

高中数学

编著

人民教育出版社

课程标准实验教科书衔接读本

高中数学

广东省教育厅教研室
人民教育出版社中学数学室

编著

人民教育出版社



课程标准实验教科书衔接读本

高中数学

广东省教育厅教研室
人民教育出版社中学数学室 编著

*

人民教育出版社出版

(北京市海淀区中关村南大街17号院1号楼 邮编:100081)

网址: <http://www.pep.com.cn>

广东教材出版中心重印

广东省新华书店发行

汕尾市博雅印务有限公司印刷

*

开本: 890 毫米×1240 毫米 1/32 印张: 2

2004 年 6 月第 1 版 2006 年 8 月第 2 次印刷

印数 87,101 - 120,600

ISBN 7 - 107 - 17814 - 8 定价: 2.29 元
G · 10903 (课)

如发现印、装质量问题,影响阅读,请与本中心(电话:020-37606563)联系调换。

主 编：吕伟泉 徐 勇

编写人员：崔海友 黄智军 郭慧清 石永生
袁智强 郑俊盛 郑喜中

责任编辑：章建跃

目 录

第一章 精确与近似 1

- 1.1 精确值的近似估计 1
- 1.2 方程的近似解 7

第二章 空间与图形 10

- 2.1 “影子”的几何学 10
- 2.2 简单几何体的三视图 15
- 2.3 简单几何体的展开图 18
- 2.4 简单图形的变换 24

第三章 统计与概率 30

- 3.1 用统计的观点看数据 30
- 3.2 这样的游戏是否公平 37
- 3.3 可能性的大小 40
- 3.4 怎样寻找概率 42

第四章 课题学习 45

- 4.1 红绿灯灯里的数学 45
- 4.2 哥尼斯堡七桥问题 52

第一章 精确与近似

据新华网报道,我国于2003年10月15日9时发射的“神舟”五号载人飞船,在距离地面约343 km的太空绕地球飞行14周(约60万 km)后,于2003年10月16日6时23分安全着陆,实际着陆点与理论着陆点仅相差约4.8 km.

上述报道中的数据许多都是近似数,或是某个精确值的近似值.在实际问题中,经常得不到准确数,并且很多时候也只需要数据的近似值.本章将通过具体例子,使同学们初步理解精确值的近似估计,并由此体会精确与近似在解决实际问题中的运用.

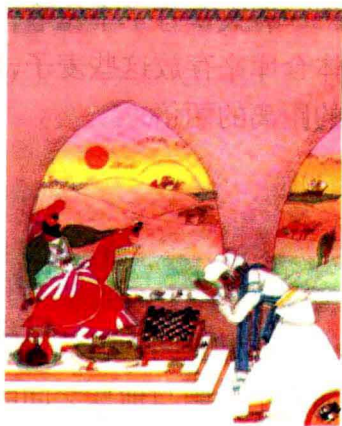
1.1

精确值的近似估计

1. 大数的估计

传说印度国王舍尔罕第一次玩国际象棋就被深深地吸引了.为此,他要对发明人达依尔进行奖赏,他对达依尔说:“你可以得到你想要的任何东西”.

达依尔向国王说:“我不要金银财宝,只求陛下按如下方式赏给我一些小麦.取一个棋子在棋盘上依次移动,当棋子在第1



格时，陛下给我1粒小麦；当棋子在第2格时，陛下给我2粒小麦；当棋子在第3格时，陛下给我4粒小麦。依此类推，第1格以后，陛下每一格给我的麦粒都是前一格的两倍，直至棋子移到第64个格为止。”

国王表示这样的奖赏太小了，可达依尔坚持如此，国王便当即同意了。可是，舍尔罕国王真能满足达依尔的要求吗？

我们用如下表格表示国王应给达依尔的麦粒数：

棋盘格数	1	2	3	4	...	x	...	64
小麦粒数	1	2	4	8	...	2^{x-1}	...	2^{63}

根据上表，舍尔罕国王应奖给发明者达依尔 $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{63}$ （粒）小麦。通过代数运算可以得到

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{63} = 2^{64} - 1.$$

$2^{64} - 1$ 是麦粒的准确数，但我们无法想象它到底是多少。利用计算机计算，得到

$$2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615,$$

但 18 446 744 073 709 551 615 粒小麦到底是多少呢？

有人曾打了个比喻，如果造一个高 5 m，宽 8 m 的长方体仓库来存放这些麦子，那么仓库的长度至少是地球到太阳的距离的两倍。



上述比喻适当吗？

通过查阅资料，得知太阳与地球的距离是不断变化的，通常把太阳与地球之间的距离说成是 1 亿 5 千万千米。

我们取出 $\frac{1}{5}$ 升麦粒，数出其粒数为 n ．由此可以得到 1 m^3 的麦粒数约为 $5\,000\,n$ ．设高 5 m ，宽 8 m 的长方体仓库的长度为 $x \text{ m}$ ，则

$$5 \times 8 \times x = \frac{18\,446\,744\,073\,709\,551\,615}{5\,000\,n},$$

$$\text{解得 } x = \frac{18\,446\,744\,073\,709\,551\,615}{200\,000\,n}.$$

因此，只要知道了 n 的值，就可以通过上式得出仓库的长度 x 的近似值．如果 $x \geq 1.5 \times 10^{11}$ ，则上述比喻是适当的，否则比喻不适当．

由此看来，在得出达依尔应得麦粒的准确数后，如果不根据这个准确数对麦子的量进行近似估计，那么舍尔罕国王就不能判断自己能否给予达依尔这个奖励．此例说明，在实际问题中，人们不仅需要精确刻划，有时也需要近似估计．



(1) $2^{64} - 1$ 粒麦粒的重量约为多少吨？

(2) 我们知道，可刻录光盘可存贮大量的信息．例如，利用一个可存贮 700 Mb 的信息量的光盘 A 存贮文字信息时，可以存贮 $700 \times 2^{10} \times 2^{10}$ 个英文字母，或存贮 $350 \times 2^{10} \times 2^{10}$ 个汉字．这是一个多大的信息量呢？请你查

看高中数学必修课本《数学1》的出版数据，了解这本书的字数与页数，然后给出一个光盘 A 大约可存贮多少本《数学1》的文字信息的近似估计(其中， $1 \text{ Kb} = 2^{10} \text{ b} = 1\,024 \text{ b}$ ， $1 \text{ Mb} = 2^{10} \text{ Kb} = 1\,024 \text{ Kb}$)．



2. 无理数的近似估计

某人每次驾车远行前，总要用底面半径为 20 cm，高为 60 cm 的圆柱形汽油桶到加油站加满一桶备用汽油. 如果汽油单价为 3 元/升，那么他购买这桶备用汽油应付给加油站多少钱？



我们知道，圆柱形容器的容量

$$V = \pi r^2 h,$$

其中 r 为底面圆的半径， h 为圆柱形容器的高， π 为圆周率.

当 $r = 20 \text{ cm} = 2 \text{ dm}$ ， $h = 60 \text{ cm} = 6 \text{ dm}$ 时，根据上述公式可得

$$V = \pi \times 2^2 \times 6 = 24\pi \text{ (升)}.$$

这样，某人买这桶汽油应付 72π 元. 那么加油站是否要收 72π 元呢？

显然，这是不可能的，因为 72π 是一个无理数，任何人都无法给出这个数字的钱数. 实际上，大多数加油站加油时，油表显示的是精确到 0.01 的近似数.

通过计算器计算，得到

$$72\pi \approx 226.20,$$

所以，购买的备用汽油所需的费用是 226.20 元.

这里，有理数 226.20 是无理数 72π 的近似值. 用有理数近似地表示无理数是人们经常使用的方法.



化圆为方是古代几何中的一个著名难题，它的内容是：

用圆规和无刻度直尺，通过有限次作图，作一个正方形，使其面积等于已知圆的面积。

数学家已经证明上述作图是不可能实现的。

那么，我们能否把半径为 1 的圆化为一个正方形，使其面积与圆面积的差的绝对值不超过 0.01 呢？

设正方形的边长为 x ，则

$$x^2 = \pi,$$

从而

$$x = \sqrt{\pi}.$$

通过计算器计算，得到

$$x \approx 1.772\,453\,85,$$

所以

$$1.772 < x < 1.773,$$

$$3.139\,984 < x^2 < 3.143\,529.$$

由于

$$3.143\,529 - 3.139\,984 = 0.003\,545 < 0.01,$$

所以，取正方形的边长为 1.772 与 1.773 之间的任意一个数值（如 $x = 1.7\,725$ ）时，所作出的正方形的面积与圆的面积的差的绝对值都不超过 0.01。



(1) 在西部贫困地区, 大约30万元人民币就可以建一所“希望小学”. 请查阅资料获得东部发达地区 (广东、福建、浙江、江苏、上海) 的人口近似数, 如果东部发达地区每人捐献1元人民币, 那么, 这些捐款可供西部建大约多少所“希望小学”?

(2) 传说大约在公元前400年, 古希腊的雅典流行疫病, 为了消除灾难, 人们向太阳神阿波罗求助, 阿波罗提出要求, 必须将他神殿前的立方体祭坛的体积扩大1倍, 否则疫病会继续流行. 人们百思不得其解, 不得不求教于当时最伟大的学者柏拉图, 柏拉图也感到无能为力. 这就是古希腊三大几何难题之一的倍立方体问题. 用数学语言表达就是: 求作一个立方体, 使它的体积是已知立方体体积的两倍. 业已证明, 如果仅用圆规与不带刻度的尺子是不可能完成上述作图的.

已知立方体的棱长是1 m, 求作一个立方体, 使其体积为已知立方体体积的两倍 (精确到0.001).

(3) 通过估计无理数 $\sqrt{39}$ 与 2π (π 为圆周率) 的范围, 给出 $\sqrt{39}$ 与 2π 的大小关系.

某人拟在自己的花园里建一个能蓄水 2 m^3 的长方体蓄水池. 要求长比宽多 1 m , 高比长多 2 m . 问这个蓄水池的长、宽、高各为多少 (精确到 0.01)?

设蓄水池的宽为 $x\text{ m}$, 则长与高分别为 $(x+1)\text{ m}$, $(x+2)\text{ m}$. 所以

$$x(x+1)(x+2)=2. \quad (1)$$

只要求出方程(1)的解, 我们就能知道蓄水池的长, 宽, 高.

方程(1)可以化为

$$x^3 + 3x^2 + 2x - 2 = 0.$$

令 $y = x^3 + 3x^2 + 2x - 2$, 利用图形计算器或计算机在直角坐标系中作出函数 $y = x^3 + 3x^2 + 2x - 2$ 的图象 (见下页图 1.2.1).

在图象上任取一点 M , 测出点 M 的坐标, 移动点 M , 可以发现: 当点 M 与 x 轴的距离越来越小时, 点 M 的纵坐标的绝对值越来越小. 当点 M 位于 x 轴上时, 点 M 的纵坐标为 0 .

函数 $y = x^3 + 3x^2 + 2x - 2$ 的图象与 x 轴交点的横坐标, 就是方程 $x^3 + 3x^2 + 2x - 2 = 0$ 的解.



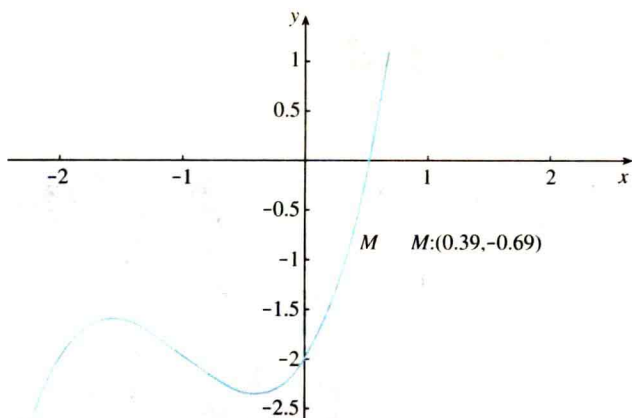


图 1.2.1

观察图 1.2.1, 可以发现, 函数 $y = x^3 + 3x^2 + 2x - 2$ 的图象与 x 轴交点的横坐标在 0.5 与 0.6 之间, 因此方程 (1) 在 0.5 与 0.6 之间有一个解 x_1 , 即

$$0.5 < x_1 < 0.6.$$

通过计算器计算, 得到下表

x	0.50	0.51	0.52	0.53	0.54	0.55	0.56	0.57	0.58	0.59	0.60
y	-0.1250	-0.0670	-0.0082	0.0516	0.1123	0.1739	0.2364	0.2999	0.3643	0.4297	0.4960

由上表, 我们有 $x_1 \approx 0.52$.

所以, 蓄水池的长、宽、高的近似值分别为 1.52 m、0.52 m、2.52 m.

一般地, 我们可以按以下步骤求方程的近似解:

1. 将方程转化为一边为 0 的形式;
2. 将方程不为 0 一边的代数式设为 y , 得到一个函数;
3. 借助计算器或计算机, 在直角坐标系中作出函数的图象;

象;

4. 观察图象，得出方程解的大致范围；

5. 根据给定的精确度，将得到的范围等分为若干份（如十等分），利用计算器计算出各等分点的函数值，将函数值的绝对值最小的等分点作为方程的近似解。



求下列方程的近似解（精确到 0.01）：

1. $x^3 - x^2 - 2 = 0$; 2. $x^3 - x + 1 = 0$.

第二章 空间与图形

观察周围世界，你会发现各种各样的图形，它们美化了生活，也引起我们思考。如：影子是怎样形成的？建筑设计师们怎样把建筑物表现在平面图纸上？如何设计一个产品的包装盒？……这些问题的解决需要我们具备更多的图形知识。这一章，我们将走进更加丰富的图形世界，探究物体的空间图形与平面图形的联系，了解它们的广泛应用。

2.1

“影子”的几何学

影子的形成要有三个条件：光源，物体和屏幕。光源通常指本身能发光的物体，包括自然光源和人造光源。太阳是最重要的自然光源，电灯、蜡烛等是常见的人造光源。屏幕通常指地面、墙壁等。光源、物体和屏幕的不同位置，会形成许多有趣的影子，这些影子中蕴藏着许多几何道理。

下面我们从几何学的角度思考下列“影子”。

日晷是人类测量时间间隔的工具(图2.1.1)。它由晷面和晷针两部分构成。晷面通常用石头做成，呈圆形，上面刻有子丑寅卯辰巳午未申酉戌亥十二个时辰，固定在石柱上。晷针用铁做成，安装在晷面的中心，与晷面成一定角度。有太阳的时候，晷针的影子投在晷面上，并随着太阳在天空中的

移动而指向不同的时辰区域.人们根据晷针阴影所在的位置而确定时间.



图 2.1.1



图 2.1.2

皮影戏, 又称“影子戏”, 它是用灯光照射兽皮或纸版雕刻成的人物剪影以表演故事的戏剧. 剧目、唱腔多同地方戏曲相互影响, 由艺人一边操纵一边演唱, 并配以音乐. 它是我国历史悠久, 流传很广的一种民间艺术(图 2.1.2).

人在阳光下走路时会形成影子. 在不同的时刻, 例如一天的上午、中午、下午, 人的影子的形状、大小和位置不同(图 2.1.3).



图 2.1.3

上述现象因物体的形状不同, 光源的位置不同, 影子的形状和大小也就不同. 人们将此类自然现象加以抽象, 得到

一种将空间中的物体展现在平面上的几何方法，即投影法。

例如，灯光照射三角板在桌面上产生影子的现象，可以作如下的简化(图 2.1.4(a))。

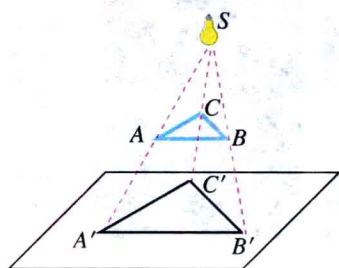


图 2.1.4(a)

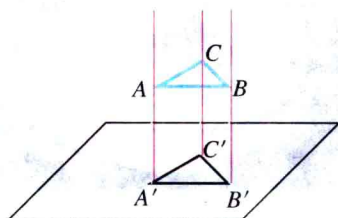


图 2.1.4(b)

将光源所在位置抽象为一点 S ，称为投影中心．投影中心(S)与三角板上各点 (A 、 B 、 C) 的投影连线 (SAA' 、 SBB' 、 SCC') 称为投影线，接受投影的面，称为投影面(三角形 $A'B'C'$ 所在平面)．投影线与投影面的交点称为点的投影．

投影分为中心投影和平行投影两大类．

上面的例子中，所有的投影线都交于投影中心，这样的投影称为 **中心投影**．

当把投影中心移到无穷远处时，所有的投影线都互相平行，这样的投影称为 **平行投影**．例如，人在阳光下走路时形成影子的现象就属于平行投影．投影线垂直于投影面的平行投影称为正投影(图 2.1.4 (b))．物体的正投影称为物体的 **视图**．

由图 2.1.4(a)和图 2.1.4 (b) 可知，中心投影的投影大小与物体和投影面之间的距离有关．平行投影的投影大小与物体和投影面之间的距离无关．因此，建筑师在设计建筑平面图时，通常采用正投影的方法，绘出建筑物的视图．