探究知识丛书

数学的14个关键词

[法] 贝诺瓦·里多　等著　　张琳敏　译

接着一切便简单了！

上海科学技术文献出版社

·探究知识丛书·

数学的14个关键词

[法]贝诺瓦·里多 等著
张琳敏 译

上海科学技术文献出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学的14个关键词 /（法）贝诺瓦·里多等著；张琳敏译.
—上海：上海科学技术文献出版社，2010.5
（探究知识丛书）
ISBN 978-7-5439-4320-9

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①贝… ②张… Ⅲ. ①数学—普及读物 Ⅳ. ①01-49

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第059032号

图字：09-2010-023

责任编辑：张　树　李　莺
封面设计：许　菲

数学的14个关键词
[法] 贝诺瓦·里多等著 张琳敏 译
出版发行：上海科学技术文献出版社
地　　址：上海市长乐路746号
邮政编码：200040
经　　销：全国新华书店
印　　刷：昆山市亭林印刷有限责任公司
开　　本：740×970　1/16
印　　张：8
字　　数：192 000
版　　次：2010年5月第1版　2010年5月第1次印
书　　号：ISBN 978-7-5439-4320-9
定　　价：35.00元
http://www.sstlp.com

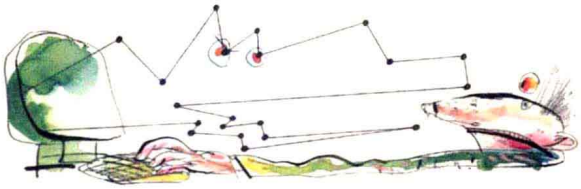
·探究知识丛书·

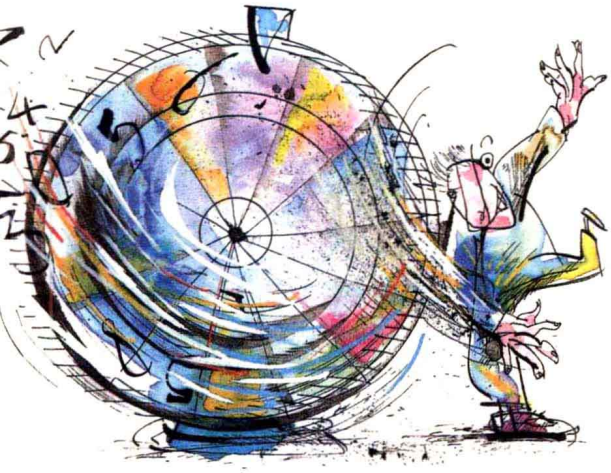
数学的14个关键词

[法]贝诺瓦·里多 等著
张琳敏 译

上海科学技术文献出版社

目　录





质　数

这些算术的“原子”有无穷多个。正是有了这些质数，我们才得以分析其他数。尽管它们在密码学等领域已经被用到毫不新鲜的地步，可它们的确切本质却依然是个谜。

Benoît Rittaud：
巴黎第十三大学讲座讲师
rittaud@math.univ-paris13.fr

● 所谓的质数是什么？

从某种意义上来看，质数便是算术的“原子”：正是从质数开始，我们才能分析研究其他数。任何正整数皆可作为几个质数相乘所得的结果，这是算术的一条基本定理。经典的定义告诉我们，当一个数只能被其自身和 1 整除时，那么这个数就是质数。因此质数表的开头是这样的：2，3，5，7，11，13，17，19 等等。我们可以这样来粗略说明“质因数分解”：对于一个给定的数 n，或者它是质数，那么对它所进行的质因数分解差不多还没开始就已完成，或者它不是质数，那么我们就可以把它分解成两个更小的数，然后我们继续寻找可以整除这两个数的数，这样一直进行到整个过程结束（这一过程早晚会结束的）。有一点相当重要却并非一目了然的是，对于一个给定的数，有且仅有一种可能的质因数分解方式（至少质因数按顺序排列的话），也就是说 2×3 与 3×2 被视作是对 6 这个数进行质因数分解以后的相同结果。

● 1 是不是质数？

这个问题是陷阱。根据之前的定义，似乎答案是肯定的，因为实际上 1 只能被其本身和 1 这两个除数整除，而只有在 1 这一唯一情况中，这两个数恰好是同一个。但既然一个数的质因数分解方式是唯一的，那么答案又

应该是否定的。实际上，假如我们把1算在质数中，那么对于一个给定的数就会有无穷种质因数分解的方式：对6这一数，比如我们可以有 $6=2\times3$，但也可以有 $6=1\times2\times3$，$6=1\times1\times2\times3$，等等。然而在数学中，我们决不会仅仅为了好玩而定义一个概念，而是要把概念当作可以使用的工具，即便只是用在理论结果上：因此重要的是符合那些定理。所以，在1是否质数这一问题上，最好是要保全质因数分解的唯一性，也就是说不把1当作质数，而这也就是沿用至今的普遍做法。

● 质数有几个？

质数有无穷个。这一结论早在公元前300年欧几里得那时就为人所知了，而欧几里得对此给出了一则至今仍是经典的证明：即构造一个质数表，其中有有限个质数。把所有这些质数乘起来，并在乘积上加1，所得的数记为 n。n 这一数不能被表中的任何质数所整除（因为加上了1），但 n 又可以分解为质因数的乘积。因此，我们把它的一个质因数记作 p，那么 p 必然不同于上述质数表中的任何质数。因此我们像欧几里得一样证明了（他曾写道“质数的数目比任何给定的数目都更大”），任何含有有限个质数的质数表，无论它有多大，都不可能包含所有的质数。之所以这一说法如此拗口，是因为当时不愿直白地谈论无穷，而实际上的意思正是无穷。

自此以后又有了好几种证明旨在说明质数有无穷个。其中有一个是乔治·玻利亚（George Pólya）在1920年提出的，这一证明可说是一个非常美妙的算术尝试：其关键在于说明所有的“费尔马数”，即 $2^{2^n}+1$，互相之间没有公因数：因此可以推断，对每一个新的费尔马数作质因数分解，总是可以产生不同于之前的费尔马数所分解出来的质数（之前的这些费尔马数本身并非质数，除了个别例外）。于是，假如我们对 n 个费尔马数进行质因数分解，并分别从结果中取出一个质数，那么通过前述证明我们便可以知道，这一含有 n 个质数的表中不会有两个相同的质数，这就保证了在比 $2^{2^n}+1$ 小的数中存在着至少 n 个不同的质数。

● 把质数加起来会怎样？

我们已经看到，质数的存在意义便是使得我们能把所有整数分解为质因数乘积的形式。因此，在谈论质数的时候，乘法便是理所当然的操作。但与之相反，对质数做加法却提出了一些严肃的问题，特别是其中的一个著名问题，它是数学界最古老、最艰难的问题之一：“哥德巴赫猜想”。根据这一猜想，任何大于2的偶数可以写作两个质数之和。比如 $18=11+7$，$26=13+13$，等等。这一猜想早在三个世纪之前就提出来了，猜想本身用词简单，几乎人人都能明白，但它依然是所有数学家的一道难关。最近有一部有

趣的小说，其情节的灵感便得自这一猜想[1]。

为了对哥德巴赫猜想有所认识，人们首先简化问题，对一个个数进行测试。2008年初，托马·奥利维拉·埃·西尔瓦（Tomás Oliveira e Silva）及其在葡萄牙阿威罗大学（université d'Aveiro）的同事们，确认哥德巴赫猜想对小于10^{18}的所有偶数都有效，10^{18}相当于十亿的十亿倍，而他们的工作还在继续[2]。所有的尝试都验证了这一猜想的有效性，特别是在以下的经验观察中：偶数越大，则写作两个质数之和的方式也就越多。但真正的证明，即对所有偶数有效的证明，还没有出现……

[1] 原注：A. Doxiadis，《贝特罗叔叔和哥德巴赫猜想》（*Oncle Petros et la conjecture de Goldbach*），Seuil，2000

[2] 原注：www.ieeta.pt/ tos/goldbach.html

《研究》上所刊发的文章：

Benoît Rittaud，31415879是不是质数？（31415879: ce nombre est-il premier?），2003年2月，第70页。

图示1　埃拉托斯特尼筛法

埃拉托斯特尼筛法是这样的：罗列出所有从2开始、按递增顺序排列的整数，一直列到某一个数（这里我们列到20）：

找出2，把2圈起来，然后划去表中所有被2整除的数：

除了2以外，最左边的一个未划去的数是3。于是把3圈起来，然后划去所有被3整除的数：

最后，也就是说所有的数，或者被划去，或者被圈起来，那么我们就得到如下列表：

我们所圈起来的所有数即构成了这一小于20的质数集合。

● 有没有一个简单的公式可以给出所有的质数？

这是一个谜。在18世纪，这一问题上最伟大的专业人士之一莱昂哈德·欧拉怀疑人们是否能找出一个这样的公式。但可以肯定，至今人们仍无法反驳欧拉。确实，存在着一些公式：比如，加拿大卡尔加里大学（université de Calgary）的詹姆斯·琼斯（James Jones）、道格拉斯·韦恩斯（Douglas Wiens）、加拿大萨斯喀彻温大学的（université de Saskatchevan）狄亚哈奇洛·萨托（Diahachiro Sato）以及东京大学的和田秀男在1976年展示了一个多项式（多项式指的是一种只有加法和乘法的表达式），根据这一多项式，人们可以在理论上得到所有的质数。唯一的问题是：它有26个变量，而这个多项式当且仅当这些变量所产生的整数值是一个正数时，才会产生质数。而到目前为止，还没有任何一个明确的26元数组根据这一多项式而产生一个质数。

确定一个“合理”而明确的公式如此之难，因此当我们发现存在一种几乎幼稚的产生质数的办法时，当然震惊不已：这就是“埃拉托斯特尼筛法”，这种方法就是以其古希腊发明者的名字而命名的（他也是第一个测算地球圆周的人）（见图示1）。埃拉托斯特尼筛法简单得一目了然，但这无法掩饰这样的事实：这一方法并未真正解决质数公式的问题，因为这一筛法要求我们为了求得第n个质数，我们必须先找出所有在它之前的质数。

● 一个整数是质数的概率有多大?

我们把比整数 n 小的质数的个数记作 $\pi(n)$。随着 n 的增大，$\pi(n)$ 的值的变化便能指示在所有的整数中质数所占的比例。我们可以通过上述欧几里得和玻利亚的推理得知，对任何整数 n，$\pi(n)$ 总是至少和 $\log_2[\log_2(n)]$ 相等，其中 $\log_2(x)$ 中的 x 是以 2 为底数、以 $\log_2(x)$ 为指数的幂（也就是说 $2^{\log_2(x)}=x$；比如 $\log_2(4)=2$，$\log_2(32)=5$，等等）。这一结论的唯一好处是证明起来简单，因为，具体说来，它只不过带来一些荒唐的估计：在 1 和 10 亿之间有超过 5 000 万个质数，而我们上述的这一不等式只能向我们保证在这一区间中，质数的数目至少是……3！所以，这一不等式不足以确定质数所占的比例。

人们把解决这一问题的结论命名为质数定理。有关这一定理，高斯在 19 世纪初提出猜想，1850 年切比雪夫部分地证明了这一猜想，而完整的证明则是在 1896 年由阿达马（Hadamard）和德·拉·瓦雷·普珊（De la Vallée Poussin）所作出，这一算术界的明珠告诉我们，$\pi(n)$ 和 $n/\log_e(n)$ 接近，这一次，对数以“e”为底，也就是说，这是将前述对数定义中的 2 替换为 e（e 的值大约为 2.718），人们称 e 为“纳皮尔常数”。我们可以从这一定理中推断，在所有小于整数 n 的整数中，质数所占的比例约为 $1/\log_e(n)$：随着 n 的增大，这一值越来越小。当我们检查越来越大的数的时候，我们找到质数的频率越来越低，即便我们知道这一可能性永远不会为零。

● 质数是如何分布的?

只需要一点力气，我们便能说明这些有关质数的简单结论。比如，在研究上述欧几里得的构造时，我们可以发现，沿着 3、7、11、15、19、23……这一序列存在无穷个质数，也就是说，具有 $4n+3$ 形式的质数有无穷个。沿着 $6n+5$ 或者 $8n+5$ 的序列中，也都存在着无穷个质数，其中 n 为整数。当然，这

图示2　幸运数

大约在 1955 年，当时在南加利福尼亚大学的斯坦尼斯劳 · 乌拉姆（Stanislaw Ulam）有了一个改进埃拉托斯特尼筛法的念头：不考虑已经划去的数，来看看还剩下的数。一开始就如埃拉托斯特尼一样筛选，删去所有 2 的倍数（但在数列前放上 1）：

除了 1 以外，第二个剩下而未被删除的数是 3。于是我们删去表中剩下的（包括 1、3）每 3 个数中的第 3 个。因此剩下的数如下：

于是，第 3 个数是 7。于是我们删去表中剩下的每 7 个数中的第 7 个，在这里只有 19（从左数起的第 7 个）：

这样得到的数，我们可以证明有无穷个，我们称之为“幸运数”。
有关幸运数的研究和质数研究难度相当。特别要提到的是，“哥德巴赫猜想”在幸运数上的对应版本也是一个尚未解决的问题；计算机试验可以证明，直到 100 000 为止，相关的猜想是成立的。质数和幸运数之间非常相似，因此马丁 · 加德纳（Martin Gardner）认为，在质数的性质方面，可能最终埃拉托斯特尼筛法所包含的信息比起质数在常用算术中的定义更多[3]。

并不是说这一序列中所有的数都是质数，也不是说所有的质数都具有这样的形式。在这样的思路中，有一条结论更加普遍，当然也更难证明，这就是“狄利克雷（Dirichlet）定理”，这条定理表明，只要预先确定了整数 a 与 b，就存在着无穷个具有 $an + b$ 形式的质数。

有关质数分布另一至今没有解决的问题，就是有关孪生质数的猜想，根据这一猜想，存在着无穷对质数，其中每一对之间的差是 2（比如 11 与 13、17 与 19 等等）。2007 年 1 月，人们得到了有史以来最大的一对孪生质数，这是一些数学家通过国际合作、在好几台计算机上运行他们的程序所得到的结果[4]：这对孪生质数是 $2\,003\,663\,613 \times 2^{195\,000} - 1$ 和 $2\,003\,663\,613 \times 2^{195\,000} + 1$。

为了估算出一个整数集合的稀疏性，人们有了这样一个想法，便是把这个集合中的元素的倒数相加：比如，$1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + \cdots$之和，这是有关整个整数集的，这一和无穷大，而 $1/1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \cdots$之和则是一个有限的值（是 2）：因此，所有正整数构成的集合所占的“尺寸大小”比 2 的幂所构成的集合所占的“更大”。欧拉证明了质数的倒数之和是无穷大的，而他给出的证明令人意想不到：因为质数有无穷多个（除非有无穷多个数，否则其和不会是无穷）。而对于孪生质数则相反，挪威人维戈 · 布伦（Viggo Brun）在 1919 年证明了它们的倒数之和是有限的，但这一证明并没有告诉我们孪生质数的个数本身是有限的还是无穷的。

[3][4] 原注：M. Gardner，《数学通讯》（*The Mathematical Intelligencer*），19，26，1997。

● 在整数以外还有没有质数这一提法？

有这样一个“砖块”的集合，通过这些砖块，我们得以造出所有的数：这一想法十分诱人，但为什么这仅限于整数范围中呢？我们能否想象出其他类型的数集，其中也存在这样类似的工具呢？是的，在某些情况下。比如我们把具有 $a + b\sqrt{2}$（其中 a、b 为整数，但未必为正）形式的所有数的集合记作 $Z(\sqrt{2})$：我们可以把这一类型的所有数按照唯一的方式分解为同类型的、属于某一列表中的数的乘积，因此这一列表中的数便相当于质数。于是，我们可以把类似于整数中的经典算术运用到集合 $Z(\sqrt{2})$ 上，这样集合 $Z(\sqrt{2})$ 就有了一套自己的算术。相反，对于其他集合（甚至对于其他大部分集合），我们无法列出这样一张能以唯一方式分解集合中所有元素的元素表：比如集合 $Z(\sqrt{10})$〔即具有 $a + b\sqrt{10}$（其中 a、b 为整数，或正或负）形式的所有数的集合〕就是这样的。

● 8 546 289 127 是不是质数？

为了知道一个数是否为质数，埃拉托斯特尼筛法立刻显示出了其局限性：所需要的计算很快便被发现实在太长了。1976 年，加利福尼亚大学（université de Californie）的加利·米勒（Gary Miller）与麻省理工学院（MIT）的米迦耶尔·拉宾（Michael Rabin）构想出一种可以迅速说出一个数是否为质数的测试，但这一测试却有一点不确定性：当测试表明某个数不是质数时，结果可以肯定；但当测试表明某数是质数时，往往有一定的出错概率。但这一概率是极其可靠的（请阅读“什么是随机化算法？”，第 68 页）。此外，在人们对质数的实际运用中（比如密码学中），通过米勒–拉宾测试的非质数可以或多或少地被使用，只要没人能够找出如何分解这样的非质数。2002 年，印度坎普尔理工学院

primes.utm.edu
可以找到所有有关质数和相关记录的信息（内容以英文显示）。

的马南德拉·阿格拉瓦尔（Manindra Agrawal）、内拉杰·卡亚尔（Neeraj Kayal）以及尼丹·萨克森那（Nitin Saxena）极其拉风地展示了一种成功率100%的方法，而随着要分析的数不断变大，这一方法的运算时间并不会大幅增加。与这一类型问题的通常难度相比，这一测试非常简单。然而，这一方法（所谓AKS法）还不能立刻和现有的测试（比如米勒-拉宾算法等）一决高下；有关AKS的改进还在继续，它可能最终会胜出。

● 如何知道一个给定整数的质因数？

这个问题和确定一个数是否质数有点像。因此，可能这第二个问题的解答也和第一个有点接近。事实上不是这样的：人们不知道怎样把一个给定的数分解为质因数的乘积。我们总是可以试着用2、用3去除，直到用尽所有可能的除数。而实践中，这样的方法只适用于比较小的数。这一问题如此复杂，以至于今天最为广泛使用的密码学方法RSA〔得名于其发明者李维斯特（Rivest）、沙米尔（Shamir）以及阿德勒曼（Adleman）〕就利用了这一困难性来保障密码的不受侵犯。假如我们用两个比较大的质数p和q，相乘以后得到数n，那么在原则上，没有人可以找出n的两个质因数。于是一个要给收件人发送秘密情报的发信人可以采用如下方式：他对情报用密钥加密，这个密钥就是数n；而这一数n不必保密，因为无论如何只有情报的收件人知道数n的质因数p和q，而他可以通过p和q来对情报进行解码。这一密码学方法具有不可比拟的优势，因为其中的密钥是“公开密钥”：发件人和收件人不必事先对密钥的保密进行约定（这一操作要以可靠的方式巧妙进行）。当然，不能排除某个人有一天找到一种可以快速分解大数的方法，那可要成为一个大事件了。

这一假设便成了菲尔·罗宾森（Phil Robinson）的电影《行家里手》（*Les Experts*）的基础，但实际上不太可行。随着计算机的计算能力不断增长，能够“制造”越来越大的、带有几百位数字的质数成了很重要的事，这是我们信息社会中真正的经济赌局、战略赌局。

进一步的参考书目：

- G. Hardy 与 E. Wright，《数论导读》（*Introduction à la théorie des nombres*），Vuibert，2006。
- J. -P. Delahaye，《了不起的质数》（*Merveilleux nombres premiers*），Belin，2000。

复　数

复数在文艺复兴的时候以“虚幻之数”的名义出现，它们侵略了数学以及数学的应用领域。但与顾名思义的正相反，这些数因其与现实的联系而简化了计算。

Hervé Lehning:
杨森-德-塞利高中（lycée Janson-de-Sailly）特级数学教授
herve.lehning@prepas.org

● 谁想出了虚数?

文艺复兴时期的一些意大利代数学家，比如16世纪的尼古拉·塔尔塔利亚与杰罗姆·卡当诺想要解决源于金融算术问题的方程——比如借贷实际利率的计算——或者几何问题方程——比如三分一个角或者圆锥曲线相交问题。未知数被当作是一个“量”，而数的提法当时还很模糊。他们寻求正数解，而小心回避负数的使用。为了达到这一目的，他们采用9世纪阿拉伯学者花剌子密所提出的办法，巧妙地通过改变变量、方程两边来操作方程。比如，对于 $x^2 + 6x = 7$ 这一方程，我们在方程两边各加上9，并假设 $y = x + 3$，于是我们便可以得到更加简单的方程：$y^2 = 16$。

在采用这一类型的办法解决三次方程 $x^3 = 15x + 4$ 的时候，卡当诺得到了一个原则上不可能的中间方程：$y^2 = -121$。一个平方数居然是负的，这得赶快停下来！然而卡当诺继续下去，他用一个他记作 $\sqrt{-1}$ 的数来表示-1的平方根。原则上，这是不可能的，因为所有的平方数都是正的。然而，卡当诺凭着这一创造，最终得到了上述方程的解：4。而这个结果却是精确而恰当的！于是，这样的一步使得他为方程找到了一个实数解。很快，代数学家们确认，这些数——17世纪时勒内·笛卡儿将它们命名为虚数——可以提供可接受的解，因此，在解释清楚虚数的意义、有效性之前，虚数的使用便已经是正当的了。

● 我们能不能写出 $\sqrt{-1}$？

当然，但人们在法国中等教育中回避了这一问题。为什么？仅仅因为这一书写会导致很多错误。我们把等式 $\sqrt{6} = \sqrt{2} \times \sqrt{3}$ 普遍化一下：积的根和根的积相等……，但假如上述等式中，根号下的两个数是负的，这便是错的！我们用两个-1来试验一下。

$$\sqrt{(-1 \times -1)} = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1}$$
$$\sqrt{1} = (\sqrt{-1})^2$$
$$1 = -1$$

于是我们得到了一个荒谬的结论：$1 = -1$。但在不那么教条的英美世界里，这一荒谬的结论不能阻挡人们继续用 $\sqrt{-1}$ 来记录这个数。重要的

一点就是，除了那些常用规则以外，只能用这一条：$\sqrt{-1}$ 的平方等于 -1。

自莱昂哈德·欧拉以降，人们喜欢使用符号 i 来表示这个数〔i 是 impossible（不可能的）和 imaginaire（虚幻的、想象的）这两个单词的首字母〕。而物理学家则用 j 来取而代之，因为对他们而言，i 表示的是电流强度。

● 复数复杂吗？

正相反，它们会简化计算。“复数”这一名号是由卡尔·弗里德里希·高斯在 19 世纪初提出的。在这位德国数学家的眼里，数学正抛锚在物理现实中，因此他不太喜欢“虚数”这一提法。

为了弄明白为什么复数的使用可以简化计算，我们来考虑这样一个一般的二次方程 $x^2+2ax+b=0$，其中 a、b 都是实数。我们可以这样写：

$$x^2+2ax+a^2-a^2+b=0$$

$$(x+a)^2=a^2-b$$

若我们在实数域中，我们就必须判定 a^2-b 这个数（记作 Δ，称作判别式）的三种情况：正的，零，还是负的。

在第一种情况下，方程有两个解，分别根据判别式的平方根写作 $-a\pm\sqrt{\Delta}$。而这两个解在第二种情况中就合二为一了，因此方程只有一个解。在第三种情况下，方程没有解。

但我们在复数域中，这最后一种情况也融入了其他两种情况，因为这

时判别式有一个虚根（i 乘以 $\sqrt{|\Delta|}$）。于是，方程的解便是两个复数，形式和前述的相同（$-a \pm \sqrt{\Delta}$）。

即使方程的系数是复数，这一结论也是成立的，因为所有的复数都有一个平方根。更一般的来说，一个系数为实数或复数的方程所具有的解的数量和方程的次数相等。这一定理由约翰·勒·龙·达朗贝尔提出，是由高斯证明的。

那么既然复数能够简化计算，它又是如何得名的呢？事实上，这是因为它是由两个实数构成的。更精确地来说，任何复数都具有所谓的笛卡儿形式：$x + iy$，其中 x 称为实部，y 称为虚部。实数只是复数的特殊情况，在实数中，虚部为 0。通过对称的方式，那些实部为 0 的数称为纯虚数。

● 复数是数吗？

是的，它们像有理数、实数一样构成了一个“体”，也就是说可以在这一集合内部定义四则运算（加、减、乘、除），并且这些操作具有通常的那些性质，比如结合律、交换律及分配律。怎么会这样呢？只需要在常用规则中加入一条约定：$i^2 = -1$。这一想法要归功于威廉·哈密顿。加法和减法并无任何困难，比如：

$$(2+3i) + (1-i) = 3+2i$$

乘法便要求用上一次上述的规则：

$$(2+3i) \times (1-i) = 2+i-3i^2$$
$$= 2+i-3(-1) = 5+i$$

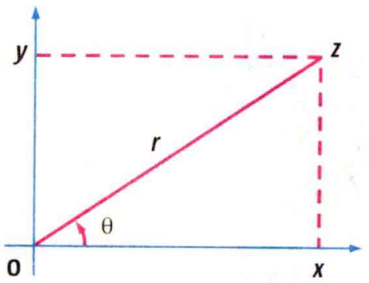
做除法则要引进两个新概念：共轭和模。求一个复数的共轭复数，就是把原来这个复数的虚部换成相反数。于是，复数 $z=2+3i$ 的共轭复数 $\bar{z}=2-3i$。一个复数的模就是其实部与虚部的平方之和的平方根。于是，复数 $z = 2 + 3i$ 的模的平方为 $|z|^2 = 4 + 9 = 13$。

根据等式：$i^2 = -1$，$(x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2$，一个复数和它的共轭复数之乘积等于其模的平方（$z \times \bar{z} = |z|^2$）。于是我们可以推断，任何一个非 0 的复数都是可以求其倒数的，而它的倒数就等于其共轭复数除以其模的平方。因此，$2 + 3i$ 的倒数就是 $(2-3i)/13$。

在其他背景中，比如空间旋转的研究中，数学家们发明了包括复数在内的各种数的集合。其中最简单的就是四元数反称域，其中的“反称”意味着交换律不适用于乘积。这一“体（域）”的优势是可以把有关空间旋转的计算化归为数的计算。这在信息学中，特别是指挥机器人或卫星时，非常有用。

图示1　一个复数的表示

针对一个复数 $z = x + iy$，我们可以确定它的附标，也就是图上坐标为（x，y）、记作 z 的那点。我们把 Oz 的长度记作 r、用弧度来记的定向角（Ox，Oz）记作 θ，三角形中的三角学关系让我们得知这样的关系：$x = r\cos\theta$ 以及 $y = r\sin\theta$，因此就能得到等式：$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$。



数学网址

homeomath.imingo.net/complexe.htm
教师所授的全套复数课程。

fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_complexe
在线百科全书的文章。

复数和几何有什么联系？

复数可以看做是平面上的点。更精确地说，如果 Oxy 是一个规格化正交坐标（直线 Ox 与 Oy 互相垂直，并且上面有等分刻度），那么针对一个复数 z，我们可以在这一坐标系中确定一个点，这个点的坐标就是这个复数的实部和虚部。这个点被称作复数 z 的附标。我们也可以把这个点记作 z，因为这两个概念已然合在一起了。我们还可以得到它的极坐标 r 与 θ，即 Oz 的长度与用弧度来记的定向角（Ox，Oz）（见图示 1）；这里的 r 就是复数 z 的模，θ 称为复数的辐角。于是我们可以推出这样的公式：$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$。这一写法称作复数 z 的三角学形式。有时我们把它记作 $[r,\ \theta]$。

关于这些点，我们可以定义两种运算。加法对应于实部与虚部的加法；可以表示为矢量之和。有关乘法，则是模相乘，然后加上辐角（见图示 2）。

代数可以呈现出丰富的几何学结论。特别是我们可以从中推出棣美弗公式：$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$。我们还可以从中推出单位复数 1 的 n 次根，也就是说这些数的 n 次幂等于 1：它们的附标构成了一个有 n 条边的正多边形（见图示 3）。在数学中，数 j 是单位复数 1 的 3 次根之一（$\sqrt[3]{1}$），模为 1，辐角为 120°。数 i 是单位复数 1 的 4 次根之一，模为 1，辐角为 90°。此外，我们还可以从中推出，任何复数都有两个平方根，除了 0（它的两个平方根相等，即合二为一）。如果复数的三角学形式为 $[r,\ \theta]$，那么这两个根就是 $[\sqrt{r},\ \theta/2]$ 以及它的相反数。

16 世纪，当时的数学家有互相通信下战书的习惯，复数的这种几何学与代数学之间的联系使得法国人弗朗索瓦·韦达解决了比利时人阿德里安·范·鲁门（Adriaan van Roomen）所提出的一个 45 次方程。他仅仅认为只需把一个角平分成 45 份即可，事实确实如此。

反过来看，运用复数还可以解决平面几何的问题，因为所有的几何学性质都可以转化为复数问题。

图示2　加法与乘法

对复数做加法时，我们把它们的实部和虚部分别相加，这就对应于平行四边形法则。而在两个复数的乘法中，辐角相加而模相乘。