罗桂生 编著

厦门大学出版社

# 线性代数

XianxingDaishu

高等学校教材

# 线 性 代 数

罗桂生　编著

厦门大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

线性代数/罗桂生编著. —厦门:厦门大学出版社,2000.9(2007.8 重印)
ISBN 978-7-5615-1795-6

Ⅰ.线… Ⅱ.罗… Ⅲ.线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 053247 号

厦门大学出版社出版发行
(地址:厦门大学　邮编:361005)
http://www.xmupress.com
xmup @ public.xm.fj.cn
沙县方圆印刷有限公司印刷
2001 年 9 月第 1 版　2007 年 8 月第 2 次印刷
开本:787×1092　1/16　印张:13
字数:332 千字　印数:3201～7200 册
定价:23.00 元

# 内容提要

全书共分六章，内容包括：矩阵及其运算，$n$ 阶行列式，$n$ 维向量空间，线性方程组及其数值解法，二次型及矩阵的相似变换，线性空间及线性变换. 每章均附有习题，书末附有综合练习题. 习题及综合练习题的计算题部分均给出答案或提示，供读者查核参考. 此外，本书还有两个附录：附录一、代数方程的根式可解性简介；附录二、线性代数的 Matlab 常用指令与例. 在本书的最后还附有术语索引（汉英对照），以供读者查阅.

本书可作为高等院校非数学专业《线性代数》课程的教材或教学参考用书.

# 前言

本书是作者 1998—2000 年在原福建林学院为非数学专业的学生讲授《线性代数》课程编写的讲义基础上改写而成的.

按照现行的《线性代数》教学大纲，本书主要介绍了线性代数的基础知识. 为便于讲授和自学，叙述上力求深入浅出、前后连贯、推理详尽. 为此，一些概念的引入尽量从浅显的例子开始，每章乃至每节开始都简要介绍了要讨论的主要问题及上下之间的联系，而凡所涉及到的定理几乎都给出了证明，对于那些较复杂的求解方法则给出了明确的解题步骤.

全书除安排一定数量的例题外，每章还配有必要的习题，可以作为课外练习. 最后还安排有综合练习题，以便复习时练习. 习题及综合练习题的计算题部分均给出答案或提示，以供教师选用，也便于读者自学时参考查核.

此外，书末还有两个附录：附录一、代数方程的根式可解性简介；附录二、线性代数的 Matlab 常用指令与例. 前者是为了帮助自学的读者了解《线性代数》的发展背景，而后者则是为了配合数学实验的教学.

使用本书作教材时，全书前五章的内容除带"*"号部分外，讲授约需 34 学时（其中第二章"行列式的计算"一节，可安排自学），大体可按 6、6、10、4、8 学时的顺序进行分配. 若要讲完全书的内容，约需 50 学时. 自学读者，遇到带"*"号的定理证明，可先不看它，或只需记住定理的条件与结论即可.

本书的出版得到了本教研室全体同仁的帮助和支持，根据使用这本教材讲义的情况，不少同志给作者提出了许多宝贵的意见和建议，作者在此表示由衷的感谢.

由于作者水平所限，编写中难免有不妥之处，热忱欢迎读者批评指正.

作　者

2001 年 7 月

# 目　录

# 导　言

线性代数是代数学的一个分支，它研究的主要内容是有限维空间的代数结构以及有限维空间的线性映射. 线性代数其实是初等代数基本内容很自然的扩展. 初等代数的中心问题是解方程，从一个未知量的一元一次方程出发，向着两个方向发展：

一方面，发展为研究只含一个未知量但有任意次数的单独一个方程的学科，称为多项式代数. 它的发展起源于一元二次方程的求根公式，早在公元前 2 000 年前，巴比伦人就已经知道了这样的求根公式. 之后，到了 16 世纪找到了三次和四次方程的求根公式，但直到 19 世纪初期才得知五次及五次以上的方程是没有求根公式的. 这方面较为详细的情况读者可参看本书的附录一. 多项式代数的中心问题是根的存在问题. 大家知道，在实数范围内并不是每一个代数方程都有根的. 但在复数域内，每一个 $n$ 次代数方程都至少有一个根，从而有 $n$ 个根（重根应重复计算）. 这便是著名的代数学基本定理. 高斯（C.F.Gauss，德国数学家，1777—1855）第一个对这一定理给出严格的证明，并把它选择为自己博士论文的论题，那时他才 20 岁. 高斯一生对基本定理一共给出四个严格的证明，最后一个证明是在他 73 岁高龄时完成的.

虽然高次方程没有求根公式，但这并不妨碍求得方程具有一定准确度的近似解. 多项式代数的一个重要任务就是研究方程的近似解法. 早在公元 7 世纪初，我国唐朝的王孝通（约 630 年）就提出三次方程的近似解法，用于解决工程中出现的问题，他是世界上最早提出三次方程代数解法的人. 而我国著名数学家秦九韶（约 1202—1261）提出的解高次方程的“增乘开方法”，西方称为霍纳（W.G.Horner，英国数学家，1786—1837）法，但要晚我国五六百年. 随着计算机的发展，这方面的任务已经不是什么难题了.

另一方面，与多项式代数平衡发展的是线性代数基础，它是从研究任意一次方程组即线性方程组这一问题发展起来的. 公元 1 世纪，我国《九章算术》里已有线性方程组的解法实例. 1764 年，法国的培祖（E，Bezout，1730—1783）用行列式建立了线性方程组的一般理论. 在西方，行列式被认为是 1693 年德国数学家莱布尼兹（G.W.Leibniz，1646—1716）发明的. 实际上，“行列式”这个词和行列式两边的两条竖线都是法国数学家柯西（A.L.Cauchy，1789—1857）给出的. 克莱姆（G.Cramer，瑞士数学家，1704—1752）和拉普拉斯（P.S.Laplace，法国数学家，1749—1827）则发展了行列式理论. 为了研究未知量的个数和方程的个数是任意的情形，克莱姆、西尔维斯特（J.J.Sylvester，英国数学家，1814—1897）、凯莱（A.Cayley，英国数学家，1821—1895）等人建立了矩阵论. 同时，为了研究线性方程组，还引进多维向

量空间的概念. 线性代数基本上是讨论矩阵理论以及和矩阵有关的向量空间线性变换的一个大的学科，而且其应用范围远不只限于线性方程组的理论，直到现在线性代数仍在各种代数分支中占有首要的地位. 本书所述的线性代数仅是它的初等部分，它和多项式代数一起构成高等代数的主要内容.

将数学的两大因素——抽象和应用结合在一起，是线性代数的一大特点. 以往线性代数在数学、力学、物理学、化学和技术科学等领域有着多种重要作用，特别是计算数学中一切方法都无一例外地以线性代数为基础. 现在，随着经济和科技，以及计算机技术的飞速发展，使得它在各种工程领域，乃至于生态学、经济学和社会科学等都有广泛的应用，线性代数已成为越来越多的科技工作者必不可少的数学工具.

# 第一章　矩　阵

矩阵是从一些实际问题中抽象出来的一个数学概念，是线性代数的重要工具，它在数学、工程技术、经济学等方面有着广泛的应用. 本章介绍矩阵的概念及其运算，矩阵的分块，方阵的逆阵与矩阵的初等变换等内容.

## § 1.1 矩阵的概念

为了给出矩阵的概念，先介绍一个产销平衡的运输问题.

某物资需要从产地 $A_1$、$A_2$、$A_3$ 调往销地 $B_1$、$B_2$、$B_3$、$B_4$，它们的平衡表和单位运价表如下 (注意，这里所谓产销平衡是指全部产地的总产量等于全部销地的总销售量):

表 1.1　平衡表　　　（单位：t）　　运价表　（单位：元 /t）

| 销地 / 产地 | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | 产量 | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $x_{11}$ | $x_{12}$ | $x_{13}$ | $x_{14}$ | 55 | 3 | 2 | 9 | 2 |
| $A_2$ | $x_{21}$ | $x_{22}$ | $x_{23}$ | $x_{24}$ | 55 | 7 | 4 | 8 | 5 |
| $A_3$ | $x_{31}$ | $x_{32}$ | $x_{33}$ | $x_{34}$ | 80 | 4 | 1 | 3 | 6 |
| 销量 | 45 | 55 | 60 | 30 | | | | | |

设从产地 $A_i$ 调往销地 $B_j$ 的数量为 $x_{ij}$，该问题要求根据表上已知数据求出最优的调运方案即各 $x_{ij}$ 的值，使总的运费最少. 这里不打算深入讨论这一问题，有兴趣的读者可以阅读有关线性规划的参考书籍.

由运价表可以得到一组数据，将它们按表上原来的位置排列成

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 9 & 2 \\ 7 & 4 & 8 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \tag{1}$$

由平衡表可以得到销量和产量的两组数据，不改变原来横行和竖列的排列形式，它们分别是

$$(45，55，60，30)，\quad \begin{pmatrix} 55 \\ 55 \\ 80 \end{pmatrix} \tag{2}$$

此外，调运方案中的调运量 $x_{ij}$ 也是一组数据，单独列出来就是

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{pmatrix} \tag{3$$

以上每一组数据或数表本身是一个整体，因此都给它们加上方括号(或圆括号).

把表 1.1 中的数据作这样处理后，将方便调运方案本身的讨论. 在许多实际问题中，都可以发现类似这种形式的数表. 因为这种数表的排列形状呈矩形阵列，故名矩阵.

**定义 1.1** 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 组成的 $m$ 行 $n$ 列的矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{4$$

称为 $m\times n$ **矩阵**，记作 $A_{m\times n}$ 或 $A$，其中 $a_{ij}$ 称为矩阵的第 $i$ 行第 $j$ 列的**元素**. 元素是实数的矩阵称为**实矩阵**，元素是复数的矩阵称为**复矩阵**. 以后除特别说明外，均指实矩阵. 矩阵 $A$ 也可记作

$$A=(a_{ij})_{m\times n} \quad 或 \quad A=(a_{ij})$$

例如，(1)或(3)都是 3×4 矩阵，而(2)中前者是 1×4 矩阵，后者是 3×1 矩阵.

只有一行的矩阵，即 $1\times n$ 矩阵

$$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

称为**行矩阵**. 为今后讨论问题方便，行矩阵的元素之间要用逗号隔开. 只有一列的矩阵，即 $m\times 1$ 矩阵

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

称为**列矩阵**. 约定只有一个数 $a$ 组成的 1×1 矩阵 $(a)$ 就看作是这个数，即有 $(a)=a$.

当 $m=n$ 时，矩阵 A 称为 $n$ **阶方阵**或 $n$ **阶矩阵**. 例如，矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 9 & -1 \\ 8 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

为三阶矩阵或三阶方阵.

如果矩阵的所有元素都是零，则称此矩阵为**零矩阵**，记作 $0_{m\times n}$ 或 $\mathbf{0}$.

在 $n$ 阶方阵中，从左上角到右下角的对角线称为**主对角线**，从右上角到左下角的对角线称为**次对角线**，如果一个方阵的主对角线下（上）方的元素全为零，则称此方阵为**上（下）三角矩阵**. 上三角矩阵和下三角矩阵统称为**三角矩阵**.

例如，矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 5\\ 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 4\end{pmatrix}$$

分别是三阶上三角矩阵和三阶下三角矩阵.

除了主对角线元素外，其余元素全为零的方阵称为**对角矩阵**，简称**对角阵**. 显然，对角阵既是上三角矩阵，也是下三角矩阵. 一般 $n$ 阶对角矩阵简记作 $diag(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$.

主对角线上的元素全都相同的对角阵称为**数量矩阵.** 例如下面三个对角阵

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}k & 0 & \cdots & 0\\ 0 & k & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & k\end{pmatrix}$$

中，后面两个是数量矩阵.

特别地,主对角线上的元素都是 1 的对角阵称为**单位矩阵**，简称**单位阵**，记作 $E$，即

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

如果 $A$ 与 $B$ 都是 $m\times n$ 矩阵，则称它们是**同型的.**

**定义 1.2** 如果矩阵 $A=(a_{ij})$ 与 $B=(b_{ij})$ 都是 $m\times n$ 矩阵，且对应的元素都相等，即

$$a_{ij}=b_{ij}\,(i=1,2,\cdots,m;\, j=1,2,\cdots,n),$$

则称矩阵 $A$ 与矩阵 $B$ **相等**，记作 $A=B$.

例如，如果矩阵

$$A=\begin{pmatrix}-2 & x & 0\\ y & 1 & z\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 7\end{pmatrix}$$

那么 $A=B$，当且仅当

$$x=3,\quad y=0,\quad z=7.$$

注意，**两个矩阵相等的首要条件是:它们是同型的**.

## §1.2 矩阵的运算

矩阵可以说是一个“复合”的对象，在它里面有很多元素出现，而这些元素都是通常的数. 它们在实际问题的计算中所反映出来的整体性质和规律用矩阵记号来表示具有简单性和概括性，使得很自然地要引入矩阵的运算. 应用矩阵运算可以使复杂的关系式变得简单、明了，使冗长的推导变得简短、快捷.

矩阵的运算有矩阵的加法、矩阵的数乘、矩阵的乘法、矩阵的转置等.

## 一、矩阵的加法与数乘

**定义 1.3** 设 $A=(a_{ij})$ 与 $B=(b_{ij})$ 都是 $m\times n$ 矩阵，$\lambda$ 是数，称矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}=(a_{ij}+b_{ij})$$

为**矩阵 $A$ 与 $B$ 的和**，记作 $A+B$；称矩阵

$$\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}=(\lambda a_{ij})$$

为**数 $\lambda$ 与矩阵 $A$ 的乘积**，简称为**矩阵的数乘**，记作 $\lambda A$ 或 $A\lambda$.

由上述定义可知，两个同型矩阵相加等于它们的对应元素相加；数乘矩阵等于[illegible]每一个元素.

注意，只有 $A$ 与 $B$ 是同型矩阵时，$A+B$ 才有意义.

如果两个同型矩阵 $A$ 与 $B$ 的和是零矩阵，即

$$A+B=0$$

则称 $B$ 是 $A$ 的**负矩阵**，记作 $-A$. 于是，若 $A=(a_{ij})$，则

$$-A=(-a_{ij})$$

由矩阵加法及负矩阵，可以定义**矩阵的减法**：

$$A-B=A+(-B)$$

即如果 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}$，则

$$A-B=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}$$

称 $A-B$ 为**矩阵 $A$ 与 $B$ 的差**.

矩阵的加法和数乘运算称为**线性运算**，由数的四则运算规律容易验证矩阵的线性运算满足下列运算规律（设 $A$、$B$、$C$ 都是 $m\times n$ 矩阵，$\lambda$、$\mu$ 是数）：

(i) 加法交换律 $A+B=B+A$；

(ii) 加法结合律 $(A+B)+C=A+(B+C)$；

(iii) 零矩阵满足 $A+0=0+A=A$；

(iv) 负矩阵满足 $A+(-A)=(-A)+A=0$；

(v) 数 1 与矩阵满足 $1A=A$；

(vi) 数与矩阵的结合律 $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$；

(vii) 数对矩阵的分配律 $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$；

(viii) 矩阵对数的分配律 $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$.

## 二、矩阵的乘法

**定义 1.4** 设 $A=(a_{ij})$ 是 $m\times s$ 矩阵，$B=(b_{ij})$ 是 $s\times n$ 矩阵，规定**矩阵 $A$ 与矩阵 $B$ 的乘积**是一个 $m\times n$ 矩阵 $C=(c_{ij})$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj},(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n) \qquad (5)$$

矩阵 $A$ 与 $B$ 的乘积记作 $AB$，即

$$C=AB$$

根据定义，两个矩阵能够相乘的充要条件是：第一个矩阵 $A$（位于左边）的列数等于第二个矩阵 $B$（位于右边）的行数. 同时，乘积矩阵 $C=AB$ 的第 $i$ 行第 $j$ 列的元素 $c_{ij}$ 等于第一个矩阵 $A$ 的第 $i$ 行与第二个矩阵 $B$ 的第 $j$ 列对应元素的乘积之和.

**例 1.1** 设

$$A=\begin{pmatrix}3&1&0\\2&-1&2\\0&7&-3\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2&-1\\0&2\\1&3\end{pmatrix}$$

计算 $AB$.

**解** 因为矩阵 $A$ 的列数与矩阵 $B$ 的行数都是 3，所以矩阵 $A$ 与 $B$ 可以相乘，且乘积矩阵 $AB$ 的行数和列数分别与矩阵 $A$ 的行数 3 和矩阵 $B$ 的列数 2 相等，即矩阵 $AB$ 是一个 $3\times2$ 矩阵，有

$$AB=\begin{pmatrix}3&1&0\\2&-1&2\\0&7&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\0&2\\1&3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3\times2+1\times0+0\times1&3\times(-1)+1\times2+0\times3\\2\times2-1\times0+2\times1&2\times(-1)-1\times2+2\times3\\0\times2+7\times0-3\times1&0\times(-1)+7\times2-3\times3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-1\\6&2\\-3&5\end{pmatrix}$$

**例 1.2** 设

$$A=\begin{pmatrix}4\\1\\-3\end{pmatrix},\qquad B=(2,\ -1,\ 1)$$

计算 $AB$ 及 $BA$.

**解** $AB$ 是一个 $3\times3$ 矩阵，而 $BA$ 是一个 $1\times1$ 矩阵即一个数，有

$$AB=\begin{pmatrix}4\\1\\-3\end{pmatrix}(2,\ -1,\ 1)=\begin{pmatrix}8&-4&4\\2&-1&1\\-6&3&-3\end{pmatrix}$$

$$BA=(2,\quad -1,\quad 1)\begin{pmatrix}4\\1\\-3\end{pmatrix}=(4)=4$$

**例 1.3** 设某种物资有三个产地 $A_1$、$A_2$、$A_3$ 和四个销地 $B_1$、$B_2$、$B_3$、$B_4$，调运时采铁路或公路运输. 铁路和公路担负各产地运量的百分比列如表 1.2，而铁路和公路为各销地运送量占各自运送该物资总量的百分比列如表 1.3. 试求每一个产地供应各个销地的数量占产量的百分数；如果产地 $A_1$、$A_2$、$A_3$ 的产量分别为 $x_1=100$ t、$x_2=200$ t、$x_3=150$ 试求各个销地的销量.

表 1.2　铁路和公路运量的百分比（%）

| 运输部门 / 产地 | 铁路 | 公路 |
|---|---|---|
| $A_1$ | 30 | 70 |
| $A_2$ | 50 | 50 |
| $A_3$ | 40 | 60 |

表 1.3　各个销地运送量的百分比（%）

| 销地 / 运输部门 | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |
|---|---|---|---|---|
| 铁路 | 20 | 30 | 30 | 20 |
| 公路 | 10 | 0 | 40 | 50 |

**解**　用 $A=(a_{ij})_{3\times2}$、$B=(b_{ij})_{2\times4}$ 分别表示表 1.2、表 1.3 的百分比（化为小数），即

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix}0.3&0.7\\0.5&0.5\\0.4&0.6\end{pmatrix},\qquad B=(b_{ij})=\begin{pmatrix}0.2&0.3&0.3&0.2\\0.1&0&0.4&0.5\end{pmatrix}$$

(注意，$A$、$B$ 各行之和都等于 1，即 100%). 设产地 $A_i$ 供应销地 $B_j$ 的数量占产地 $A_i$ 产量百分数为 $c_{ij}$，则

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}(i=1,2,3;\ j=1,2,3,4)$$

于是，根据矩阵的乘法

$$C=(c_{ij})_{3\times4}=AB=\begin{pmatrix}0.3&0.7\\0.5&0.5\\0.4&0.6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.2&0.3&0.3&0.2\\0.1&0&0.4&0.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.13&0.09&0.37&0.41\\0.15&0.15&0.35&0.35\\0.14&0.12&0.36&0.38\end{pmatrix}$$

由计算结果，矩阵 $C$ 第一行的元素：$c_{11}=0.13,c_{12}=0.09,c_{13}=0.37,c_{14}=0.41$，从而可产地 $A_1$ 供应销地 $B_1$、$B_2$、$B_3$、$B_4$ 的数量分别占产地 $A_1$ 产量的 13%、9%、37%、41%，

余类推.

如果销地 $B_1$、$B_2$、$B_3$、$B_4$ 的销量分别为 $y_1$、$y_2$、$y_3$、$y_4$，则

$$y_j = x_1c_{1j} + x_2c_{2j} + x_3c_{3j}, \quad (j=1,2,3,4)$$

若记 $X=(x_1,x_2,x_3)=(100,200,150)$， $Y=(y_1,y_2,y_3,y_4)$ ，有

$$Y = XC = (100,200,150)\begin{pmatrix} 0.13 & 0.09 & 0.37 & 0.41 \\ 0.15 & 0.15 & 0.35 & 0.35 \\ 0.14 & 0.12 & 0.36 & 0.38 \end{pmatrix} = (64,57,161,168)$$

即四个销地的销量分别为： $y_1$=64 t， $y_2$=57 t， $y_3$=161 t， $y_4$=168 t.

此例表明矩阵的乘法是有实际意义的.

矩阵的乘法与数乘满足下列运算规律：

（i）乘法结合律 $(AB)C=A(BC)$；

（ii）左乘分配律 $A(B+C)=AB+AC$，

右乘分配律 $(B+C)A=BA+CA$；

（iii）数乘结合律 $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$（$\lambda$ 是数）.

**证** （i）设 $A=(a_{ij})_{m\times k}$，$B=(b_{ij})_{k\times s}$ ，$C=(c_{ij})_{s\times n}$，则 $AB$ 是 $m\times s$ 矩阵，$BC$ 是 $k\times n$ 矩阵，而 $(AB)C$ 与 $A(BC)$ 都是 $m\times n$ 矩阵. 为方便证明，以 $(i,j)_{AB}$ 表示矩阵 $AB$ 第 $i$ 行第 $j$ 列的元素，其余类推：如 $(i,j)_A=a_{ij}$，$(i,j)_B=b_{ij}$ 等.

因为

$$(i,j)_{(AB)C}=\sum_{p=1}^{s}(i,p)_{AB}(p,j)_C=\sum_{p=1}^{s}[\sum_{q=1}^{k}(i,q)_A(q,p)_B](p,j)_C$$

$$=\sum_{p=1}^{s}[\sum_{q=1}^{k}a_{iq}b_{qp}]c_{pj}=\sum_{q=1}^{k}a_{iq}(\sum_{p=1}^{s}b_{qp}c_{pj})$$

$$=\sum_{q=1}^{k}(i,q)_A(q,j)_{BC}=(i,j)_{A(BC)}, \quad (i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$$

即矩阵 $(AB)C$ 与矩阵 $A(BC)$ 的第 $i$ 行第 $j$ 列的元素都相等，所以

$$(AB)C=A(BC)$$

（ii）、（iii）的证明请读者自己补上.

此外，如果 $E$ 为 $n$ 阶单位阵，$K$ 为对角线上元素是 $k$ 的 $n$ 阶数量矩阵，则对任意的 $m\times n$ 矩阵 $A$ 和 $n\times s$ 矩阵 $B$，都有

$$AE=A, EB=B$$

并且

$$AK=A(kE)=k(AE)=kA, \qquad KB=(kE)B=k(EB)=kB$$

这表明在矩阵乘法里，单位阵起着单位元的作用，而数量矩阵起着数的作用.

在例 1.3 中，销量 $y_1$、$y_2$、$y_3$、$y_4$ 可以通过产量 $x_1$、$x_2$、$x_3$ 线性地表示出来. 一般地，设变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 可用变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 线性地表示为

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases} \tag{6}$$

其中 $a_{ij}$ 为常数 $(i=1,2,\cdots,m$ ； $j=1,2,\cdots,n)$ ，则称从变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 的变换为**线性变换**. 如果设

$$A=(a_{ij})_{m\times n}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

则线性变换(6)可以用矩阵表示为

$$Y = AX$$

其中矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 称为线性变换(6)的**系数矩阵**.

给定了线性变换(6)，它的系数矩阵也就确定. 反之，如果给定一个矩阵作为线性变换的系数矩阵，则线性变换也就确定. 因此，线性变换和矩阵之间存在着一一对应的关系，从而可以应用矩阵来研究线性变换.

**例 1.4** 设有线性变换

$$\begin{cases} y_1 = 3x_1 + x_2 \\ y_2 = x_1 - x_2 \\ y_3 = 4x_1 + 6x_2 \end{cases}$$

及

$$\begin{cases} x_1 = t_1 + 2t_2 - t_3 + 3t_4 \\ x_2 = 4t_1 - t_2 + t_3 - 2t_4 \end{cases}$$

求从变量 $t_1,t_2,t_3,t_4$ 到变量 $y_1,y_2,y_3$ 的线性变换.

**解** 用矩阵表示线性变换，有

$$Y = AX, \quad X = BT$$

其中

$$T=\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

于是利用乘法结合律，有

$$Y = AX = A(BT) = (AB)T = CT$$

而系数矩阵