

GCT(硕士专业学位)联考辅导教程



2010年

全国硕士专业学位联考命题研究组 组编

GCT(硕士专业学位)联考辅导教程

数学分册

全新修订版



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

GCT(硕士专业学位)联考辅导教程

GCT(硕士专业学位)联考辅导教程

数学分册(全新修订版)

全国硕士专业学位联考命题研究组 组编



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

GCT 数学基础能力测试的试题以数学基础知识为背景,重点考查考生逻辑思维能力、数学运算能力、空间想像能力和分析解决问题的能力。本书共分六大部分:前五部分分别对算术、初等代数、几何与三角、一元函数微积分及线性代数进行了基础知识讲解、典型例题分析,并提供章节强化训练题供考生自学自测;第六部分是模拟试题与解析,考生可以用来进行考前模拟,检验复习效果。

本书适用对象是参加 2010 年 GCT 考试的广大考生。

图书在版编目(CIP)数据

GCT(硕士专业学位)联考辅导教程·数学分册(全新修订版)/全国硕士专业学位联考命题研究组组编.
—2 版. —北京:北京大学出版社,2010.2

(GCT(硕士专业学位)联考辅导教程)

ISBN 978-7-301-16939-1

I. G… II. 全… III. 高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. G643

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 025159 号

书 名: GCT(硕士专业学位)联考辅导教程·数学分册(全新修订版)

著作责任者: 全国硕士专业学位联考命题研究组 组编

策划编辑: 林章波

责任编辑: 李娉婷

标准书号: ISBN 978-7-301-16939-1/O·0813

出 版 者: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区成府路 205 号 100871

网 址: <http://www.pup.cn> <http://www.pup6.com>

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62750667 出版部 62754962

电子邮箱: pup_6@163.com

印 刷 者: 河北滦县鑫华书刊印刷厂

发 行 者: 北京大学出版社

经 销 者: 新华书店

787 毫米×1092 毫米 16 开本 25.5 印张 600 千字

2005 年 6 月第 1 版

2010 年 2 月第 2 版 2010 年 2 月第 1 次印刷(总第 8 次印刷)

定 价: 42.00 元

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究

举报电话: 010-62752024

电子邮箱: fd@pup.pku.edu.cn

全新修订版前言

硕士专业学位研究生入学资格考试(GCT)开始于 2003 年, 以前称为工程硕士专业学位研究生入学资格考试(简称 GCT-ME)。2004 年, 国务院学位委员会办公室对考试大纲进行了修订, 发布了《硕士专业学位研究生入学资格考试指南》, 适用对象除工程硕士外, 还增加了农业推广和兽医专业硕士。GCT 考试作为国务院学位委员会办公室新实行的一种考试, 考试名称虽然少了“工程”二字, 但其考试对象主要还是应考工程硕士的考生。

硕士专业学位研究生的入学资格考试试卷由四部分构成: 语言表达能力测试、数学基础能力测试、逻辑推理能力测试和外语运用能力测试。

GCT 试卷满分 400 分, 每部分各占 100 分。考试时间为 3 小时, 每部分为 45 分钟。

数学基础能力测试旨在考查考生对数学基础知识的掌握以及分析问题和解决问题的能力。数学基础能力测试共有五部分: 算术、代数、几何与三角、一元函数微积分以及线性代数。考试题目共 25 个, 考试时间 45 分钟。

GCT 入学考试数学部分有如下特点。

第一, 内容繁杂, 综合性强。考试内容囊括算术、代数、几何与三角、一元函数微积分以及线性代数的基础知识, 考试战线很长, 包括小学、初中、高中以及大学的数学知识。

第二, 考试时间很紧张, 45 分钟, 解决 25 道题, 平均每道试题的分配时间不到 2 分钟。

为了帮助考生顺利通过考试, 赢得高分, 我们编写了这本辅导教程, 其特点如下。

(1) 汇集考试大纲中所涉及的重要知识点, 包括基本概念、基本理论以及基本方法, 系统、全面、深入地讲解和分析考试大纲所规定的内容。

(2) 通过例题的讲解加强对重要知识点的理解和掌握, 帮助考生突破难点、提高分析问题和解决问题的能力。

(3) 为了提高考生的临场应试能力, 我们为考生配备了两套模拟试题, 供考生进行模拟实战演练。

对于数学部分的复习, 这里给考生提几点建议。

第一, 考生首先应该掌握基本概念, 熟悉考点知识, 紧扣大纲, 抓住重点。考生应该以“三基”和“一纲”为主线, “三基”即基本概念、基本原理和基本方法; “一纲”即最新 GCT 联考数学考试大纲。考生首先应该系统地掌握大纲规定的基础知识, 对大纲规定的内容进行梳理, 形成知识网络; 其次在接触一定量的题型之后, 头脑中留下的不是纷繁的题目, 而是清晰、鲜明、深刻的基础知识和基本技能, 以及基本的数学思想和方法。不论是数学理论的建立, 还是进行数学运算和逻辑推理, 无一不是以明确而又清晰的概念为基础。数学基础知识是进一步提高解题速度的基础。

第二, 考生要重视概念的复习, 从不同的角度准确地把握住概念的内涵, 注意相关概念的联系与区别。否则, 解题时思维上就会出现疑惑与混乱, 方法上也就会出现种种谬误。

第三, 复习时演练一定量的习题是非常必要的, 它是提高考试成绩的重要手段, 但也不要搞题海战术, 更重要的是吃透大纲规定的基本考点, 学会应用, 提高分析问题和解决问题的能力。解题时既要考虑解题的通法, 又要分析它的特殊性, 寻求最佳解决方法, 提

高解题能力和对新题型的适应能力。

第四,归纳总结再思考是至关重要的学习方法,在解题的基础上认真总结,及时归纳。这样既能梳理所学的知识、掌握解题的方法和规律,又能培养探索和创新的能力。如果只是一味的做题,把做题的多少作为复习效果与努力程度的一个标准,而不注重及时的总结,那么考生所收到的实际复习成效是值得怀疑的。如果不注重及时的总结和分析,对疑难问题不进行认真的分析和清理,那么下次碰到类似或者相同的问题还是束手无策。

本套丛书自出版以来,受到了考生的喜爱。为了让考生深入地掌握 GCT 考试的考点、重点和难点,我们在原版的基础上进行了认真而严格的修订。更换了比较陈旧的习题,删除了不符合考试大纲的内容和习题,使本书更加贴近考试大纲,更符合考生复习的需要。全新修订版具有如下特点。

(1) 集合清华大学、北京大学和中国人民大学等名校的权威信息,综合名师的辅导精华,全力推出 2010 年 GCT 入学资格考试整体解决方案。

(2) 精辟阐明解题思路、全面展现题型变化。根据命题思路,列题型、讲方法,充分展示解题技巧和其内在规律性。

(3) 科学预测、权威预测、最新预测。有效地把握命题特点,精编了足量的经典习题和模拟试题,强调反应速度,迅速提高考生的应试能力。

由于编者的经验和水平有限,疏漏之处在所难免,望广大读者、辅导老师和各方面专家批评指正。

编者
2010 年 1 月

目 录

第一部分 算术.....	1
第一章 算术.....	1
第一节 数的概念、性质和运算.....	1
第二节 比和比例.....	2
第二部分 初等代数.....	10
第二章 数和代数式.....	10
第一节 实数.....	10
第二节 复数.....	11
第三节 代数式及其运算.....	13
第三章 代数方程和方程组.....	24
第四章 集合、映射和函数.....	32
第五章 不等式.....	41
第六章 数列与数学归纳法.....	52
第七章 排列、组合、二项式定理和古典概率.....	65
第一节 排列与组合.....	65
第二节 二项式定理.....	66
第三节 古典概率.....	67
第三部分 几何与三角.....	80
第八章 常见几何图形.....	80
第一节 常见平面几何图形.....	80
第二节 空间几何体.....	84
第九章 三角学的基本知识.....	103
第一节 三角函数.....	103
第二节 两角和与差的三角函数.....	107
第三节 反三角函数.....	108
第四节 解简单的三角方程.....	109
第十章 平面解析几何.....	128
第一节 平面向量.....	128
第二节 直线.....	130
第三节 曲线和方程.....	132
第四部分 一元函数微积分.....	155
第十一章 极限与连续.....	155
第一节 函数.....	155

第二节 极限	157
第三节 函数的连续性	160
第十二章 一元函数微分学	175
第一节 导数的概念	175
第二节 求导公式及运算法则	177
第三节 微分	186
第四节 中值定理与泰勒公式、洛必达法则	187
第五节 函数的单调性与极值	201
第十三章 一元函数积分学	223
第一节 不定积分的概念和简单的计算	223
第二节 定积分的概念及性质	233
第三节 定积分的公式与计算法	236
第四节 定积分的应用	239
第五部分 线性代数	255
第十四章 行列式	255
第一节 行列式的概念和性质	255
第二节 行列式的计算	259
第十五章 矩阵	271
第一节 矩阵的概念与运算	271
第二节 可逆矩阵的逆矩阵	275
第三节 矩阵的初等变换和初等矩阵	278
第四节 矩阵的秩	282
第五节 分块矩阵	284
第十六章 向量	301
第一节 向量的概念与运算	301
第二节 向量的线性相关性	302
第三节 向量组的秩	306
第十七章 线性方程组	320
第一节 线性方程组的基本概念	320
第二节 线性方程组解的性质和结构	322
第十八章 矩阵的特征值和特征向量	343
第一节 特征值和特征向量的基本概念	343
第二节 矩阵的相似对角化的问题	344
第三节 重要公式与结论	345
第六部分 模拟试题与解析	361
模拟试题(一)	361
模拟试题(一)答案与解析	364
模拟试题(二)	370
模拟试题(二)答案与解析	373

附录.....	379
2009 年 GCT 入学资格考试数学基础能力测试试题.....	379
2009 年 GCT 入学资格考试数学基础能力测试试题参考答案与解析.....	382
2008 年 GCT 入学资格考试数学基础能力测试试题.....	385
2008 年 GCT 入学资格考试数学基础能力测试试题参考答案与解析.....	388
2007 年 GCT 入学资格考试数学基础能力测试试题.....	392
2007 年 GCT 入学资格考试数学基础能力测试试题参考答案与解析.....	395

第一部分

算 术

第一章 算 术

【基本考点精析】

第一节 数的概念、性质和运算

1. 自然数

在数物体的时候，用来表示物体个数的 1, 2, 3, …叫做自然数. 一个物体也没有，用 0 表示，0 也是自然数.

2. 分数

将单位“1”平均分成若干份，表示这样的一份或者几份的数，称为分数. 在分数中，表示把“1”平均分成多少份的数，称为分数的分母；表示取了多少份的数，称为分数的分子；其中的一份，称为分数的单位.

分数可分为真分数、假分数和带分数.

3. 小数

把整数“1”平均分成 10 份，100 份，1000 份……这样的一份或几份是十分之几，百分之几，千分之几……它们可以用小数表示，小数分为有限小数、无限小数、循环小数等. 小数的末尾添上“0”或者去掉“0”，小数的大小不变.

循环小数是指一个小数的小数部分从某一位起，一个数字或者几个数字依次不断地重复出现的小数. 这样的依次不断重复出现的数字，称为这个循环小数的循环节.

4. 数的整除

在整数除法中，当整数 a 除以整数 $b(b \neq 0)$ ，除得的商正好是整数而无余数时，则称 a 能被 b 整除或称 b 能整除 a . 当 a 能被 b 整除时，也称 a 是 b 的倍数， b 是 a 的约数(也称因数). 能被 2 整除的数称为偶数，通常也称为双数. 不能被 2 整除的数称为奇数，通常也称为单数.

一个大于 1 的整数，如果它的正约数只有 1 及它本身，称为质数(也称素数). 一个数，如果除了 1 和它本身，还有其他约数，叫做合数. 1 既不是质数也不是合数.

几个数公有的约数叫做这几个数的公约数，所有公约数中最大的一个叫做这几个数的最大公约数，几个数公有的倍数叫做这几个数的公倍数，所有公倍数中最小的一个叫做这几个数的最小公倍数.

分数的分子和分母都乘以或者都除以相同的数(零除外), 分数的大小不变.

5. 数的四则运算

1) 加法

把两个数合并成一个数的运算称做加法. 数的加法运算满足交换律和结合律, 即

$$\begin{aligned} a+b &= b+a \\ (a+b)+c &= a+(b+c) \end{aligned}$$

2) 减法

已知两个数的和与其中的一个加数, 求另一个加数的运算, 叫做减法, 减法是加法的逆运算.

3) 乘法

求几个相同加数的和的简便运算, 叫做乘法. 相乘的两个数叫做因数, 乘得的数叫做积, 数的乘法满足交换律、结合律和分配律, 即有

$$\begin{aligned} a \times b &= b \times a, (a \times b) \times c = a \times (b \times c) \\ (a+b) \times c &= a \times c + b \times c \end{aligned}$$

4) 除法

已知两个因数的积与其中一个非零因数, 求另一个因数的运算, 叫做除法. 已知的积叫做被除数, 已知的一个非零因数叫做除数, 求出的未知因数叫做商.

5) 运算性质

(1) 交换性质.

$$\begin{aligned} a+b-c &= a-c+b, a-b-c = a-c-b \\ a \times b \div c &= a \div c \times b, a \div b \div c = a \div c \div b (b \neq 0, c \neq 0) \end{aligned}$$

(2) 结合性质.

$$\begin{aligned} a+b-c &= a+(b-c) = a-(c-b) \\ a-b-c &= a-(b+c) \\ a \times b \div c &= a \times (b \div c) (c \neq 0) \\ a \div b \times c &= a \div (b \div c) (b \neq 0, c \neq 0) \\ a \div b \div c &= a \div (b \times c) (b \neq 0, c \neq 0) \end{aligned}$$

6) 四则混合运算

在四则运算中, 加法和减法叫做第一级运算, 乘法和除法叫做第二级运算. 在一个没有括号的算式中, 如果只含有同一级运算, 要从左往右依次计算; 如果含有两级运算, 要先做第二级运算, 后做第一级运算. 在一个有括号的算式中, 要先算小括号里面的, 再算中括号里面的.

第二节 比 和 比 例

1. 比

两个数 a 与 b 相除称为 a 与 b 的比, 记为 $a:b$, 即 $a:b = \frac{a}{b}$, a 为比的前项, b 为比的后项, $\frac{a}{b}$ 为比值.

2. 比的性质

(1) $a:b=k \Leftrightarrow a=kb$

(2) $a:b=ma:mb(m \neq 0)$

3. 比例

两个相等的比称为比例，记为 $a:b=c:d$ ， a, d 称为比例的外项， b, c 称为比例的内项，也记为 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 。

4. 比例的基本性质

(1) $a:b=c:d \Leftrightarrow ad=bc$

(2) $a:b=c:d \Leftrightarrow d:b=c:a \Leftrightarrow a:c=b:d$

(3) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

(4) 若 $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$ ，即 $a:b:c=a_1:b_1:c_1$ ，则

$$\frac{a+b+c}{a_1+b_1+c_1} = \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$$

5. 正比例与反比例

若 $y=kx(k \neq 0, k$ 为常数)，则称 y 与 x 成正比， k 为比例系数。

若 $y = \frac{k}{x}(k \neq 0, k$ 为常数)，则称 y 与 x 成反比， k 为比例系数。

【典型例题分析】

【例 1】(2008 年试题)已知 $\frac{a}{b} = -\frac{3}{5}$ ， $\frac{b}{c} = \frac{-7}{9}$ ， $\frac{d}{c} = -\frac{5}{2}$ ，则 $\frac{a}{d} =$ ()。

(A) $-\frac{14}{75}$

(B) $\frac{14}{75}$

(C) $\frac{75}{14}$

(D) $-\frac{75}{14}$

答案：(A)

分析：易知 $\frac{a}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{b}{c} \div \frac{d}{c}$ ，即

$$\frac{a}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{b}{c} \div \frac{d}{c} = \left(-\frac{3}{5}\right) \times \left(\frac{-7}{9}\right) \div \left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{14}{75}$$
，故应选(A)。

【例 2】(2008 年试题)请你想好一个数，将它加 5，将其结果乘以 2，再减去 4，将其结果除以 2，再减去你想好的那个数，最后的结果等于()。

(A) $\frac{1}{2}$

(B) 1

(C) $\frac{3}{2}$

(D) 3

答案：(D)



分析: 设所想的数为 a , 则题中的复合运算为 $[(a+5) \times 2 - 4] \div 2 - a = a + 3 - a = 3$, 故应选(D).

【例 3】 (2008 年试题)把浓度为 50% 的酒精溶液 90kg 全部稀释为浓度为 30% 的酒精溶液, 需要加水()kg.

- (A) 60 (B) 70
(C) 85 (D) 105

答案: (A)

分析: 显然在稀释的过程中, 溶质是不变的. 稀释前, 溶质为 $50\% \times 90\text{kg} = 45\text{kg}$; 稀释后的溶质仍为 45kg, 此时溶液质量为 $45\text{kg} \div 30\% = 150\text{kg}$. 相比稀释前增加了 $150\text{kg} - 90\text{kg} = 60\text{kg}$, 即为所加的水量. 故应选(A).

【例 4】 (2008 年试题)假设地球有两颗卫星 A、B 在各自固定的轨道上绕地球运行, 卫星 A 绕地球一周用 $1\frac{4}{5}\text{h}$, 每经过 144 周, 卫星 A 比卫星 B 多绕地球 35 周. 卫星 B 绕地球一周用()h.

- (A) $2\frac{1}{3}$ (B) $2\frac{2}{3}$
(C) $3\frac{1}{5}$ (D) $3\frac{3}{5}$

答案: (C)

分析: 经过 144h 时, 卫星 A 绕地球所转的圈数为 $144 \div 1\frac{4}{5} = 80$. 则由题意知, 卫星 B 绕地球所转的圈数为 $80 - 35 = 45$, 其绕地球一周所用小时数为 $144 \div 45 = \frac{16}{5} = 3\frac{2}{5}$. 故应选(C).

【例 5】 (2008 年试题)五个不同的数, 两两之和依次等于 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 15. 这 5 个数的平均值是().

- (A) 18.8 (B) 8.4
(C) 5.6 (D) 4.2

答案: (D)

分析: 5 个不同的数, 两两相加, 则每个数均被加 4 次, 所有这些两数之和再求和, 得出的结果就是这 5 个不同的数的 4 倍. 所以这 5 个数之和为 $(3+4+5+6+7+8+11+12+13+15) \div 4 = 21$, 则 5 个数的平均值为 $21 \div 5 = 4.2$. 故应选(D).

【例 6】 (2008 年试题)两个正数 $a, b (a > b)$ 的算术平均值是其几何平均值的 2 倍, 则与 $\frac{a}{b}$ 最接近的整数是().

- (A) 12 (B) 13
(C) 14 (D) 15

答案: (C)

分析: 由题意可知, $\frac{a+b}{2} = 2\sqrt{ab}$, 两边平方后除以 ab 并整理可得 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 14$.



又因为 a 、 b 均为正数, 且 $a > b$, 所以 $13 < \frac{a}{b} < 14$, $\frac{1}{14} < \frac{a}{b} < \frac{1}{13}$. 与 $\frac{a}{b}$ 接近的两个整数为 13 和 14. 又因为

$$\left| \frac{a}{b} - 14 \right| = \left| -\frac{b}{a} \right| = \frac{b}{a} < \frac{1}{13}, \quad \left| \frac{a}{b} - 13 \right| = \left| 1 - \frac{b}{a} \right| = 1 - \frac{b}{a} > 1 - \frac{1}{13} > \frac{12}{13}$$

所以 $\frac{a}{b}$ 与整数 14 最接近. 故应选(C).

【例 7】 (2007 年试题) 甲乙两人沿同一路线骑车(匀速)从 A 区到 B 区, 甲需用 30 分钟, 乙需用 40 分钟. 如果乙比甲早出发 5 分钟去 B 区, 则甲出发后经()分钟可以追上乙.
(A) 25 (B) 20 (C) 15 (D) 10

答案: (C)

分析: 因为 $s = vt$, 所以 $\frac{v_{\text{甲}}}{v_{\text{乙}}} = \frac{t_{\text{乙}}}{t_{\text{甲}}}$ (当 s 不变时). 从 A 区到 B 区, 甲需用 30 分钟, 乙需用 40 分钟, 则 $v_{\text{甲}}/v_{\text{乙}} = \frac{40}{30} = \frac{4}{3}$. 乙比甲早出发 5 分钟去 B 区, 设甲出发经 t 分钟可以追上乙, 因路程相同, $v_{\text{甲}}/v_{\text{乙}} = \frac{5+t}{t} = \frac{4}{3}$, 则 $t = 15$, 故应选(C).

【例 8】 (2006 年试题) 某型号的变速自行车主动轴有 3 个同轴的齿轮, 齿数分别是 48、36 和 24, 后轴上有 4 个同轴的齿轮, 齿数分别是 36、24、16 和 12, 则这种自行车共可获得()种不同的变速比.

(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 12

答案: (A)

分析: 当主动轴的齿数为 48 时, 变速比为 $\frac{48}{36} = \frac{4}{3}$, $\frac{48}{24} = 2$, $\frac{48}{16} = 3$, $\frac{48}{12} = 4$, 共 4 种;

当主动轴的齿数为 36 时, 变速比为 $\frac{36}{36} = 1$, $\frac{36}{24} = \frac{3}{2}$, $\frac{36}{16} = \frac{9}{4}$, $\frac{36}{12} = 3$, 共 4 种;

当主动轴的齿数为 24 时, 变速比为 $\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$, $\frac{24}{24} = 1$, $\frac{24}{16} = \frac{3}{2}$, $\frac{24}{12} = 2$, 共 4 种;

其中变速比相同的有 4 对, 故变速比的种数为 $4+4+4-4=8$, 应选(A).

【例 9】 (2005 年试题) 某项工程 8 个人用 35 天完成了全工程量的 $\frac{1}{3}$, 如果再增加 6 个人, 那么完成剩余的工程还需要的天数是().

(A) 18 (B) 35 (C) 40 (D) 60

答案: (C)

分析: 根据题意, 设需 x 天完成, 则有

$$\frac{\frac{1}{3}}{8 \times 35} \times (8+6) \times x = \frac{2}{3}$$

$$x = 40$$

故选(C).

【例 10】 (2004 年试题) 某校有若干女生住校, 若每间房住 4 人, 则还剩 20 人未住

下,若每间住 8 人,则仅有一间未住满,那么该校有女生宿舍的房间数为().

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

答案: (C)

分析: 设该校有女生宿舍 x 间, 则有

$$\begin{cases} 4x+20 < 8(x-1) \\ 4x+20 > 8x \end{cases} \Rightarrow 5 < x < 7 \Rightarrow x = 6$$

【例 11】(2006 年试题)一个容积为 10 升的量杯盛满纯酒精, 第一次倒出 a 升酒精后, 用水将量杯注满并搅拌均匀, 第二次仍倒出 a 升溶液后再用水将量杯注满并搅拌均匀, 此时量杯中的酒精溶液浓度为 49%, 则每次的倒出量 a 为()升.

- (A) 2.55 (B) 3 (C) 2.45 (D) 4

答案: B

分析: 量杯中剩余的酒精量为 $10 \times 49\% = 10 - a - \frac{10-a}{10} \times a$, 整理得 $a^2 - 20a + 51 = 0$.

解方程得 $a=3$ 或 $a=17$ (舍去), 故应选(B).

【例 12】(2003 年试题) A 、 B 、 C 、 D 、 E 共 5 支篮球队相互进行循环赛, 现已知 A 队已赛过 4 场, B 队已赛过 3 场, C 队已赛过 2 场, D 队已赛过 1 场, 则此时 E 队已赛过().

- (A) 1 场 (B) 2 场 (C) 3 场 (D) 4 场

答案: (B)

分析: 由于 A 队赛 4 场, 故 A 必须与其他 4 队都赛;

D 队已赛 1 场, D 队只与 A 队赛;

B 队已赛 3 场, B 队与 A 、 C 、 E 分别赛;

C 队已赛 2 场, C 队与 A 、 B 分别赛;

所以 E 队已赛 2 场. 故选(B).

【例 13】设 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, 且 $\frac{AB}{A'B'} = \frac{3}{5}$, $\triangle ABC$ 的面积是 $a - 2$, $\triangle A'B'C'$ 的面积是 $a+2$, 则 a 的值为().

- (A) 4.25 (B) 3.75 (C) 2.25 (D) 1.05

答案: (A)

分析: 因为相似三角形的面积之比为相似边比的平方, 所以有

$$\frac{a-2}{a+2} = \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

解得 $a=4.25$, 故选(A).

【例 14】(2005 年试题)2005 年, 我国甲省人口是全国人口的 $c\%$, 其生产总值占国内生产总值的 $d\%$; 乙省人口是全国人口的 $e\%$, 其生产总值占国内生产总值的 $f\%$, 则 2005 年甲省人均生产总值与乙省人均生产总值之比是().

- (A) $\frac{cd}{ef}$ (B) $\frac{ce}{df}$ (C) $\frac{cf}{de}$ (D) $\frac{de}{cf}$

答案: (D)

分析: 此题可设全省人口为 a , 国内生产总值为 b , 则由题意有, 甲省人均生产总值为 $\frac{d\% \cdot b}{c\% \cdot a}$, 乙省为 $\frac{f\% \cdot b}{e\% \cdot a}$, 故两者的比值为 $\frac{de}{cf}$. 从而得出答案为(D).

解此类题就是把未知的假设出来, 问题就可以简化易解了.

【例 15】 一个长方形的长和宽的长度都变为原来的 1.1 倍, 则其面积增加().

- (A) 1% (B) 20% (C) 21% (D) 100%

答案: (C)

分析: 由于长方形的长和宽的长度都变成了原来的 110%, 所以其面积变成了原来的 121%, 即增加了 21%.

【例 16】 (2004 年试题)甲、乙两种茶叶以 $x:y$ (重量比)混合配制成一种成品茶, 甲种茶每斤 50 元, 乙种每斤 40 元, 现甲种茶价格上涨 10%, 乙种茶价格下降 10%后, 成品茶的价格恰好仍保持不变, 则 $x:y$ 等于().

- (A) 1:1 (B) 5:4 (C) 4:5 (D) 5:6

答案: (C)

分析: 价格变化前成品价格为

$$\frac{50x + 40y}{x + y} \text{ 元}$$

价格变化时成品价格可表示为

$$\frac{50(1+10\%)x + 40(1-10\%)y}{x + y} \text{ 元}$$

浮动前后成品价格保持不变则

$$\frac{50x + 40y}{x + y} = \frac{55x + 36y}{x + y}$$

解得 $5x=4y$, 得 $x:y=4:5$. 故选(C).

【题型训练】

1. a, b 都是质数, 且 $c=a \times b$, 则 c 一定是().

- (A) 质数 (B) 奇数 (C) 偶数 (D) 合数

2. 一个合数最少有()个约数.

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

3. 设 $a > 0, c > b > 0$, 则().

(A) $\frac{a+b}{2a+b} > \frac{a+c}{2a+c}$

(B) $\frac{a+b}{2a+b} = \frac{a+c}{2a+c}$

(C) $\frac{a+b}{2a+b} < \frac{a+c}{2a+c}$

(D) $\frac{a+b}{2a+b}$ 与 $\frac{a+c}{2a+c}$ 的大小无法确定

4. 计算 $2\frac{2}{15} + 2.5 + 1\frac{3}{8} - 1\frac{5}{12}$.

5. 计算 $2 \div 2.4 + 2\frac{1}{2} \times 0.3 - 1\frac{1}{5}$.

6. 计算 $[1 - (4\frac{1}{3} - 1\frac{3}{4} \times 2)] \div 2\frac{1}{2}$.

7. 某商店将成本为 2000 元/套的服装按原价提高 50% 后再做 7 折“优惠”的广告宣传, 这样每售出一套服装可以获利 625 元, 则每套服装比按原价销售().

- (A) 多赚 100 元 (B) 少赚 100 元 (C) 多赚 125 元 (D) 少赚 125 元

8. 一种货币贬值 15%, 一年后又增值()才能保持原币值.

- (A) 15.25% (B) 16.78% (C) 17.17% (D) 17.65%

9. 一批货物要进仓库, 由甲、乙两队合运 9h 完成, 可运进全部货物的 50%, 乙队单独运则要 30h 才能运完, 又知甲队每小时可运进 3t, 则这批货物共有().

- (A) 135t (B) 140t (C) 145t (D) 150t

10. 购买商品 A、B、C, 第一次各买 2 件, 共 11.4 元; 第二次购买 A 商品 4 件, B 商品 3 件, C 商品 2 件, 共 14.8 元; 第三次购买 A 商品 5 件, B 商品 4 件, C 商品 2 件, 共 17.5 元, 则一件 A 商品的价格是().

- (A) 0.7 元 (B) 0.75 元 (C) 0.8 元 (D) 0.85 元

11. 设 $x-y$ 与 $\frac{1}{x+y}$ 成反比, 比例系数为 k ; y 与 x 成正比, 比例系数为 $1+k$, 则 k 的值为().

- (A) -3 (B) 3 (C) 1 (D) -1

【题型训练答案】

1. 答案: (D)

解析: a 、 b 都是质数, 所以 a 、 b 都不会是 1, 又因为 $c=a \times b$, 因此 c 至少有 3 个约数: 1、 a 、 c , 故 c 必为合数.

2. 答案: (B)

解析: 合数除了 1 和它本身以外还有其他的约数, 故若 m 是合数, 则必有 $m=a \times b$ 成立, 其中 $a \neq 1$ 且 $b \neq 1$, 因此 a 、 b 是 m 的异于 1 和 m 的约数. 所以, 当 $a \neq b$ 时, m 最少有 4 个约数; 当 $a=b$ 时, m 最少有 3 个约数. 综上所述, 合数最少有 3 个约数.

3. 答案: (C)

解析: $\frac{a+b}{2a+b} - \frac{a+c}{2a+c} = \frac{a(b-c)}{(2a+b)(2a+c)}$, 由题意可知 $a>0$, $c>b>0$, 因此 $\frac{a(b-c)}{(2a+b)(2a+c)} < 0$, 即 $\frac{a+b}{2a+b} < \frac{a+c}{2a+c}$, 因此选(C).

当 $0 < a < b$, 且 $c > 0$ 时, $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$ 是分数的一条基本性质, 其原因是 $\frac{a+c}{b+c} - \frac{a}{b} = \frac{c(b-a)}{b(b+c)} > 0$. 故选(C). 另外, 根据两个数的差的正负直接验证也是处理本题的一种方法.

$$\begin{aligned} 4. \text{解: 原式} &= 2\frac{2}{15} + 2\frac{1}{2} + 1\frac{3}{8} - 1\frac{5}{12} \\ &= 2\frac{16}{120} + 2\frac{60}{120} + 1\frac{45}{120} - 1\frac{50}{120} = 4\frac{71}{120} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \text{解: 原式} &= 2 \div 2\frac{2}{5} + 2\frac{1}{2} \times \frac{3}{10} - 1\frac{1}{5} \\ &= 2 \times \frac{5}{12} + \frac{5}{2} \times \frac{3}{10} - \frac{6}{5} \end{aligned}$$



$$= \frac{5}{6} + \frac{3}{4} - \frac{6}{5} = \frac{50}{60} + \frac{45}{60} - \frac{72}{60}$$

$$= \frac{23}{60}$$

6. 解: 原式 $= [1 - (4\frac{1}{3} - 2\frac{6}{4})] \div 2\frac{1}{2}$

$$= [1 - (4\frac{1}{3} - 3\frac{1}{2})] \div 2\frac{1}{2}$$

$$= [1 - (4\frac{2}{6} - 3\frac{3}{6})] \div 2\frac{1}{2} = [1 - \frac{5}{6}] \times \frac{2}{5}$$

$$= \frac{1}{15}$$

7. 答案: (C)

解析: 本题的解题关键是成本、销售价、“优惠价”以及利润的概念.

由题意, “优惠价”为 $2000 + 625 = 2625$ (元), 故原价为 $2625 \div 70\% \div (1 + 50\%) = 2500$ (元), 故多赚了 $2625 - 2500 = 125$ (元).

故选(C).

8. 答案: (D)

解析: 本题的解题关键在于理解欲保持原币值, 应增值的百分比是贬值后的百分比.

由题意, 设应增值的百分比为 x , 则有

$$(1 - 15\%)(1 + x) = 1$$

解得 $x = \frac{15}{85} \times 100\% \approx 17.65\%$

9. 答案: (A)

解析: 设这批货物共有 x t, 则有

$$(\frac{x}{30} + 3) \times 9 = 50\%x$$

解得 $x = 135$, 所以这批货物共有 135t.

10. 答案: (A)

解析: 由题意, 可知, 第二次比第一次多买两件 A 及 1 件 B, 第三次比第二次多买 1 件 A 及 1 件 B, 其差价刚好为 A 的单价:

$$(14.8 - 11.4) - (17.5 - 14.8) = 3.4 - 2.7 = 0.7(\text{元})$$

故选(A).

11. 答案: (A)

解析: 由题设, 得

$$x - y = \frac{k}{\frac{1}{x+y}} = k(x+y) \text{ 且 } x+y \neq 0 \quad \text{①}$$

$$y = (1+k)x \quad \text{②}$$

由①式得 $(1-k)x = (1+k)y$, 将②代入上式, 由 $x \neq 0$ 得 $1-k = (1+k)^2$, 即 $k^2 + 3k = 0$, 由比例系数为非零常数的概念, 得 $k = -3$.