题型有选择题、填空题、解答题、证明题等. 通过它能帮助学生了解自身掌握本章知识的程度.

本书尽力做到知识系统化，讲解深入浅出，有“指”可“导”，好学易懂，以帮助学生强化基础知识和提高解题能力，适合普通高等院校(尤其是扩招后本科院校及新升本科院校)理工科各专业的学生学习参考，也可供申请升本的专科院校或成教学院的学生选用，还可供相关专业人员和广大教师参考.

本书由邱淦俤主编，郑书富、张纪平副主编. 参加本书编写的人员有郑书富(第1,2章)、刘墨德(第3章不定积分部分)、郑雪静(第3章定积分及其应用部分)、陈大波、周先耕(第4章)、邱淦俤、林秀清(第5章)、赵小珍、张敏(第6章)、

杨昔阳(第7章)、黄东兰(第8章). 全书最后由邱淦俤进行统稿和重新组织整理.

本书由韩明教授主审,李林老师参与了审稿工作. 他们对本书进行了深入细致的审读,提出了许多宝贵的修改意见和建议,我们在此表示诚挚的谢意! 同时,对关心和支持本书编写工作的各单位领导、专家一并表示衷心的感谢!

由于作者水平与学识有限,本书疏漏与错误之处在所难免,恳请大家批评指正.

邱淦俤

2007年6月

目　次

第 1 章　函数、极限与连续

1.1　内容精要

1.1.1　函　数

1. 函数的概念、表示法、复合函数、反函数.

2. 基本初等函数

常数，幂函数，指数函数，对数函数，三角函数，反三角函数.

3. 初等函数与非初等函数的概念.

4. 函数的特性

有界性，单调性，奇偶性，周期性.

1.1.2　极　限

1. 数列极限的"ε-N"定义.

2. 两类函数极限（$x \to \infty$；$x \to x_0$）的"ε-M"与"ε-δ"定义，左、右极限的概念.

3. 数列（函数）极限的性质

唯一性，有界（局部有界）性，保号（局部保号）性.

4. 极限存在准则

（1）单调有界数列必有极限

（2）夹逼准则

① 若 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

② 若 $\forall x \in U(x_0)$ 有 $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$，且$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$，则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

5. 两个重要极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$;

(2)′ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$，或$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$.

6. 无穷大量与无穷小量

(1) 无穷大量与无穷小量的概念.

(2) 运算性质

① 有限个无穷小量的和、差、积仍为无穷小量.

② 有界量与无穷小量的积是无穷小量.

③ 无穷大量的积仍为无穷大量.

④ 无穷小量(无穷大量)的商不确定.

⑤ 无穷小量与无穷大量的乘积不确定.

(3) 无穷大量与无穷小量的阶的概念.

7. 无穷小量与极限的关系

$$\lim f(x) = A \Longleftrightarrow f(x) = A + \alpha \quad (\lim \alpha \to 0).$$

1.1.3 连续函数

1. 在点 x_0 处连续的概念

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

(2) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$ ($\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$).

2. $f(x)$ 在 x_0 点处连续$\Longleftrightarrow f(x)$ 在 x_0 点处左连续且右连续.

3. 间断点的分类

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$，第一类间断点.

(2) $f(x_0+0)$ 与 $f(x_0-0)$ 存在但不相等，第一类间断点.

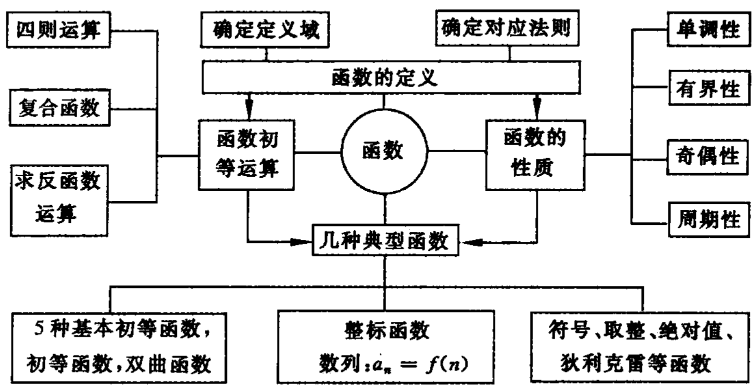
(3) $f(x_0+0)$ 与 $f(x_0-0)$ 至少有一个不存在，第二类间断点.

1.1.4 闭区间上连续函数的性质

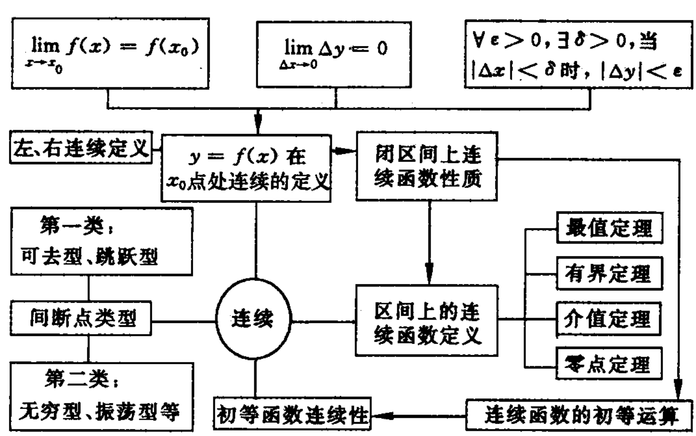
有界性，最值性，介值性，零点定理.

1.2 知识脉络图

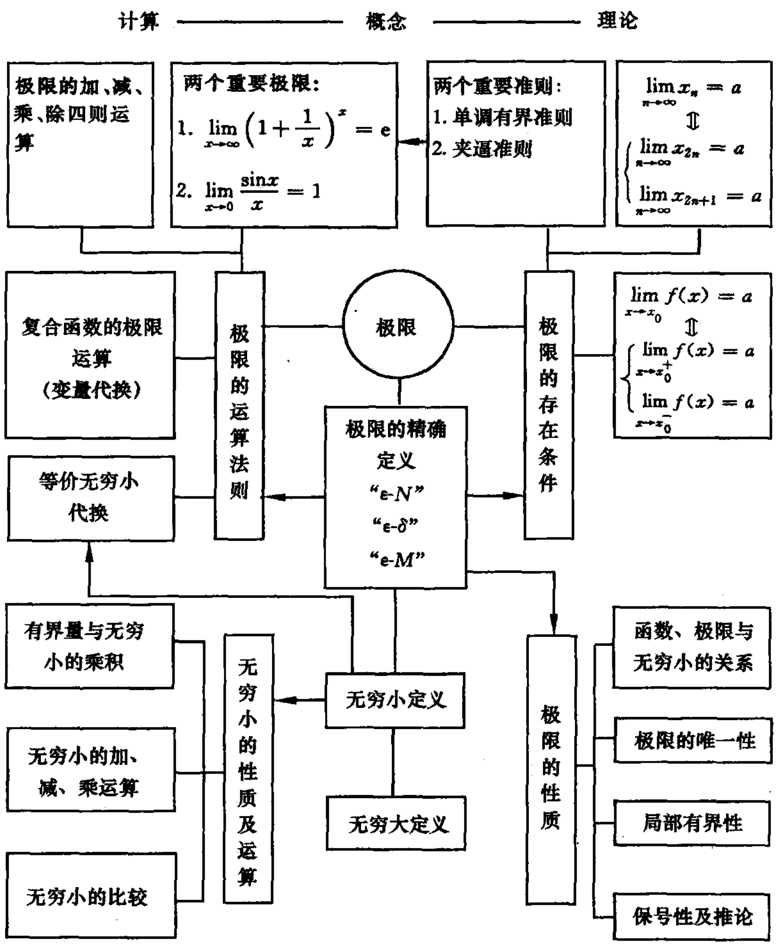
1.2.1 函 数



1.2.2 连 续



1.2.3 极　限



1.3　难题解答

例 1　求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})$.

解　原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+3\sqrt{n}-(n-\sqrt{n})}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}$

$$= 4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+3\sqrt{\frac{1}{n}}}+\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{n}}}} = 2.$$

注　对于含有根式加减运算的极限计算，通常先进行分母或分子的有理化，并将其整理成一个式子后再作极限运算.

例 2　证明：若 $a_0 = a > 0, a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}}\right), n = 1,2,\cdots$，则数列 $\{a_n\}$ 收敛，并求其极限.

证明　对任意的 $n \in \mathbf{N}, a_n > 0$ 即数列 $\{a_n\}$ 有下界.

此外，
$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) - a_n = \frac{2 - a_n^2}{2a_n},$$

由于 $a_n \geqslant \frac{1}{2}\left(2\sqrt{a_{n-1}\frac{2}{a_{n-1}}}\right) = \sqrt{2}$，因此 $a_n^2 \geqslant 2, a_{n+1} - a_n \leqslant 0$.

即数列 $\{a_n\}$ 单调减少. 故数列 $\{a_n\}$ 存在极限.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}}\right)$，即 $A = \frac{1}{2}\left(A + \frac{2}{A}\right)$，

解得 $A = \pm\sqrt{2}$，由极限的保号性有 $A \geqslant 0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$.

例 3　设数列 $a_n = \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{n}{(n+n)^2}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

解　因为
$$n\left(\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k+1}\right) < \frac{n}{(n+k)^2} < n\left(\frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}\right)$$
$$(1 \leqslant k \leqslant n),$$

于是，有
$$n\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+1}\right) \leqslant a_n \leqslant n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\right)，即 \frac{n^2}{(n+1)(2n+1)} \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{2}.$$

又因为　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{2}$，于是由夹逼准则可得 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

注　下述解法是错误的：
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)^2} + \lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+2)^2} + \cdots + \lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+n)^2}$$
$$= 0 + 0 + \cdots + 0 = 0.$$

原因在于无限多个无穷小量的和不一定是无穷小量.

例 4 求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}$($a$ 为任意实数).

解法 1(利用夹逼准则)

(1) 若 $a>0$,可选定一个正整数 k,使 $k>a$,则当 n 充分大时,

$$0<\frac{a^n}{n!}=\frac{a^k}{k!}\cdot\frac{a}{k+1}\cdot\frac{a}{k+2}\cdot\cdots\cdot\frac{a}{n}<\frac{a^k}{k!}\left(\frac{a}{k}\right)^{n-k}$$

$$=\frac{a^k}{k!}\left(\frac{a}{k}\right)^{-k}\left(\frac{a}{k}\right)^n=\frac{k^k}{k!}\left(\frac{a}{k}\right)^n.$$

因 $0<\frac{a}{k}<1$,故$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{k^k}{k!}\left(\frac{a}{k}\right)^n=0$,

所以
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n!}=0\ (a>0).$$

(2) 若 $a<0$,令 $a=-b$,则 $b>0$,因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a^n}{n!}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^nb^n}{n!}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{b^n}{n!}=0,$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0\quad(a<0).$$

(3) 若 $a=0$,则对任何 n,$\frac{a^n}{n!}$ 为常数零.因此,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0\ (a=0)$.

故对任何实数 a,都有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0.$$

解法 2(利用单调有界数列必有极限)

(1) 当 $a>0$ 时,$x_n=\frac{a^n}{n!}=\frac{a^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{a}{n}=x_{n-1}\frac{a}{n}$;

当 $n>a$ 时,$\frac{a}{n}<1$.所以,$x_n<x_{n-1}$.

又对任何 n,有 $x_n>0$.故当 $a>0$ 且 $n>a$ 时,$\frac{a^n}{n!}$ 单调减少而且有下界.因此,$\frac{a^n}{n!}$ 在 $n\to\infty$ 过程中存在极限.设 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=l$,则由 $x_n=x_{n-1}\frac{a}{n}$ 两边取极限得 $l=l\cdot 0$,故 $l=0$.

因此,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0\ (a>0)$.

(2) 当 $a\leqslant 0$ 时,求解方法与解法 1 的解法相同.

例 5 求$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{4}\cdot\cdots\cdot\cos\dfrac{x}{2^n}$.

解 当$x=0$时,$\cos\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{4}\cdot\cdots\cdot\cos\dfrac{x}{2^n}=1$.

当$x\neq 0$时,

$$\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{x}{2^n}=\frac{1}{\sin\frac{x}{2^n}}\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{x}{2^n}\cdot\sin\frac{x}{2^n}$$

$$=\frac{1}{\sin\frac{x}{2^n}}\cdot\frac{\sin x}{2^n}=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}.$$

注意到$n\to\infty$时,$\dfrac{x}{2^n}\to 0$,$\dfrac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}\to 1$,

所以当$x\neq 0$时,$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{4}\cdot\cdots\cdot\cos\dfrac{x}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}=\dfrac{\sin x}{x}$.

注 对于无穷多个项的积或和的极限的计算,一般利用初等变换先求出积或和,再求极限.

例 6 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\sin\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$.

解 当$x\to 0$时,$\ln(1+x)\sim x$,$\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)=2$.

因此,原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\sin\frac{1}{x}}{(1+\cos x)x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3}{1+\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{1+\cos x}=\frac{3}{2}+\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}$$

$$=\frac{3}{2}+0=\frac{3}{2}.$$

注 (1) 等价无穷小量替换仅适用于替换乘除因子的情形,在加减的情形时可能不成立.

(2) 题中$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$是因为$\lim\limits_{x\to 0}x=0$,$\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$.由“无穷小量与有界

量的乘积还是无穷小量”得到. 此处易发生错解：$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x \lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x} = 0$，但这里 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在.

例 7　求极限 $\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{(\pi-\arccos x)^2}{1+x}$.

解　令 $\arccos x = t$，则 $x=\cos t$.

则

$$\text{原式} = \lim_{t\to\pi^-}\frac{(\pi-t)^2}{1+\cos t} = \lim_{t\to\pi^-}\frac{(\pi-t)^2}{1-\cos^2 t}\cdot(1-\cos t)$$

$$= 2\lim_{t\to\pi^-}\frac{(\pi-t)^2}{\sin^2 t} = 2\lim_{t\to\pi^-}\frac{1}{\left[\frac{\sin(\pi-t)}{\pi-t}\right]^2} = 2.$$

注　代换法是极限计算中常用的方法.

例 8　求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

解　(1) 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos x+\cos x(1-\cos 2x)}{1-\cos x}+\frac{\cos x\cos 2x(1-\cos 3x)}{1-\cos x}\right]$

$$= \lim_{x\to 0}\left(1+2\frac{\cos x\sin^2 x}{1-\cos x}+\cos x\cos 2x\cdot\frac{1-\cos 3x}{1-\cos x}\right)$$

$$= 1+2\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}+\lim_{x\to 0}\cos x\cos 2x\cdot\frac{\frac{1}{2}(3x)^2}{\frac{1}{2}x^2}$$

$$= 1+4+9 = 14.$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\ln\cos x}$，

而 $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{x^2}}\ln\cos x = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}\cdot\frac{\ln[1+(\cos x-1)]}{\cos x-1}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln[1+(\cos x-1)]}{\cos x-1} = -\frac{1}{2}.$$

因此，$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$.

例 9　判断函数 $f(x) = \begin{cases} |x|, & |x|\leqslant 1, \\ \frac{x}{|x|}, & 1<|x|\leqslant 3 \end{cases}$ 在其定义域内是否连续.

解 将题设分段函数去掉绝对值符号，写成如下分段函数的形式：

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -3\leqslant x<-1,\\ -x, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ x, & 0<x\leqslant 1,\\ 1, & 1<x\leqslant 3.\end{cases}$$

由初等函数的连续性，知 $f(x)$ 在各分段区间内是连续的且在$[-3,3]$的两端点 $x=-3$ 处是右连续，在 $x=3$ 处是左连续．下面仅讨论 $f(x)$ 在各分段点处的连续性．

$\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}(-1)=-1\neq f(-1)=1$，故 $x=-1$ 是间断点．

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(-x)=0=f(0)$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}x=0=f(0)$，

故 $x=0$ 是连续点．

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}x=1=f(1)$，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}1=1=f(1)$，故 $x=1$ 是连续点．

综上所述，$f(x)$ 在其定义域$[-3,3]$上仅有一个间断点 $x=-1$；即在$[-3,3]$上不连续．

例 10 求证方程 $x+p+q\cos x=0$ 恰有一实根，其中，p,q 为常数，且 $0<q<1$．

证明 先证存在性．记 $f(x)=x+p+q\cos x$，由初等函数的连续性可知 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续．又由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ 知存在 $a>0$，使 $f(a)>0$；由 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ 知存在 $b<0$，使 $f(b)<0$．显然 $f(x)$ 在$[a,b]\subset\mathbf{R}$ 上连续，故至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=0$，即方程 $x+p+q\cos x=0$ 至少有一实根．

下证唯一性．任给 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1<x_2$，则 $x_2-x_1>0$．

$$\begin{aligned}f(x_2)-f(x_1)&=x_2-x_1+q(\cos x_2-\cos x_1)\\&=x_2-x_1-2q\sin\frac{x_1+x_2}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2}\\&>x_2-x_1-2\left|\sin\frac{x_2-x_1}{2}\right|\quad(0<q<1)\\&>x_2-x_1-2\,\frac{x_2-x_1}{2}=0.\end{aligned}$$

因此，$f(x_2)>f(x_1)$．由 x_1,x_2 的任意性知 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上单调递增，故 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内至多有一个零点．