面向21世纪高等学校教材改革课程

高等代数与解析几何

上册

西南师范大学数学系
代数与几何教研室 编著

面向21世纪高等学校教材改革课程

高等代数与解析几何

上册

西南师范大学数学系
代数与几何教研室 编著

西南师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等代数与解析几何．上册/西南师范大学数学系代数与几何教研室编著．—重庆．西南师范大学出版社，2002.9

ISBN 7-5621-2748-4

Ⅰ．高…　Ⅱ．西…　Ⅲ．①高等代数—高等学校—教材②解析几何—高等学校—教材　Ⅳ．①O15②O182

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 073430 号

高等代数与解析几何(上册)

西南师范大学数学系

代数与几何教研室编著

责任编辑:胡小松

封面设计:王正端

出版发行:西南师范大学出版社

(重庆·北碚　邮编 400715)

经 销 者:新华书店

印 刷 者:四川外语学院印刷厂

开　　本:850mm×1168mm　1/32

印　　张:10

字　　数:250 千字

版　　次:2002 年 9 月　第 1 版

印　　次:2004 年 7 月　第 2 次印刷

印　　数:1 001～1 700

书　　号:ISBN 7-5621-2748-4/O·70

定　　价:24.00 元(本册定价:12.00 元)

前 言

随着高等学校课程体系的改革,若干传统课程的教学内容和教学方法都在发生变化。《高等代数与解析几何》这门课程就是在这种变化中逐渐由传统的《高等代数》、《解析几何》两门课程演绎而成的。目前,国内已正式出版多部《高等代数与解析几何》教材。根据教学实践,我们在陈重穆编著的《高等代数》和刘海蔚编著的《解析几何》的基础上编著了这本《高等代数与解析几何》,其主要目的是使读者从较低的起点出发,能用较少的学时,掌握这两门课程的基本精髓,而且避免了在讲授《解析几何》时重复讲授《高等代数》中向量知识的过程。在很多方面,我们沿用了原教材的思想和内容。从内容上看,本教材几乎包含了传统的《高等代数》、《解析几何》教材的所有内容。在习题处理上,我们提供了两类习题:基础题和补充题,其中补充题有相当的难度。读者可根据自身特点选择习题练习。

为了教材的系统性和完整性,我们把二次曲线的一般理论作为最后一章,教学时可以根据实际情况选讲。对于同时开设《解析几何》的院校,本教材中的几何内容可以不讲。若使用本教材来讲授《解析几何》的内容,则应加强学生作图的练习。

从我们的实践来看,应根据学生实际情况进行内容的取舍,选

择适当的讲解方式。若以每周 7 学时计，一学年可以授完全部内容。

段泽勇教授承担了这套教材的整体框架设计和主要执笔工作，姚纯清副教授承担了几何内容的执笔工作。本教材也是在代数与几何教研室全体同仁的参与下完成的。书中的不当之处，敬请海内外同行批评指正！

编　者

2002 年 8 月

目 录

第一章

预备知识

本章主要介绍在高等代数与解析几何这门课程中的几个最基本的概念，它们包括集合、映射、数域、(直角)坐标系以及其它相关的一些基本内容，这些知识在其它的数学课程中也是基础的和常见的，是我们在学习现代数学理论时所必需的.

1.1　集合　映射

集合是现代数学中的一个最基本的概念. 通常，我们约定俗成地把若干特定对象的全体称为一个集合，并用字母 $A,B,C,\cdots$，来表示；集合中的对象称作是该集合中的元素，用字母 $a,b,c,\cdots;\alpha,\beta$……来表示. 这里，所谓特定对象的全体指的是满足给定条件的全部. 如：具有中华人民共和国国籍的全体公民；今年收到了高校录取通知书的全体中学毕业生；小于 100 的全体自然数；等等. 给定集合 A 之后，如果某个元素 α 在所给的这一个集合 A 之中，则记为“$\alpha\in A$”，读作“α 属于 A”；反之，记为“$\alpha\notin A$”，读作“α 不属于

A". 两个给定的集合 A 和 B 如果包含着完全相同的元素，即：$\alpha\in A$ 当且仅当 $\alpha\in B$，则称这两个集合是相等的，记作 $A=B$.

表示集合的方式有多种多样，其中最常见的为：

$$A=\{\alpha:P(\alpha)\} \text{ 或 } A=\{\text{对象}\mid\text{对象所满足的条件}\}.$$

有时，人们也用罗列的方式把一个集合中的元素全部表示出来，如：$A=\{1,2,3,4\}$；$B=\{$奇，偶$\}$；等等.

在集合与集合之间可以引入各种运算，其中最广泛地被人们所采用的是如下几种：

(1)**集合的交** 给定两个集合 A 和 B 之后，由这两个集合的共有元素所组成的一个新的集合 C 称作是这两个集合的**交**，记作 $C=A\cap B$. 如：$A=\{0,1,2\}$，$B=\{-1,0,1\}$，则 $A\cap B=\{0,1\}$.

(2)**集合的并** 给定两个集合 A 和 B 之后，由这两个集合中的全部元素所组成的一个新的集合 C 称作是这两个集合的**并**，记作 $C=A\cup B$. 如：$A=\{1,3,5\}$，$B=\{3,4,5\}$，则 $A\cup B=\{1,3,4,5\}$.

(3)**集合的差** 给定两个集合 A 和 B 之后，由集合 A 中不在集合 B 内的那一部分元素所组成的新集合 C 称作是集合 A 与 B 的差，记作 $C=A-B$. 如：$A=\{a:a\leqslant 100\}$，$B=\{a:a\leqslant -50\}$，则 $A-B=\{a:-50<a\leqslant 100\}$.

此外，若对给定的两个集合 A 和 B，我们总有 A 中的元素一定也是 B 中的元素，或者说，在 A 中不存在不属于 B 的元素，则称 A 为 B 的一个**子集**，记为 $A\subseteq B$. 一个不包含任何元素的集合称作是空集，记作 $\varnothing$. 容易验证 $\varnothing$ 是任意集合 A 的子集. (事实上，若 $\varnothing$ 不是集 A 的子集，则由子集的定义就知：在 $\varnothing$ 中应存在一个元素不在 A 中，但由 $\varnothing$ 是空集即知：这样的元素找不到. 故 $\varnothing$ 是任意集合 A 的子集.)

在集合与集合间进行适当的比较时，需要用到的一个很重要的概念就是映射. 我们按如下方式给出映射的定义：

定义 1.1.1 给定两个集合 A 和 $\overline{A}$，若有一个法则 ϕ 存在，使得对于 A 中的每一个元 a 通过 ϕ 在 $\overline{A}$ 中都有且仅有一个元 $\overline{a}$ 与之对应，且记作 $\overline{a}=\phi(a)$，则称 ϕ 为 A 到 $\overline{A}$ 的一个映射，并称 $\overline{a}$ 为 a 之象，而 a 为 $\overline{a}$ 在 ϕ 之下的一个原象. 有时人们将映射 ϕ 表记为 $\phi: A\to\overline{A}$ 或 $\phi: a\longmapsto\overline{a}(\forall a\in A)$.

我们看如下几个例子：

例 1.1.1 设 $\mathbf{R}$ 是一切实数组成的集合，B 是一切非负实数组成的集合，令法则

$$\phi: x\longmapsto x^2,$$

则 ϕ 是 $\mathbf{R}$ 到 B 的一个映射.

例 1.1.2 $\mathbf{R}$ 及 B 如例 1.1.1 所设，令法则

$$\sigma: x\longmapsto\pm\sqrt{x},$$

则 σ 不是 B 到 $\mathbf{R}$ 的一个映射，因为，当 $x>0$ 时，$\mathbf{R}$ 中有两个不同的数 $\sqrt{x}$ 及 $-\sqrt{x}$ 与 x 对应.

例 1.1.3 设 $\mathbf{N}$ 是一切自然数组成的集合，令法则

$$\tau: n\longmapsto n-1,$$

则 τ 不是 $\mathbf{N}$ 到 $\mathbf{N}$ 的一个映射. 因为 $\tau(1)=1-1=0\notin\mathbf{N}$，即在 τ 下，$\mathbf{N}$ 中没有数与 1 对应. 若我们将集合 $\mathbf{N}$ 换成由全体整数所组成的集合 $\mathbf{Z}$，则对于如上规定的法则 τ 有：τ 是 $\mathbf{Z}$ 到 $\mathbf{Z}$ 的一个映射.

例 1.1.4 设 R 为一切非负实数所组成的集合，B 为 -2 到 $+2$ 之间的一切实数所组成的集合，令法则

$$\gamma: x\longmapsto\sin x,$$

则 γ 是 R 到 B 之间的一个映射.

从上述几个例子中可以看出：对于两个集合之间的一个给定的法则而言，它有可能是这两个集合之间的一个映射，也有可能不是. 因此，今后在判定一个法则是否为集合之间的一个映射时一定要按定义进行验证. 下面，我们再对集合间的映射给出如下一些新的概念.

定义 1.1.2 设 σ 是集合 A 到 $\overline{A}$ 的一个映射，如果 A 中的任意两个不同的元在 σ 下有不同的象，即：只要 $a,b\in A, a\neq b\Rightarrow\sigma(a)\neq\sigma(b)$，则称 σ 为**单射**；如果 $\overline{A}$ 中任一元都在 σ 下有原象，即：只要 $\overline{a}\in\overline{A}$，就存在 $a\in A$，使 $\overline{a}=\sigma(a)$，则称 σ 为**满射**；如果 σ 既是单射又是满射，则称 σ 为**单满射**或**一一映射**.

在上面例 1.1.1 中的 ϕ 是一个从 $\mathbf{R}$ 到 B 的满射但不是单射；而例 1.1.3 中的从 $\mathbf{Z}$ 到 $\mathbf{Z}$ 的映射 τ 是一个单满射；例 1.1.4 中的 γ 是一个既非单又非满的映射.

根据定义易知：集合 A 到 $\overline{A}$ 的映射 σ 为单射的充分而且必要条件是对任意 $a_1,a_2\in A$，只要 $\sigma(a_1)=\sigma(a_2)$，就有 $a_1=a_2$.

我们再看一个特殊的映射. 规定

$$e: a\longmapsto a, \forall a\in A.$$

其中 A 是一个任意的集合. 显然，e 是一个 A 到 A 的单满射，且由于 e 把 A 的每一个元都映到其自身，因此，我们称 e 为 A 上的**单位映射**或**恒等映射**. 有时，人们也用符号 I_A 来表示集 A 上的恒等映射.

设 σ 是集合 A 到集合 $\overline{A}$ 的一个映射，A_1 是 A 的一个子集：$A_1\subseteq A$，用符号 $\sigma(A_1)$ 表示 A_1 中全体元素在 σ 下的象所成的集合. 即：

$$\sigma(A_1)=\{\sigma(a)\mid a\in A_1\}.$$

称 $\sigma(A_1)$ 为 A_1 在 σ 下的**象集**. 特别地，A 在 σ 下的象集记为：

$$\sigma(A)=\{\sigma(a)\mid a\in A\}.$$

由 σ 的定义知 $\sigma(A)\subseteq\overline{A}$. 于是，$\sigma$ 是集合 A 到 $\overline{A}$ 的满射当且仅当 $\sigma(A)=\overline{A}$.

对于两个映射，在一定条件下可以定义乘积. 设 σ,τ 分别是集合 A 到 B，B 到 C 的映射，σ 和 τ 的乘积 $\tau\sigma$ 定义为 A 到 C 的这样一个映射：

$$\tau\sigma(a)=\tau(\sigma(a)), a\in A.$$

即 A 中任一元素 a 在 $\tau\sigma$ 下的象是对 a 相继施行 σ 和 τ 的结果．例如：例 1.1.1 和例 1.1.4 中的映射的乘积 $\gamma\phi$ 是把实数先经 ϕ 映成非负实数，然后再经 γ 映成 -2 到 $+2$ 之间的实数，即 $\gamma\phi$ 是实数集 $\mathbf{R}$ 到区间 $C=[-2,+2]$ 上的一个映射．

映射 σ 和 τ 的乘积 $\tau\sigma$ 又称为 σ 和 τ 的**合成**，并可以由下面的图（称为**交换图**）来表示：

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\tau\sigma"] \arrow[dr, "\sigma"'] & & C \\
& B \arrow[ur, "\tau"'] &
\end{tikzcd}
$$

交换图

集合 A 到 $\overline{A}$ 的两个映射 σ 和 τ **相等**：$\sigma=\tau$，是指对于任意的 $a\in A$，都有

$$\sigma(a)=\tau(a).$$

即指 σ 和 τ 的作用完全相同．

可以很容易地证明：如果 σ 是 A 到 B 的映射，则

$$I_B\sigma=\sigma I_A=\sigma.$$

如果 σ,τ,ψ 分别是集合 A 到 B，B 到 C，C 到 D 的映射，则

$$(\psi\tau)\sigma=\psi(\tau\sigma).$$

事实上，对于上式，因为对任意的 $a\in A$，有

$$(\psi\tau)\sigma(a)=\psi\tau(\sigma(a))=\psi(\tau(\sigma(a))),$$
$$\psi(\tau\sigma)(a)=\psi(\tau\sigma(a))=\psi(\tau(\sigma(a))),$$

所以 $(\psi\tau)\sigma(a)=\psi(\tau\sigma(a))$．从而结论成立．

还可证明：如果 σ,τ 分别是集合 A 到 B，B 到 C 的单满射，则 $\tau\sigma$ 是 A 到 C 的单满射，证明留给读者完成．

定义 1.1.3 设 σ 是集合 A 到 B 的一个映射，如果存在 B 到 A 的映射 ϕ，使得

$$\phi\sigma=I_A,\ \sigma\phi=I_B,$$

则称 σ 是可逆的,此时称 ϕ 为 σ 的逆映射.

自然,一个集合 A 到 B 的映射不必都是可逆的,但是,我们有如下定理:

定理 1.1.1 设 σ 是集合 A 到集合 B 的一个映射,则 σ 是可逆的充分必要条件是 σ 为单满射;当 σ 可逆时,它的逆映射是唯一的.

证 先证充分性. 设 σ 是单满射. 因 σ 是满射,则对 B 中每一元素 y,有 $x\in A$,使得

$$\sigma(x)=y.$$

又因 σ 是单射,所以这样的 x 是由 y 唯一确定的. 我们定义:

$$\phi: y\longmapsto x, \text{如果 } \sigma(x)=y,$$

则 ϕ 是 B 到 A 的一个映射.

对任意的 $x\in A$,由 $\sigma(x)=y$,则有

$$\phi\sigma(x)=\phi(\sigma(x))=\phi(y)=x.$$

而 $I_A(x)=x$,所以 $\phi\sigma=I_A$.

对任意的 $y\in B$,由 $\phi(y)=x$,则有

$$\sigma\phi(y)=\sigma(\phi(y))=\sigma(x)=y.$$

而 $I_B(y)=y$,所以 $\sigma\phi=I_B$.

由定义 1.1.3 知,σ 是可逆的.

再证必要性. 设 σ 是可逆的,ϕ 是 σ 的逆映射. 任取 $y\in B$,设 $\phi(y)=x$,于是

$$\sigma(x)=\sigma(\phi(y))=\sigma\phi(y)=I_B(y)=y,$$

即 σ 是满射;下证 σ 是单射,设 $x_1,x_2\in A$,且

$$\sigma(x_1)=\sigma(x_2),$$

则有

$$\begin{aligned}x_1&=I_A(x_1)=\phi\sigma(x_1)=\phi(\sigma(x_1))=\phi(\sigma(x_2))\\&=\phi\sigma(x_2)=I_A(x_2)=x_2,\end{aligned}$$

即 σ 是单射,从而 σ 是单满射. 最后,设 σ 是可逆的,ϕ 和 τ 都是 σ 的逆映射,即都适合等式

$$\phi\sigma=\tau\sigma=I_A,\sigma\phi=\sigma\tau=I_B.$$

于是

$$\phi=\phi I_B=\phi(\sigma\tau)=(\phi\sigma)\tau=I_A\tau=\tau.$$

所以 σ 的逆映射由 σ 唯一确定. 定理证毕.

设 σ 是集合 A 到 B 的可逆映射,通常把它的逆映射记为 σ^{-1},于是有

$$\sigma^{-1}\sigma=I_A,\sigma\sigma^{-1}=I_B,$$

并且 σ 和 σ^{-1} 互为逆映射,即

$$(\sigma^{-1})^{-1}=\sigma.$$

例 1.1.5 设 A 是一切非负实数作成的集合,$B=\{x\in\mathbf{R}:0\leqslant x<1\}$.

$$\sigma:A\rightarrow B,$$

$$\sigma:x\longmapsto\frac{x}{x+1}.$$

易知,σ 是 A 到 B 的一个映射,下证 σ 是单满射. 对于任意 $y\in B$,令

$$x=\frac{y}{1-y},(1-y\neq0)$$

则 $x\geqslant0$,即 $x\in A$,从而有

$$\sigma(x)=\frac{x}{1+x}=y.$$

所以 σ 是满射.

又设 $x_1,x_2\in A,\sigma(x_1)=\sigma(x_2)$,那么

$$\frac{x_1}{1+x_1}=\frac{x_2}{1+x_2}.$$

由此可得 $x_1=x_2$,所以 σ 是单射. 由上述定理,σ 是可逆的,且容易验证

$$\sigma^{-1}:B\rightarrow A,$$

$$\sigma^{-1}: y \longmapsto \frac{y}{1-y}.$$

习 题

1. 设 $A \subseteq B$，求证：$A \cap B = A, A \cup B = B$.

2. 求证：$A \cap (A \cup B) = A$.

3. 求证：$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

4. 求证：$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

5. 试找一个实数集 $\mathbf{R}$ 到正实数集 $\mathbf{R}^+$ 的单满射.

6. 设 σ 定义如下：

$$\sigma(x) = \begin{cases} x, & \text{如果 } x < 0, \\ 1, & \text{如果 } 0 \leqslant x < 1, \\ 2x-1, & \text{如果 } x \geqslant 1. \end{cases}$$

σ 是否是实数集 $\mathbf{R}$ 到自身的映射？是否单射？是否满射？

7. 试求 $M = \{a, b, c\}$ 到自身的映射的个数，并写出其中所有的单满射.

8. 设 $\mathbf{R}^+$ 是正实数集，令

$$\sigma: x \longmapsto x, x \in \mathbf{R}^+;$$

$$\tau: x \longmapsto \frac{1}{x}, x \in \mathbf{R}^+.$$

试问：

(1) τ 是否是 σ 的逆映射？

(2) τ 是否是 $\mathbf{R}^+$ 到自身的单满射？

(3) 如果 τ 可逆，求出 τ^{-1}.

9. 举例说明：对于一个集合 A 到自身的两个映射 σ 和 τ 来说，$\sigma\tau$ 与 $\tau\sigma$ 一般不相等.

10. 设 $\sigma: A \to B, \tau: B \to C$，令 $\phi = \tau\sigma$，求证：

(1)如果 ϕ 是单射，则 σ 也是单射；

(2)如果 ϕ 是满射，则 τ 也是满射；

(3)如果 σ,τ 都是单满射，则 ϕ 也是单满射，并且

$$\phi^{-1}=(\tau\sigma)^{-1}=\sigma^{-1}\tau^{-1}.$$

1.2　数　域

数是我们大家都非常熟悉的一个对象，数与数之间的四则运算(即加、减、乘、除)也是我们经常都要面对的，设 F 是由某些数所作成的一个集合，F 中的任意两个数经过加、减、乘、除中的某种运算之后(进行除法运算时自然要求其除数不能为 0)，其所得到的数(即结果)是否还在 F 中呢？一般来说，答案是不一定. 但是，对于某些特定的 F，其答案是肯定的. 例如：由全体有理数所作成的集合；由全体复数所作成的集合；等等. 对于这样的集合，我们给出如下的定义：

定义 1.2.1　设 F 是由一些数所作成的一个集合，且 F 中含有非零数. 如果 F 中的任意两个数 a,b(a,b 可以相同)经过加、减、乘、除四则运算中的任何一种运算之后(作除时，要求除数不为零)，其所得结果仍然在 F 中，即 $a\pm b\in F$，$ab\in F$，当 $b\neq 0$ 时，$a/b\in F$，则称 F 是一个**数域**. 此时，我们也说 F 关于加、减、乘、除是闭合的.

根据定义，我们可以很容易地知道：全体有理数，全体实数，全体复数都分别作成数域. 对这些数域，我们分别将其称之为有理数域、实数域以及复数域，并用符号 Q,R,C 来表示之. 这些显然是我们常见的数域. 下面我们再给出一个数域的例子，并且，从下面这

个例子中可以很容易地得出：数域是无穷多的！

例 1.2.1 令 $F=\{a+b\sqrt{2}: a,b\in Q\}$，则 F 是一个数域.

事实上，显然 F 含有非零数. 令 $a_1+b_1\sqrt{2}, a_2+b_2\sqrt{2}$ 为 F 的任意两个数，则

$$(a_1+b_1\sqrt{2})\pm(a_2+b_2\sqrt{2})=(a_1\pm a_2)+(b_1\pm b_2)\sqrt{2}\in F;$$

$$(a_1+b_1\sqrt{2})(a_2+b_2\sqrt{2})=(a_1a_2+2b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\sqrt{2}\in F;$$

设 $a_2+b_2\sqrt{2}\neq 0$，则 $a_2-b_2\sqrt{2}\neq 0$. 否则，若 $a_2-b_2\sqrt{2}=0$，则当 $b_2\neq 0$ 时，$\sqrt{2}=a_2/b_2$，矛盾于 $\sqrt{2}$ 是无理数；当 $b_2=0$ 时推出 $a_2=0$，这样 $a_2+b_2\sqrt{2}=0$ 也引出矛盾. 因此，$a_2+b_2\sqrt{2}\neq 0$ 时，

$$(a_2+b_2\sqrt{2})(a_2-b_2\sqrt{2})=a_2^{\,2}-2b_2^{\,2}\neq 0,$$

$$\frac{a_1+b_1\sqrt{2}}{a_2+b_2\sqrt{2}}=\frac{(a_1+b_1\sqrt{2})(a_2-b_2\sqrt{2})}{(a_2+b_2\sqrt{2})(a_2-b_2\sqrt{2})}$$

$$=\frac{a_1a_2-2b_1b_2}{a_1^{\,2}-2b_2^{\,2}}+\frac{(a_2b_1-a_1b_2)}{a_2^{\,2}-2b_2^{\,2}}\sqrt{2}\in F.$$

由上知 F 为一个数域.

在判别一个数集是否作成一个数域时，除采用例 1.2.1 中所用的方法来进行逐一验证外，我们一般还依据下面的定理来简化验证的过程.

定理 1.2.1 设 F 是由一些数所作成的一个集合，且 F 中含有非零数. 如果

（ⅰ）$a,b\in F\Rightarrow a-b\in F$,

（ⅱ）$a,b\in F, b\neq 0\Rightarrow a/b\in F$,

则 F 为一个数域.

证 F 有不为零的数 c，由（ⅰ），$0=c-c\in F$；由（ⅱ），$1=c/c\in F$. 于是，对任意的 $b\in F$ 有 $-b=0-b\in F$. 所以，对任意的 $a,b\in F$，$a+b=a-(-b)\in F$，即加法闭合. 对任意的 $b\neq 0$，有 $1/b\in F$.