高等学校理工科数学类研究生规划教材

同调代数导论

A First Course in Homological Algebra

南基洙　王颖　编著

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

■ 高等学校理工科数学类研究生规划教材

同调代数导论

A First Course in Homological Algebra

南基洙　王颖　编著

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

同调代数导论/南基洙，王颖编著. — 大连:大连理工大学出版社，2011.2
ISBN 978-7-5611-6017-6

Ⅰ.①同… Ⅱ.①南…②王… Ⅲ.①同调代数 Ⅳ.①O154

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 017111 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023
电话:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466
E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn
大连力佳印务有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:170mm×240mm 印张:15 字数:280 千字
2011 年 2 月第 1 版 2011 年 2 月第 1 次印刷

责任编辑:刘新彦 王 伟 责任校对:婕 琳
封面设计:孙 元

ISBN 978-7-5611-6017-6 定 价:38.00 元

前　言

近代数学发展的一个十分重要特点是趋向高度抽象化和整体化，《同调代数》就是伴随这个过程诞生的一个非常重要的数学分支，它对于我们学习和掌握近代数学理论具有非常重要的意义，已经成为学习和研究数学的必修课程之一.

《同调代数》的思想方法最初是由拓扑学家在研究拓扑学的复形理论时引入和使用的. 在 20 世纪中期著名数学家 Eilenberg 发现了同调思想的共性，并且将其作了代数推广.《同调代数》作为一门成熟数学分支的诞生一般是以 Cartan 和 Eilenberg 的著名著作（*Homological Algebra*，1956）作为标准，同时《同调代数》这门学科研究的范围也得到了基本确定. 另一个对《同调代数》的发展作出巨大贡献的是著名数学家 Grothendieck，上同调理论对于他重新建立代数几何系统起了非常重要的作用，而且上同调理论对于解决 Weil 猜想起了关键作用. 现在《同调代数》的思想方法对数学发展的影响越来越大，而且其应用的领域也在不断扩大，在群论、交换代数、代数拓扑、代数几何、微分几何、微分拓扑、代数数论以及偏微分方程等方面都有重要应用. 如果想了解和掌握现代数学发展的脉搏，不了解一些《同调代数》的基本思想方法是极其困难的.

本书是在作者多年为数学专业本科高年级学生讲授《模论》和为研究生讲授《同调代数》课程讲义的基础上整理而成的. 依据我们的教学经验，用 48 学时左右即可为研究生讲授完全书.

本书主要介绍《同调代数》这门课程最基本的思想方法，全书共9章. 第1章，范畴论. 主要介绍一些常用的范畴论知识；第 2 章，*Hom* 函子与 $\otimes$ 函子. 主要介绍 *Hom* 函子与 $\otimes$ 函子，以及与之关联的直和、直积、正合列、正向极限和反向极限等；第 3 章，投射模、内射模和平坦模. 主要介绍投射模、内射模、平坦模等，及其在 *Hom* 函子和 $\otimes$ 函子作用下的一些性质. 另外，还介绍了局部化理论和外积等；第 4 章，

Serre 猜想. 主要介绍证明 Serre 猜想的一些思想方法;第 5 章,群的扩张. 初步介绍研究群结构的同调方法;第 6 章,同调论. 主要介绍一般的同调概念和导出函子概念,及其粘接和正合列性质等;第 7 章,导出函子 Ext 和 Tor. 主要介绍同调论中经常使用的导出函子 Ext 和 Tor 的一些性质,及其一些简单应用. 另外,还证明了泛系数定理,初步介绍了谱序列的思想;第 8 章,同调维数. 主要介绍一些基本的维数,如投射(内射、平坦)维数的概念和性质,及其在一些特殊环上的性质和结构,并以此为基础证明了正则局部环的唯一分解性. 另外,还简单介绍了 Koszul 复形;第 9 章,群的同调. 主要介绍同调群和上同调群的概念和一些基本结果.

本书的习题是作为正文内容的补充出现的,读者最好能够独立完成每章后面配置习题的证明和演算.

本书的出版得到了大连理工大学教改基金项目的资助. 在编写此书的过程中,我们得到了吉林大学牛凤文教授和杜现昆教授的鼓励和帮助,编者于此致以衷心的感谢.

由于作者水平有限,书中难免有疏漏和谬误之处,恳请读者批评斧正.

南基洙　王颖

于大连理工大学创新园

2011 年 2 月

目　录

第1章　范畴论

范畴论已经成为现代数学必不可少的语言工具. 使用范畴论的语言来描述和研究《同调代数》是非常方便和自然的. 在这里我们只介绍一些本书将涉及到的最基本的范畴论中的语言和概念.

定义 1.1.1　一个**范畴** $\mathbf{C}$ 是由**对象类** $obj\mathbf{C}$ 和**态射集合** $Hom(A,B)(A,B\in obj\mathbf{C})$ 组成的,并且态射集合具有可合成性,即对 $A,B,C\in obj\mathbf{C}$ 有

$$Hom(A,B)\times Hom(B,C)\to Hom(A,C)$$
$$(f,g)\to gf$$

另外,还适合如下公理:

(ⅰ) 存在恒等态射,即对每个 $A\in obj\mathbf{C}$ 存在 $1_A\in Hom(A,A)$,使得 $f1_A=f$, $f\in Hom(A,B)$; $1_Ag=g$, $g\in Hom(C,A)$.

(ⅱ) 在态射集合中的合成性满足结合律,即对 $A,B,C,D\in obj\mathbf{C}$ 有

$$Hom(A,B)\times Hom(B,C)\times Hom(C,D)\to Hom(A,D)$$
$$(f,g,h)\to hgf=h(gf)=(hg)f$$

(ⅲ) 在态射集合中具有不相交性,即如果 $A\neq C$ 或 $B\neq D$,则 $Hom(A,B)\cap Hom(C,D)=\varnothing$.

从范畴的定义之中,我们很容易意识到:在一个范畴中不仅要考虑对象类,还要考虑与之不可分割的态射集合. 也就是说,范畴是对象类和态射集合组成的一个有机整体. 另外,需要注意,尽管在表达对象属于对象类时,我们使用了集合论的符号"∈",但是这并不表示范畴中的对象类是集合. 再有,任意两个对象 A,B 之间的态射组成的 $Hom(A,B)$ 必须是一个集合.

事实上,以前我们学习过的诸多概念,如集合、群、环、域和拓扑空间等都构成范畴.

例 1.1.1　集合范畴 $\mathbf{S}$. 对象的类 $obj\mathbf{S}$ 是所有的集合;任意两个对象 $A,B\in obj\mathbf{S}$ 之间的态射集合 $Hom(A,B)$ 是集合 A,B 之间的所有映射组成的集合,态射的合成就是通常的集合之间映射的合成,则容易验证 $\mathbf{S}$ 确是一个范畴. 我们称其为集

合范畴.

例 1.1.2 群范畴 **G**. 对象的类 $obj\,\mathbf{G}$ 是所有的群;任意两个对象 $A,B \in obj\,\mathbf{G}$ 之间的态射集合 $Hom(A,B)$ 是群 A,B 之间的所有群同态组成的集合,态射的合成就是通常的群之间同态的合成,则容易验证 **G** 确是一个范畴. 我们称其为群范畴.

对群范畴 **G** 稍加改造,我们就可以得到 Abel 群范畴 **Ab**—— 其对象类 $obj\,\mathbf{Ab}$ 是所有的 Abel 群;任意两个对象 $A,B \in obj\,\mathbf{Ab}$ 之间的态射集合 $Hom(A,B)$ 是交换群 A,B 之间的所有群同态组成的集合,态射的合成就是通常的群之间同态的合成.

例 1.1.3 环范畴 **R**. 对象的类 $obj\,\mathbf{R}$ 是所有的环;任意两个对象 $A,B \in obj\,\mathbf{R}$ 之间的态射集合 $Hom(A,B)$ 是环 A,B 之间的所有环同态组成的集合,态射的合成就是通常的环之间同态的合成,则容易验证 **R** 确是一个范畴. 我们称其为环范畴.

例 1.1.4 域范畴 **F**. 对象的类 $obj\,\mathbf{F}$ 是所有的域;任意两个对象 $A,B \in obj\,\mathbf{F}$ 之间的态射集合 $Hom(A,B)$ 是域 A,B 之间的所有域同态组成的集合,态射的合成就是通常的域之间同态的合成,则容易验证 **F** 确是一个范畴. 我们称其为域范畴.

例 1.1.5 拓扑范畴 **Top**. 对象的类 $obj\,\mathbf{Top}$ 是所有的拓扑空间;任意两个对象 $A,B \in obj\,\mathbf{Top}$ 之间的态射集合 $Hom(A,B)$ 是拓扑空间 A,B 之间的所有连续映射组成的集合,态射的合成就是通常的连续映射的合成,则容易验证 **Top** 确是一个范畴. 我们称其为拓扑范畴.

例 1.1.6 偏序集合范畴$(\mathbf{S},\leqslant)$. 对象的类 $obj(\mathbf{S},\leqslant)$ 是所有的偏序集合;任意两个对象$(A,\leqslant)$,$(B,\leqslant) \in obj(\mathbf{S},\leqslant)$ 之间的态射集合 $Hom(A,B)$ 是由保持偏序关系的映射组成的集合,即

$$Hom(A,B) = \{f:A \to B \mid f(x) \leqslant f(y),\text{其中 } x,y \in A \text{ 且 } x \leqslant y\}.$$

当然,态射的合成就是通常的集合之间映射的合成,则容易验证$(\mathbf{S},\leqslant)$确是一个范畴. 我们称其为偏序集合范畴.

集合、群、环、域、拓扑空间和偏序集合等等都构成范畴,那么有没有这样的一个范畴——它包括了所有这些范畴. 更进一步,有没有这样的一个范畴——它包括了我们所要考虑的任何一个范畴呢?也就是说,是否存在一个"最大"的范畴?答案是否定的!我们很容易从一个范畴构造出一个新范畴,即范畴的包含范围是没有"边界"的.

事实上,如果 **C** 是一个范畴,则我们很容易构造出一个新的范畴 **D**. 令范畴 **D** 的对象类 $obj\,\mathbf{D}$ 是范畴 **C** 中的所有态射;范畴 **D** 的态射集合 $Hom(f,g)$((f,g) 是范畴 **C** 中的态射对,即 $f:A \to B, g:C \to D$)是所有适合交换图条件的范畴 **C** 中的态射对 (α,β)

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \alpha\downarrow & & \downarrow\beta \\ C & \xrightarrow{g} & D \end{array}$$

即态射对(α,β)满足$\beta f = g\alpha$.

现在我们已经知道什么是范畴了,那么如何描述同一个范畴中的不同对象是否"相同"呢?

定义 1.1.2　范畴 **C** 中的态射 $f:A\to B$ 被称为是**等价态射**,如果存在态射 $g:B\to A$ 使得 $fg = 1_B, gf = 1_A$. 如果在范畴 **C** 中的两个对象 A,B 之间存在等价态射,则称对象 A 与 B **等价**.

容易知道,在集合范畴 **S** 中,等价态射即是双射,等价的对象是基数相等的集合;在群范畴 **G**、环范畴 **R** 和域范畴 **F** 中,等价态射就是同构,因而等价的对象就是相互同构的群、环和域.

下面让我们看一下,如何把一些对象组合成一个新对象,并使该对象与这些对象具有很好的内在关联.

定义 1.1.3　令$\{A_i \mid i\in I\}$是范畴**C**中的一族对象,则我们把范畴**C**中的对象P与态射族$\{\pi_i:P\to A_i \mid i\in I\}$称为对象族$\{A_i\mid i\in I\}$的**积**,如果它对任意对象$B$和态射族$\{f_i:B\to A_i\mid i\in I\}$,都存在唯一的态射$\varphi:B\to P$,使得它们具有交换图性质

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\pi_i} & A_i \\ \varphi\uparrow & \nearrow f_i & \\ B & & \end{array}$$

即 $f_i = \pi_i\varphi, \forall i\in I$.

我们将其记为$\{P,\{\pi_i\}_{i\in I}\}$,简称 P 为对象族$\{A_i\mid i\in I\}$的积,并记为$\prod\limits_{i\in I}A_i$.

例 1.1.7　集合范畴 **S** 中对象族$\{A_i\mid i\in I\}$的积,就是该集合族的笛卡儿积,即$\prod\limits_{i\in I}A_i = \{(a_i)\mid a_i\in A_i\}$.

事实上,$\pi_i:\prod\limits_{i\in I}A_i\to A_i,((a_i)\to a_i)$. 对于给定的对象 B,如果存在$\{f_i:B\to A_i\mid i\in I\}$,则定义映射

$$\varphi:B\to\prod_{i\in I}A_i$$
$$b\to(f_i(b))$$

显然,$f_i = \pi_i\varphi, \forall i\in I$.

定理 1.1.1　如果范畴 **C** 中关于对象族$\{A_i\mid i\in I\}$的积存在,则在等价意义

下它是唯一的.

证明 假设$\{P,\{\pi_i\}_{i\in I}\}$与$\{P',\{\pi_i'\}_{i\in I}\}$是对象族$\{A_i \mid i\in I\}$的两个积,则由积的定义1.1.3,有下面的两个交换图

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\pi_i"] & A_i \\ P' \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ur, "\pi_i'"'] & \end{tikzcd} \quad \text{和} \quad \begin{tikzcd} P' \arrow[r, "\pi'_i"] & A_i \\ P \arrow[u, "\psi"] \arrow[ur, "\pi_i"'] & \end{tikzcd}$$

所以有

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[dr, "\pi_i'"] & \\ P \arrow[u, "\psi"] \arrow[r, "\pi_i"] & A_i \\ P' \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ur, "\pi_i'"'] & \end{tikzcd} \quad \text{和} \quad \begin{tikzcd} P \arrow[dr, "\pi_i"] & \\ P' \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\pi_i'"] & A_i \\ P \arrow[u, "\psi"] \arrow[ur, "\pi_i"'] & \end{tikzcd}$$

又由于存在的态射是唯一的,所以$\varphi\psi = 1 = \psi\varphi$,即$P$与$P'$等价. □

与积相对应,我们有余积.

定义 1.1.4 令$\{A_i \mid i\in I\}$是范畴**C**中的一族对象,则范畴**C**中的对象S与态射族$\{\lambda_i: A_i \to S \mid i\in I\}$称为对象族$\{A_i \mid i\in I\}$的**余积**(或和),如果对任意对象$B$和态射族$\{f_i: A_i \to B \mid i\in I\}$,都存在唯一的态射$\varphi: S\to B$,使得它们具有交换图性质

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "\lambda_i"] \arrow[d, "f_i"'] & S \arrow[dl, "\varphi"] \\ B & \end{tikzcd}$$

即$f_i = \varphi\lambda_i$, $\forall i\in I$.

我们记其为$\{S,\{\lambda_i\}_{i\in I}\}$,简称$S$为对象族$\{A_i \mid i\in I\}$的余积(或和),并记为$\coprod_{i\in I} A_i$.

与定理1.1.1的结果相对应,我们有

定理 1.1.2 如果范畴**C**中对象族$\{A_i \mid i\in I\}$的余积存在,则在等价意义下它是唯一的. □

定义 1.1.5 范畴**C**中的对象I称为**泛对象**,如果对任意的对象A,存在且只存在唯一的I至A的态射;范畴**C**中的对象J称为**余泛对象**,如果对任意的对象A,存在且只存在唯一的A至J的态射.

定理 1.1.3 在范畴**C**中泛对象(余泛对象)在等价的意义下是唯一的.

证明 假设范畴**C**中的泛对象是I,U,则存在$f: I\to U, g: U\to I$,所以

$gf: I \to U \to I, fg: U \to I \to U$. 又从态射的唯一性，有 $fg = gf = 1$，故 I 和 U 等价. □

例 1.1.8　在群范畴中平凡群 $\{1\}$ 是泛对象，同时它也是余泛对象.

我们知道，对于任意两个集合 A, B，可以通过建立映射的办法来考察它们之间的关系. 那么如果令 $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ 是两个范畴，则我们又该用怎样的方式刻画它们之间的联系呢？

定义 1.1.6　令 $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ 是两个范畴. $\mathbf{C}$ 至 $\mathbf{D}$ 的一个**正变函子** $F: \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ 是指满足下面条件的一个规则：

（ⅰ）如果 $A \in obj\mathbf{C}$，则 $FA \in obj\mathbf{D}$.

（ⅱ）如果 $f: A \to B$ 是范畴 $\mathbf{C}$ 中的态射，则 $Ff: FA \to FB$ 是范畴 $\mathbf{D}$ 中的态射.

（ⅲ）如果 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ 是范畴 $\mathbf{C}$ 中的态射，则 $FA \xrightarrow{Ff} FB \xrightarrow{Fg} FC$ 是范畴 $\mathbf{D}$ 中的态射，即 $F(gf) = FgFf$.

（ⅳ）对于任意的 $A \in obj\mathbf{C}$，有 $F1_A = 1_{FA}$.

例 1.1.9　令 $\mathbf{G}$ 是群范畴，$\mathbf{S}$ 是集合范畴，则在范畴 $\mathbf{G}$ 和 $\mathbf{S}$ 之间可以定义一个正变函子 $F: \mathbf{G} \to \mathbf{S}$.

事实上，如果 $A \in obj\mathbf{G}$，则规定 FA 就是去掉群 A 中运算以后的集合. 如果 $f \in Hom_G(A, B)$，即 f 是 A, B 之间的群同态，则显然 f 是集合 A, B 之间的映射，所以可以规定 $f \in Hom_S(A, B)$. 当然有

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \quad & \text{（群之间同态关系）} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & F\downarrow \\ FA & \xrightarrow{Ff} & FB & \xrightarrow{Fg} & FC & & \text{（集合之间映射关系）} \end{array}$$

即这样定义的 $F: \mathbf{G} \to \mathbf{S}$ 是一个群范畴 $\mathbf{G}$ 至集合范畴 $\mathbf{S}$ 的正变函子.

与正变函子相对应，我们有反变函子.

定义 1.1.7　令 $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ 是两个范畴. $\mathbf{C}$ 至 $\mathbf{D}$ 的一个**反变函子** $F: \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ 是满足下面条件的一个规则：

（ⅰ）如果 $A \in obj\mathbf{C}$，则 $FA \in obj\mathbf{D}$.

（ⅱ）如果 $f: A \to B$ 是范畴 $\mathbf{C}$ 中的态射，则 $Ff: FB \to FA$ 是范畴 $\mathbf{D}$ 中的态射.

（ⅲ）如果 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ 是范畴 $\mathbf{C}$ 中的态射，则 $FC \xrightarrow{Fg} FB \xrightarrow{Ff} FA$ 是范畴 $\mathbf{D}$ 中的态射，即 $F(gf) = FfFg$.

（ⅳ）对于任意的 $A \in obj\mathbf{C}$，有 $F1_A = 1_{FA}$.

例 1.1.10　令 $\mathbf{C}$ 是一个范畴，而 $\mathbf{S}$ 是集合范畴，$A \in obj\mathbf{C}$ 是其中的一个固定对象. 我们规定 $FB = Hom(A, B)$. 如果 $f: B \to B'$ 是范畴 $\mathbf{C}$ 中的态射，则规定 $Ff: Hom(A, B) \to Hom(A, B')$ 为 $g \to fg$. 容易验证这样定义的 F 是正变函子.

$$
\begin{array}{ccc}
A & & \\
g\downarrow & \searrow fg & \\
B & \xrightarrow{f} & B' \\
\downarrow & & \downarrow \\
Hom(A,B) & \rightarrow & Hom(A,B') \\
 & & \\
g & \longrightarrow & fg
\end{array}
$$

类似地，如果我们规定 $FB = Hom(B,A)$. 如果 $f:B \to B'$ 是范畴 $\mathbf{C}$ 中的态射，则规定 $Ff:Hom(B',A) \to Hom(B,A)$ 为 $g \to gf$. 可以验证这时的 F 是反变函子.

$$
\begin{array}{ccc}
A & & \\
gf\uparrow & \nwarrow g & \\
B & \xrightarrow{f} & B' \\
\downarrow & & \downarrow \\
Hom(B,A) & \leftarrow & Hom(B',A) \\
 & & \\
gf & \longleftarrow & g
\end{array}
$$

定义 1.1.8 设 E,F 是范畴 $\mathbf{C},\mathbf{D}$ 之间的正变函子. 函子 E 到 F 的自然变换 $\tau:E \to F$，是指满足下面交换图条件的一族态射 $\tau_A:EA \to FA, A \in obj\mathbf{C}$

$$
\begin{array}{ccc}
EA & \xrightarrow{Ef} & EA' \\
\tau_A\downarrow & & \downarrow\tau_{A'} \\
FA & \xrightarrow{Ff} & FA'
\end{array}
$$

其中 $f:A \to A'$ 是范畴 $\mathbf{C}$ 中的态射.

特别地，如果对于任意的对象 A 有 $\tau_A:EA \to FA$ 是等价态射，则称函子 E 和 F 是**自然等价**的.

类似地，我们可以就反变函子对定义自然变换和自然等价的概念.

例 1.1.11 令 $\mathbf{G}$ 是群范畴. 我们分别定义函子 E 和 F 为

$$E:\mathbf{G} \to \mathbf{G}(A \to A)$$

$$F:\mathbf{G} \to \mathbf{G}(A \to A/[A,A])$$

其中，$[A,A]$ 表示群 A 中换位子生成的子群. 如果 $A \in obj\mathbf{G}$，则我们定义 $\tau_A:EA \to FA$ 为 $\tau_A:A \to A/[A,A]$（群的自然同态).

令 $f:A \to A'$ 是群同态，则 $f([A,A]) \subseteq [A',A']$. 所以对于群的合成同态

$$
\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{f} & A' \\
 & & \downarrow \tau_{A'}(\pi) \\
 & & A'/[A',A']
\end{array}
$$

有 $[A,A] \subseteq \ker(\tau_{A'}f)$，从而由群的同态基本定理，存在诱导的群同态 $A/[A,A] \xrightarrow{Ff} A'/[A',A']$. 所以，有下面的交换图

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{Ef = f} & A' \\ \tau_A \downarrow & & \downarrow \tau_{A'} \\ A/[A,A] & \xrightarrow{Ff} & A'/[A',A'] \end{array}$$

于是，τ 是正变函子 E 到 F 的自然变换.

定义 1.1.9　令 $\mathbf{C},\mathbf{D}$ 是两个范畴. 如果存在两个函子 $F:\mathbf{C}\to\mathbf{D}$, $G:\mathbf{D}\to\mathbf{C}$，使得 $GF \cong 1_C$, $FG \cong 1_D$，则称范畴 $\mathbf{C}$ 与范畴 $\mathbf{D}$ 等价，记为 $\mathbf{C}\cong\mathbf{D}$.

例 1.1.12　令 F 是一域，V 是 F 上的一线性空间，不妨令 $\dim V = n < \infty$ 且 V 的一组基底为 $e_1,e_2,\cdots,e_n$，则可以定义 V 的对偶空间为 $V^* = Hom(V,F)$，并且 $\dim V^* = n$，其对应于 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 的基底为 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n$，其中

$$\delta_i e_j = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}, \qquad 1 \leqslant i,j \leqslant n.$$

如果 $f \in Hom(V,V)$，并且设

$$f\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = \begin{cases} f(e_1) = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \cdots + a_{1n}e_n \\ f(e_2) = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{2n}e_n \\ \quad\vdots \\ f(e_n) = a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + \cdots + a_{nn}e_n \end{cases} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

则如果 $f^* \in Hom(V^*,V^*)$ 是 f 对应的变换，并且令

$$f^*\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix} = \begin{cases} f^*(\delta_1) = b_{11}\delta_1 + b_{12}\delta_2 + \cdots + b_{1n}\delta_n \\ f^*(\delta_2) = b_{21}\delta_1 + b_{22}\delta_2 + \cdots + b_{2n}\delta_n \\ \quad\vdots \\ f^*(\delta_n) = b_{n1}\delta_1 + b_{n2}\delta_2 + \cdots + b_{nn}\delta_n \end{cases} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix}$$

那么，由于

$$f^*: Hom(V,F) \to Hom(V,F)$$
$$\sigma \to \sigma f$$

所以，$f^*(\delta_i) = \delta_i f$, $f^*(\delta_i)(e_j) = \delta_i f(e_j)$, $b_{ij} = f^*(\delta_i)(e_j) = \delta_i f(e_j) = a_{ji}$. 从而

$$f^*\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix} = \begin{cases} f^*(\delta_1) = b_{11}\delta_1 + b_{12}\delta_2 + \cdots + b_{1n}\delta_n \\ f^*(\delta_2) = b_{21}\delta_1 + b_{22}\delta_2 + \cdots + b_{2n}\delta_n \\ \vdots \\ f^*(\delta_n) = b_{n1}\delta_1 + b_{n2}\delta_2 + \cdots + b_{nn}\delta_n \end{cases} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix}$$

至此，如果令 $\mathbf{C}$ 是域 F 上所有线性空间组成的范畴，令 $\mathbf{D}$ 是域 F 上所有线性空间的对偶空间组成的范畴，那么范畴 $\mathbf{C}$ 和范畴 $\mathbf{D}$ 就是等价的.

事实上，如果令 $F:\mathbf{C}\to\mathbf{D}$，则对象之间的对应是

$$F:obj\,\mathbf{C}\to obj\,\mathbf{D}$$
$$V\to V^{*}=Hom(V,F)$$

而态射之间的对应是，若令 $V\xrightarrow{f}V'$，则

$$Ff:Hom(V',F)\to Hom(V,F)$$
$$\sigma\to\sigma f$$

再若令 $G:\mathbf{D}\to\mathbf{C}$，则

$$G:obj\,\mathbf{D}\to obj\,\mathbf{C}$$
$$V^{*}\to V^{**}=Hom(Hom(V,F),F)=V$$

从而对于 $V^{*}\xrightarrow{h}V'^{*}$，有

$$Gh:Hom(V'^{*},F)=V'\to Hom(V^{*},F)=V$$
$$\tau\to\tau h$$

习题 1

1. 如果 A 是范畴 $\mathbf{C}$ 中的一个固定对象，我们规定 $|\ \ |:\mathbf{C}\to A$ 为对于范畴 $\mathbf{C}$ 中的任意对象 B，有 $|B|=A$，而且对于任意的 $\mathbf{C}$ 中态射 f，有 $|f|=1_A$，则这样定义的 $|\ \ |$ 是一个函子. 我们称其为**常量函子**.

2. 既是泛对象，又是余泛对象的对象称为 **0 对象**. 试确定群、环范畴中的 0 对象.

3. 设 $\mathbf{C},\mathbf{D}$ 是两个范畴. 我们规定 $\mathbf{C}\times\mathbf{D}$ 由 (A,B) 型对象组成，其中 A,B 分别是范畴 $\mathbf{C},\mathbf{D}$ 中的对象. 如果 $f:A\to A',g:B\to B'$ 分别是范畴 $\mathbf{C},\mathbf{D}$ 中的态射，则规定 $(f,g):(A,B)\to(A',B')$. 试验证 $\mathbf{C}\times\mathbf{D}$ 构成一个范畴. 我们称其为范畴 $\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{D}$ 的**乘积范畴**.

4. 设 $\mathbf{C},\mathbf{D}$ 是两个范畴. 如果 $\mathbf{D}$ 中的对象均是 $\mathbf{C}$ 中的对象；$\mathbf{D}$ 中的态射集合均是 $\mathbf{C}$ 中的态射集合的子集合，即 $Hom_{\mathbf{D}}(A,B)\subseteq Hom_{\mathbf{C}}(A,B)$，则称范畴 $\mathbf{D}$ 是范畴 $\mathbf{C}$ 的**子范畴**. 试证明群范畴是集合范畴的子范畴.

5. 设 $\mathbf{C}$ 是一个范畴. 我们定义一个新的范畴 $\mathbf{C}^{op}$ 为：对象均是范畴 $\mathbf{C}$ 中的对象；对象 A,B 之间的态射定义为 $f^{op}:B\to A$，当对象 A,B 之间在范畴 $\mathbf{C}$ 中的态射是 $f:A\to B$. 我们称这样由范畴 $\mathbf{C}$ 得到的范畴为范畴 $\mathbf{C}$ 的**反范畴**. 则集合范畴的反范畴

是否存在?如果存在请确定它的结构.

6. 设 $F:\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{D}$ 是范畴 $\mathbf{C},\mathbf{D}$ 之间的函子. 如果对于任意的 $f,g\in Hom_{\mathbf{C}}(A,B)$,并且对于 $f\neq g$ 的态射有 $Ff\neq Fg$,则称函子 F 是**忠实函子**. 试确定集合范畴 $\mathbf{S}$ 到 $\mathbf{S}$ 的忠实函子.

7. 设 $\mathbf{C},\mathbf{D}$ 是两个范畴. 如果函子 $F:\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{D}$ 只把 $\mathbf{C}$ 中的对象作为集合处理,把 $\mathbf{C}$ 中的态射作为集合之间的映射看待,则我们称这样的函子为**忘却函子**. 试举一个忘却函子的例子.

8. 设 $\mathbf{C},\mathbf{D}$ 是两个范畴. 如果函子 $F:\mathbf{C}\rightarrow\mathbf{D}$ 满足

$$F(f+g)=Ff+Fg,\ \forall f,g\in Hom_{\mathbf{C}}(A,B),$$

则称 F 为**加性函子**. 试证明例 1.1.10 中的函子 $F=Hom(A,-)$ 是加性函子.

9. 令 V 是域 F 上的线性空间,则 $Hom(Hom(V,F),F)=V$.

第 2 章　*Hom* 函子与 $\otimes$ 函子

模已经成为现代数学中非常重要的一个概念，它在许多数学分支中都有着十分广泛的应用，如它是研究环论、群表示论的强有利工具，它还是研究代数数论、代数几何、代数拓扑和 K- 理论等学科的重要手段. 这章我们将就《同调代数》研究的一个主要对象 —— 模，以及研究它所采用的方法，即正合列、*Hom* 函子和 $\otimes$ 函子等的方法作一简单介绍.

如果没有特别的说明，本章涉及的环均假定是有 1 的环.

2.1　模与模同态

我们先简单回顾一下模的概念与一些简单性质.

定义 2.1.1　令 M 是一加法群，R 是一环. 则定义一映射(作用)$\varphi: R\times M \to M$，并简记 $\varphi(r,m)$ 为 rm. 如果该运算满足：

(ⅰ)$r(m+n) = rm + rn$；

(ⅱ)$(r+s)m = rm + sm$；

(ⅲ)$(rs)m = r(sm)$；

(ⅳ)$1m = m$，

其中 $r,s \in R, m,n \in M$，则我们称 M 为**左 R- 模**.

类似地，可以定义**右 R- 模**. 今后如果没有特别的说明，我们所说的模都是指左 R- 模. 显然，所有的左 R- 模放在一起构成一个范畴，我们称其为左 R- **模范畴**或简称为 R- **模范畴**，记为 $_R\mathbf{m}$.

事实上，我们以前学习过的线性空间就是一个域上的模，而交换群(Abel) 也可以视为 Z- 模.

定义 2.1.2　设 M 为 R- 模，$M' \subseteq M$. 如果 M' 是 M 的子群，并且 M' 在纯量运算之下封闭，即对 $\forall r \in R, m \in M'$ 有 $rm \in M'$，则称 M' 是 M 的**子模**.

显然，对于任意的 R- 模 M 均有两个平凡的子模 0 和 M. 非平凡的子模称为**真子模**.