考研系列教材

考研数学提高指导 下册

段文喜 ★编著

KAOYAN SHUXUE TIGAO ZHIDAO

暨南大学出版社
JINAN UNIVERSITY PRESS

考研系列教材

考研数学提高指导 下册

段文喜 ★编著

KAOYAN SHUXUE
TIGAO ZHIDAO

暨南大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学·提高指导(下册)/段文喜编著.—广州:暨南大学出版社,2011.3
(考研系列教材)
ISBN 978-7-81135-706-6

Ⅰ.①考… Ⅱ.①段… Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料
Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 238946 号

出版发行:暨南大学出版社

地　址:中国广州暨南大学
电　话:总编室(8620)85221601
　　　　营销部(8620)85225284　85228291　85228292(邮购)
传　真:(8620)85221583(办公室)　85223774(营销部)
邮　编:510630
网　址:http://www.jnupress.com　http://press.jnu.edu.cn

排　版:广州市天河星辰文化发展部照排中心
印　刷:湛江日报社印刷厂

开　本:787mm×1092mm　1/16
印　张:46.625
字　数:710 千
版　次:2011 年 3 月第 1 版
印　次:2011 年 3 月第 1 次
印　数:1—2000 册

上下册总定价:88.00 元

(暨大版图书如有印装质量问题,请与出版社总编室联系调换)

前　言

为了帮助考研的同学打好基础，全面掌握考研数学内容，编者根据最新考研数学考试大纲，结合多年来为北京师范大学珠海分校考研学生辅导的经验，编写了《考研数学・基础指导》与《考研数学・提高指导》两册书，供经济管理类与工科类考研学生学习. 书中对数一、二要求的内容做了标记，学生可根据自己的专业选学.

本套书的编写体现了既不脱离学生的实际水平，也不背离考研数学考试大纲的要求，突出了由浅入深、循序渐进的特点，适合考研学生自学使用，特别适合数学基础不扎实的学生学习.

《考研数学・基础指导》全面介绍了硕士研究生入学考试所涉及的数一、二、三中的基本定义、基本定理、基本公式、基本方法，选配的例题与习题以考题为主.《考研数学・提高指导》主要归纳考题的类型及特点，介绍解题思路和解题方法，选配的例题与习题以综合题、贯穿题为主.

为了让学生在最短的时间里取得最佳的学习效果，编者深入研究了历年来考研数学题型，在编写中主要以1986年以来的研究生入学考试真题为素材，没有将超出考试大纲及学生应试能力的内容编写进来.

由于本套书的内容没有脱离国家教育教学指导委员会制定的高等学校数学课程教学大纲，因此，《考研数学・基础指导》亦可以作为普通高等学校分类型、分层次教学的教材使用.

在本套书的编写中，得到了北京师范大学珠海分校的大力支持，在此表示衷心的感谢.

由于编者水平有限，加之时间仓促，书中错误在所难免，敬请专家与读者指正.

编　者

2010年10月25日

目 录

第二部分　线性代数

第三部分　概率论与数理统计

第一部分　高等数学

第一章 函 数

第一节 函数的性质

一、用四则运算判断函数的奇偶性

例 1 函数$f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}(x\in(-\infty,+\infty))$是 ( )

A. 有界函数 B. 单调函数 C. 周期函数 D. 偶函数

解：函数$|x\sin x|$是偶函数，函数$e^{\cos x}$也是偶函数，所以函数$f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}$是偶函数. 故答案选 D.

说明：函数$f(x)+f(-x)$为偶函数，函数$f(x)-f(-x)$为奇函数.

二、复合函数的奇偶性

如果复合函数有两层复合，第一层是函数f，第二层是函数g(中间变量)，则当函数g是偶函数时，不管f是什么样的函数，函数$f[g(x)]$一定是偶函数；当函数g是奇函数，而函数f是偶函数时，函数$f[g(x)]$是偶函数；当函数g是奇函数，而函数f是奇函数时，函数$f[g(x)]$是奇函数；当函数g是奇函数，而函数f是非奇非偶函数时，函数$f[g(x)]$也是非奇非偶函数.

例 2 设函数$f(x)$是偶函数，函数$g(x)$是奇函数，函数$h(x)$是非奇非偶函数，则下列复合函数是奇函数的是 ( )

A. $f[g(x)]$ B. $g[g(x)]$ C. $h[g(x)]$ D. $f[h(x)]$

答案：B

例 3 下列函数是奇函数的是 ( )

A. $\sin xe^{\cos x}$ B. $f(x)+f(-x)$ C. $x\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$ D. $x\tan xe^{\sin x}$

答案：A

三、奇偶函数的导函数的奇偶性

如果函数$f(x)$是偶(奇)函数，则函数$f'(x)$为奇(偶)函数，可导的偶函数$f(x)$必有$f'(0)=0$.

例 4 如果$f(-x)=f(x)(x\in(-\infty,+\infty))$，在区间$(-\infty,0)$内，函数$f'(x)>0$且$f''(x)<0$，则在区间$(0,+\infty)$内有 ( )

A. $f'(x)>0$且$f''(x)<0$ B. $f'(x)>0$且$f''(x)>0$

C. $f'(x)<0$且$f''(x)>0$ D. $f'(x)<0$且$f''(x)<0$

解：由题意，得函数 $f(x)$ 是偶函数，函数 $f'(x)$ 是奇函数．在区间 $(-\infty, 0)$ 内，$f'(x)>0$ 且 $f''(x)<0$，表明函数 $f'(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 内大于零且单调下降．因此函数 $f'(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内小于零且单调下降．所以选 D.

本题也可以由函数的单调性及凸凹性，知函数 $f(x)$ 是在区间 $(-\infty, 0)$ 内单调递增且向上凹的偶函数．所以函数 $f(x)$ 是在区间 $(0, +\infty)$ 内单调递减且向下凹的偶函数．因此选 D.

四、周期函数的导函数的周期性

周期函数的导函数是具有相同周期的周期函数.

例 5 设函数 $f(x)$ 有二阶导数，并且 $f(x)=-f(-x)$，$f(x)=f(x+1)$，如果 $f'(1)>0$，则 ( )

A. $f''(-2)\leqslant f'(-2)\leqslant f(-2)$　　B. $f(-2)=f''(-2)<f'(-2)$

C. $f'(-2)\leqslant f(-2)\leqslant f''(-2)$　　D. $f(-2)<f'(-2)=f''(-2)$

解：由 $f(x)=f(x+1)$，得函数 $f(x)$ 是周期为 1 的周期函数.

又可导周期函数的导函数是具有相同周期的周期函数，

所以函数 $f'(x)$ 与 $f''(x)$ 都是周期为 1 的周期函数.

又函数 $f(x)$ 是奇函数，所以 $0=f(0)=f(-1)=f(-2)$，

$f'(1)=f'(0)=f'(-1)=f'(-2)>0$，$f''(0)=f''(-1)=f''(-2)$.

因为函数 $f'(x)$ 为偶函数，函数 $f''(x)$ 为奇函数，则 $f''(0)=0$．所以 $f''(-2)=0$.

因此答案选 B.

有些题型给出了周期为 T 的周期函数在 $x=a$ 点的导数，但求的是在另一点 $(a+kT, f(a+kT))$ 的切线方程，这实际上相当于求在点 $(a, f(a))$ 的切线方程，因周期函数的导函数是具有相同周期的周期函数.

第二节　变上限的定积分的奇偶性

对于变上限的定积分 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$，当函数 $f(x)$ 是偶(奇)函数时，函数 $F(x)$ 是奇(偶)函数；函数 $f(x)$ 的原函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt+C$ 比函数 $f(x)$ 的变上限的定积分 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ 多了一个常数 C，而 C 是偶函数，因此原函数的奇偶性的判断法与变上限的定积分的奇偶性的判断方法不同.

例 1 设函数 $f(x)$ 连续，则下列函数是偶函数的是 ( )

A. $\int_0^x t[f(t)+f(-t)]\,dt$　　B. $\int_0^x t[f(t)-f(-t)]\,dt$

C. $\int_0^x f(t^2)\,dt$　　D. $\int_0^x f^2(t)\,dt$

解：因函数 $f(t)+f(-t)$ 是偶函数，函数 $t[f(t)+f(-t)]$ 是奇函数，因此 $\int_0^x t[f(t)+f(-t)]\,dt$ 是偶函数，选 A.

例 2　设函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数，"$M \Leftrightarrow N$" 表示 "M 的充分必要条件是 N"，则必有　　（　　）

A. 函数 $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 是奇函数

B. 函数 $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 是偶函数

C. 函数 $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 是周期函数

D. 函数 $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 是单调函数.

解：由题意知 $F(x)=\int f(x)\,dx=\int_0^x f(t)\,dt+C$，于是函数 $f(x)$ 是奇函数 $\Rightarrow$ 函数 $\int_0^x f(t)\,dt$ 是偶函数 $\Rightarrow$ 函数 $f(x)$ 的全体原函数是偶函数，即函数 $F(x)$ 是偶函数；函数 $F(x)$ 是偶函数 $\Rightarrow$ 函数 $F'(x)=f(x)$ 为奇函数. 所以选 A.

关于 C 项，由函数 $f(x)$ 是周期函数推不出函数 $F(x)$ 是周期函数.

☞**思考题**

1. 函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt+C$ 与 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ 的本质有什么不同？判断它们的奇偶性的方法一样吗？

2. 可导周期函数的导数也是具有相同周期的周期函数，那么可导周期函数的原函数是否为周期函数？

3. 偶函数在点 $x=0$ 可导，则该点的导数等于什么？

习　题

1. 求函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & -\dfrac{\pi}{2}\leqslant x<\dfrac{\pi}{2},\\ x^2, & 1\leqslant x<2,\\ 2^x, & x\geqslant 2\end{cases}$ 的反函数.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<1,\\ x, & x\geqslant 1,\end{cases}$ $\varphi(x)=\begin{cases}x+2, & x<0,\\ x^2-1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f[\varphi(x)]$.

3. 判断函数 $f(x)=\dfrac{\cos x}{1+|x|^2}\left(\dfrac{1}{2^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)$ 的奇偶性.

4. 下列复合函数是奇函数的是　　（　　）

A. $\sqrt{1+\sin^2 x}$　　B. $\ln(\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x})$　　C. $e^{\tan x}$　　D. $\cos 2^x$

5. 设函数$f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$上连续，$F(x)=\int_0^x(x-2t)f(t)\mathrm{d}t$，求证：如果函数$f(x)$为偶函数，则函数$F(x)$也为偶函数.

6. 如果$f(-x)=-f(x)\ (x\in(-\infty,+\infty))$，在区间$(0,+\infty)$内，$f'(x)>0$且$f''(x)>0$，则在区间$(-\infty,0)$内有 ( )

A. $f'(x)<0$且$f''(x)<0$　　B. $f'(x)<0$且$f''(x)>0$

C. $f'(x)>0$且$f''(x)<0$　　D. $f'(x)>0$且$f''(x)>0$

第二章　极限与连续

第一节　无穷小量

一、判断无穷小量的阶

要比较两个无穷小量 α，β 的阶，方法是求 α 比 β 的极限，然后按照无穷小量比较的定义下结论，特别地，如果 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\alpha}{x^k}=A\neq0\ (k>0)$，则 α 是关于 x 的 k 阶无穷小量.

例 1　(1997－3)设函数 $f(x)=\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\,dt$，$g(x)=\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}$，则当 $x\to0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的　　(　　)

A. 低阶无穷小量　B. 高阶无穷小量　C. 等价无穷小量　D. 同阶无穷小量

解：
$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\,dt}{\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(1-\cos x)^2\sin x}{x^4+x^5}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin(1-\cos x)^2}{x^3+x^4}\cdot\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(1-\cos x)^2}{x^3+x^4}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)^2}{x^3+x^4}=\lim_{x\to0}\frac{4\sin^4\frac{x}{2}}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{4\left(\frac{x}{2}\right)^4}{x^3}=0,$$
因此选 B.

例 2　(2007－1)当 $x\to0$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是　　(　　)

A. $1-e^{\sqrt{x}}$　B. $\ln\frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$　C. $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　D. $1-\cos\sqrt{x}$

答案：B

例 3　(1997－2)当 $x\to0$ 时，$e^{\tan x}-e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小量，则 n 为　　(　　)

A. 1　B. 2　C. 3　D. 4

解：
$$\lim_{x\to0}\frac{e^{\tan x}-e^x}{x^n}=\lim_{x\to0}\frac{e^x(e^{\tan x-x}-1)}{x^n}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^n}=\lim_{x\to0}\frac{\sec^2x-1}{nx^{n-1}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2x}{nx^{n-1}\cos^2x}=2\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{nx^{n-1}},$$
因此当 $n-1=2$，即 $n=3$ 时，$\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{nx^{n-1}}=\frac{1}{n}=\frac{1}{3}\neq0$，所以选 C.

例4 （2005－2）当$x \to 0$时，$\alpha(x)=kx^2$与$\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$是等价无穷小量，则$k=$________.

解：
$$\lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}}{kx^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x\arcsin x-\cos x}{kx^2\left(\sqrt{1+x\arcsin x}+\sqrt{\cos x}\right)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x\arcsin x-\cos x}{2kx^2}=\frac{1}{2k}\left(\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}\right)$$
$$=\frac{1}{2k}\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{3}{4k}=1,$$

所以$k=\frac{3}{4}$.

二、利用无穷小量的商确定常数

两个函数比值的极限是定数$A\neq 0$，则当分子和分母中有一个是无穷小量(大量)时，另一个也是无穷小量(大量)，特别，当分母是无穷小量且$A=0$时，分子是分母的高阶无穷小量.

例5 （2004－3）已知$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x(\cos x-b)}{e^x-a}=5$，则$a=$________ $b=$________.

解： 由于$\lim\limits_{x\to 0}\sin x(\cos x-b)=0$，所以$\lim\limits_{x\to 0}(e^x-a)=1-a=0$，即$a=1$.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\cos x-b)}{e^x-a}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\cos x-b)}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\cos x-b)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}(\cos x-b)=1-b=5,$$

所以$b=-4$.

例6 已知$\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=c$，确定$a$，$b$、$c$.

解： 因$\lim\limits_{x\to 0}(ax-\sin x)=0$，即分子$ax-\sin x$是无穷小量，

所以$\lim\limits_{x\to 0}\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}dt=0$，即$b=0$. 由洛必达法则，得
$$\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x(a-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{x^2}.$$

从而$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{x^2}=c$. 则$\lim\limits_{x\to 0}(a-\cos x)=a-1=0$，即$a=1$.

由$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$，得$c=\frac{1}{2}$.

例7 设函数$f(x)$有连续的二阶导数且$\lim\limits_{x\to 0}\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^3$，求$f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$及$\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

解：将 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^3$ 取自然对数并求极限，得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]=3$，

$\lim\limits_{x\to 0}\ln\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]=1$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0.$

由函数 $f(x)$ 有连续的二阶导数，知函数 $f(x)$ 是连续的函数.

因此 $f(0)=0$. 进而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=f'(0)=0.$

由无穷小量的等价代换，得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\dfrac{f(x)}{x}}{x}=3.$

因此 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=2$，$f''(0)=2\times 2=4.$

从而 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{x}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{x^2}}=e^2.$

如果题目有无穷小量的提示，就首先考虑极限；如果有连续的提示，就首先考虑函数值与极限值的相等；如果有改变量比值的提示，就首先考虑导数.

例8 已知函数 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数，它在点 $x=0$ 的某个邻域内满足 $f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$ 是 $x\to 0$ 时比 x 高阶的无穷小量且函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 可导，求曲线 $f(x)$ 在点 $(6, f(6))$ 处的切线方程.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x+\alpha(x)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x}{\sin x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{x}\cdot\dfrac{x}{\sin x}=8$，

即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}=8$，由于 $x\to 0$ 时，分母 $\sin x\to 0$，

所以 $\lim\limits_{x\to 0}[f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)]=0.$

由函数 $f(x)$ 的连续性，得 $f(1)-3f(1)=0$，即 $f(1)=0.$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-f(1)-3f(1-\sin x)+3f(1)}{\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-f(1)}{\sin x}+\frac{3f(1-\sin x)-3f(1)}{\sin x}$$

$$=f'(1)+3f'(1)=4f'(1),$$

则 $4f'(1)=8$，$f'(1)=2.$

由于函数 $f(x)$ 是周期为 5 的周期函数，所以 $f(6)=0$，$f'(6)=2$，所求的切线方程为 $y=2(x-6)$.

三、无穷小量运算性质的运用

$o(x^k)\pm o(x^k)=o(x^k)$，$Co(x^k)=o(x^k)$，$xo(x^k)=o(x^{k+1})$，

$o(x^k)\pm o(x^{k+1})=o(x^k)$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}o(1)=0$，$\lim\limits_{n\to 0}no\left(\dfrac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to 0}o(1)=0.$