21世纪高等学校规划教材

主编 杨树生 张晓军

线性代数

Xianxing Daishu

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases}$$

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

21世纪高等学校规划教材

线性代数

主　编　杨树生　张晓军

北京邮电大学出版社
·北京·

内 容 简 介

本书共4章，内容包括行列式、矩阵、线性方程组、相似矩阵与二次型等. 将矩阵的初等变换作为统领本书内容的重要工具，使课程更具系统性、科学性与实用性. 注重抽象概念的背景与应用背景的介绍，以便使学习者更好地理解线性代数理论并会用线性代数的思维与方法解决问题. 每节配有适量的习题，每章配有自测题，书末配有模拟试题及参考答案，以便学习者进行自我评价.

本书内容深入浅出，叙述详尽，例题较多，较为实用，既便于讲授又便于学习. 可作为高等专科院校的教材，也可作为相关专业教师及工程技术人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/杨树生，张晓军主编. -- 北京：北京邮电大学出版社，2010.3

ISBN 978-7-5635-2267-5

Ⅰ.①线… Ⅱ.①杨… ②张… Ⅲ.①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第020877号

书　　名　线性代数

主　　编　杨树生　张晓军

责任编辑　沙一飞

出版发行　北京邮电大学出版社

社　　址　北京市海淀区西土城路10号(100876)

电话传真　010-62282185(发行部)　010-62283578(传真)

电子信箱　ctrd@buptpress.com

经　　销　各地新华书店

印　　刷　北京忠信诚胶印厂

开　　本　787 mm×960 mm　1/16

印　　张　14

字　　数　289千字

版　　次　2010年3月第1版　2010年3月第1次印刷

ISBN 978-7-5635-2267-5　　定价：28.00元

前　言

“学习数学的最终目的就是使学习者学会用数学的思维与方法解决问题”.数学的思维是抽象的,但是我们不能用抽象的思维代替解决具体问题的能力,只有当学习者将数学的思维转化成发现问题、分析问题、解决问题的能力时,数学科学的真谛才真正得到了体现.

优秀的数学教育,是一种人的理性的思维品格和思辨能力的教育,是聪明智慧的启迪,是潜在的能动性与创造力的开发,其功能与价值是任何专业技术教育都无法替代的.

线性代数作为数学的一个重要分支,有着悠久的发展历史和极其丰富的内容,理论性强,概念抽象,具有独特的思维方式.它是工科高等院校的一门重要的数学基础课程,是非数学专业的学生学习后继课程的基础和工具.线性代数在数学学科与其他科学技术领域,如数值分析、优化理论、微分方程、概率统计、运筹学、控制论、系统工程等学科中都有广泛的应用.线性问题已经广泛存在于经济、金融、信息、社会科学等领域.而在实际中许多非线性问题,在一定的条件下又可以转化为线性问题.因此,线性代数的理论和方法已成为从事科学研究与技术工作必不可少的数学知识.特别是随着计算机技术的迅猛发展,许多科学技术问题可以通过离散化的数值计算得到定量分析,从而使得以处理离散变量为主的线性代数课程在大学教育中占有越来越重要的地位.

作者在2007年3月主持国家社会科学基金“十一五”规划(教育学科)国家级一般课题《信息技术环境下,多元教与学方式有效融入日常教学的研究》的子课题《数学教育专业整体优化教学改革实验研究》,对《线性代数》等课程进行了整体优化改革实验研究.首先,在信息技术环境下,以现代教育理念为指导,制定了《线性代数课程标准》(科研成果).课程标准优于教学大纲的显著特点是:课程的目标不只是知识与能力目标,而是提出了知识与技能、过程与方法、情感态度与价值观三位一体的课程目标,将素质提高与技能培养渗透在课程学习过程中.其次,突破学科中心,精选学习者终身发展的必备基础知识和基本技能;改革教师的教学方式、方法与教学模式;改革学习者的课堂学习与自主学习方式,强调学习的过程与方法;采用多元化评价方式;统一目标要求,提供多种可选择的教与学设计模式.

本书是作者根据二十多年讲授《线性代数》的讲义不断进行充实、修改,按照《线性代数课程标准》与《中国教育技术标准》的要求,并广泛征求教师、学生和有关专家意见与建议的基础上编写完成的,也可以说是作者二十多年从事代数教学工作的总结.考虑到教与学的实际情况,本书力求把重点放到对一些基本对象的分析上,使学习者通过学习本课程能够获得发现、分析、判断、解决问题等能力,具有面对问题能进行思考、体会、联想、感悟等情感,不断提高综合素质.

本书在编写过程中做了以下几方面的努力：

1. 本书给出了课程的知识、能力结构导图，使学习者对本课程的学习内容与学习目标有一个基本的了解(见附录Ⅰ)；为学习者提供了学习方式方法和学习方法与技巧的建议(见附录Ⅱ). 学习者在学习正文之前，可先通过参见附录Ⅰ、附录Ⅱ对整体思路有所熟知.

2. 在保证用严谨的数学语言叙述的前提下，尽量多地用文字语言进行表述，便于学习者自学、预习以及更好地理解抽象的内容.

3. 引例与应用题较多. 由引例引出抽象的数学概念；通过应用题，体现从"具体(实际)→抽象(理论)→具体(指导实践)"的过程，同时体现数学的应用价值.

4. 将"矩阵的初等变换"作为统领本书内容的重要工具，使课程更具系统性与科学性.

5. 重视分块矩阵的运用技巧.

6. 科学配备习题、重视训练. 任何学习形式都代替不了学习者自己的思考与领悟. 只有通过训练，使学习者手脑并用，才能启迪心智，发展思维，使认识不断深入. 所以本书按照"循序渐进"的原则为每一节配备了习题，为每一章配备了自测题，最后还给出了模拟试题，并给出大部分题目的参考答案，以便学习者进行自我评价.

7. 在每章的最后，给出了本章的学习指导(《线性代数课程标准》的部分内容). 内容包括：本章概括说明、关键词、基本内容与说明、具体目标(知识与技能目标、能力目标(过程与方法)、情感态度目标)、基本方法、重点、难点及其解决办法.

"学习指导"对学习者的重要作用在于：如果在学习内容之前阅读"学习指导"，可以使学习者对本章学习内容的要求有一个全面的了解；使学习者的学习目标更加明确；使学习者根据学习内容选择不同的学习方法、减轻学习者的学习负担、提高学习效率. 如果学习者在学习内容之后阅读"学习指导"，可以帮助学习者重新审视本章学习内容的要求，深刻领会与理解本章的内容，还可以对学习者学习效果做一个自我评价.

"学习指导"对授课教师具有的重要指导作用在于："学习指导"不仅明确了具体内容的教学目标，而且指出了重点和难点及突破难点的方法，特别指明了各知识点蕴含的数学思想与方法，对各部分内容进行了重要的阐释，是教师备课重要的指导性资料. "学习指导"对具体知识点培养学生具体能力都有说明，能帮助教师提高对学生能力培养的意识.

在编写过程中力求做到深入浅出、简明易懂，深度与广度适中. 在教材内容的处理方法上，注重理论联系实际，加强概念与理论的背景和应用介绍. 因而，本书既便于教又便于学，可作为工科高等院校的教材，也可作为有关专业的教师及工程技术人员的参考书.

本书第 1 章、第 2 章由张晓军编写，并配备了习题及参考答案；第 3 章、第 4 章由杨树生编写；全书由杨树生统稿.

由于水平所限，书中难免有疏漏和不妥之处，敬请批评指正，以便不断改进.

编　者

目　录

第 1 章 行列式

行列式实质上是由一些数排列成的数表按一定法则计算得到的一个数，即是一种特定的算式．在 1683 年与 1693 年，日本数学家关孝和（Seki Kowa，1642—1708）与德国数学家莱布尼茨（Leibniz，1646－1716）就分别独立地提出了行列式的概念．在以后很长一段时间内，行列式主要应用于对线性方程组的研究．大约一个半世纪以后，行列式逐步发展成为线性代数的一个独立分支．1750 年，瑞士数学家克拉默（Cramer，1704—1752）在他的论文中提出了利用行列式求解线性方程组的著名法则——克拉默法则．随后，法国数学家柯西（Cauchy，1789—1857）发现了行列式在解析几何中的应用．这一发现激起了人们对行列式应用进行探索的浓厚兴趣，前后持续了近 100 年．

在柯西所处的时代，人们讨论的行列式的阶数通常很小，行列式在解析几何以及数学的其他分支中都扮演者很重要的角色．如今，由于计算机和计算软件的发展，在常见的高阶行列式计算中，行列式的数值意义已经不大．但是，行列式依然可以给出构成行列式的数表——矩阵的重要信息．而在线性代数的某些应用中，行列式的知识依然发挥着作用．特别是在本课程中，它是研究线性方程组、矩阵及向量的线性相关性的一种重要工具．

1.1 二阶和三阶行列式

二阶行列式与三阶行列式的内容在中学数学课程中已经涉及，本节通过二元、三元线性方程组的解来定义二阶、三阶行列式，它们是我们学习和讨论更高阶行列式的基础．

1.1.1 二阶行列式

二元线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1.1}$$

其中 a_{ij}（$i=1,2;j=1,2$）是未知量 $x_j(j=1,2)$ 的系数，$b_i(i=1,2)$ 是常数项．

在方程(1.1.1)的第 1 个方程和第 2 个方程的两边分别乘以 a_{22} 和 a_{12}，然后两式相减，消去 x_2 得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2.$$

用同样的方法消去 x_1，得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,可求得方程组(1.1.1)的唯一解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\ x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{1.1.2}$$

从式(1.1.2)中我们看到分子、分母都是两对数的乘积之差,其中分母都是 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$,它是由方程组(1.1.1)的系数确定的.我们规定二阶行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{1.1.3}$$

数 $a_{ij}\,(i=1,2;j=1,2)$ 称为这个行列式的**元素**(横的称为**行**,纵的称为**列**),它的第1个下标 i 称为**行标**,表示该元素位于行列式的第 i 行;它的第2个下标 j 称为**列标**,表示该元素位于行列式的第 j 列.那么式(1.1.3)恰是行列式中**主对角线**(左上角至右下角的对角线)上两个数的乘积与**副对角线**(右上角至左下角的对角线)上两个数的乘积之差.

由二阶行列式的定义,我们可以将式(1.1.2)中的的分子分别写成

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2,\ \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

则可以把线性方程组(1.1.1)的唯一解式(1.1.2)写成

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\ x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{1.1.4}$$

其中 $D\neq 0$.

这个结论是很容易记忆的:x_1,x_2 的分母 D 是由方程组(1.1.1)的系数在方程组的一般形式下保持原来的相对位置不变所构成的二阶行列式(称为**系数行列式**),x_1 的分子 D_1 是方程组(1.1.1)的常数项 b_1,b_2 替换 D 中的系数 a_{11},a_{21} 所得的二阶行列式,x_2 的分子 D_2 是用 b_1,b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12},a_{22} 所得的二阶行列式.

例 1.1.1　解线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2=1, \\ 2x_1+5x_2=4. \end{cases}$$

解　因为线性方程组的系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=15-8=7\neq 0,$$

所以方程组有唯一解.

又因为

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 16 = -11,\ D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 2 = 10,$$

所以方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = -\frac{11}{7},\ x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{10}{7}.$$

1.1.2 三阶行列式

三元线性方程组一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1.1.5}$$

仍然用消元法来解这个方程组. 因为 a_{11}, a_{21}, a_{31} 不能全等于零，所以，不妨设 $a_{11} \neq 0$. 于是原方程组化为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ \left(a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}\right)x_2 + \left(a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{13}\right)x_3 = b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1, \\ \left(a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{12}\right)x_2 + \left(a_{33} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{13}\right)x_3 = b_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}}b_1, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 + (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})x_3 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1, \\ (a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})x_2 + (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})x_3 = a_{11}b_3 - a_{31}b_1. \end{cases}$$

其中第 2、第 3 个方程都是两个未知量 x_2，x_3 的线性方程，因此可以应用有关二元线性方程组的结论，即如果它的系数行列式 $D' \neq 0$，则可求出唯一的 x_2，x_3. 此外

$$\begin{aligned} D' &= \begin{vmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} \\ a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}D, \end{aligned}$$

其中 $D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$. 因此当 $D' \neq 0$ 时，可解得 $x_2 = \dfrac{D'_2}{D'}$，$x_3 = \dfrac{D'_3}{D'}$，其中

$$D'_2 = \begin{vmatrix} a_{11}b_2 - a_{21}b_1 & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} \\ a_{11}b_3 - a_{31}b_1 & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} \end{vmatrix},\ D'_3 = \begin{vmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \\ a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31} & a_{11}b_3 - a_{31}b_1 \end{vmatrix}.$$

由此可得

$$x_2 = \frac{1}{D}(a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{11}a_{23}b_3 - b_1a_{21}a_{33} - a_{13}b_2a_{31}),$$

$$x_3 = \frac{1}{D}(a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - a_{11}b_2a_{32} - a_{21}a_{21}b_3 - b_1a_{22}a_{31}).$$

代入第 1 个方程，可解出

$$x_1 = \frac{1}{D}(b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3).$$

以上得出关于 x_1，x_2，x_3 的表达式. 这是一个看起来很繁杂，然而很有用的公式.

类似地，可定义三阶行列式如下：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

例 1.1.2　计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

解　由三阶行列式的定义，可得

$$\begin{aligned} D &= 2\times3\times5 + 1\times1\times2 + 2\times(-4)\times3 - 2\times1\times3 - 1\times(-4)\times5 - 2\times3\times2 \\ &= 30 + 2 - 24 - 6 + 20 - 12 \\ &= 10. \end{aligned}$$

根据三阶行列式的定义，可以把三元线性方程组的解用三阶行列式来表示.

首先

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

就是由三元线性方程组(1.1.5)的系数组成的行列式. x_1，x_2，x_3 的分子分别用 D_1，D_2，D_3 来表示，则

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

于是得到三元线性方程组解的公式，即如果线性方程组(1.1.5)的系数构成的行列式 $D \neq 0$，那么方程组(1.1.5)有唯一解，且解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

其中 $D_j(j = 1,2,3)$ 是把 D 的第 j 列换成常数项 b_1, b_2, b_3 所得的行列式.

这里，如同二元的情形一样，D 是由三元线性方程组(1.1.5)中三个未知数的系数保持原来的相对位置不变的情况下所构成的三阶行列式，称为三元线性方程组(1.1.5)的**系数行列式**.

例 1.1.3 求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$$

解 方程组的系数行列式

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 2\times 2\times(-2)+(-1)\times(-5)\times 1+1\times 3\times 3-2\times(-5)\times 3-(-1)\times \\ &\quad 3\times(-2)-1\times 2\times 1 \\ &= -8+5+9-(-30)-6-2 \\ &= 28 \neq 0. \end{aligned}$$

因此线性方程组有唯一解.

由于

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0+20+3-0-2-8 = 13,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -4+0+12-(-40)-0-1 = 47,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 16+(-1)+0-6-(-12)-0 = 21,$$

所以得到

$$x_1 = \frac{13}{28}, \quad x_2 = \frac{47}{28}, \quad x_3 = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}.$$

1.1.3 二阶与三阶行列式的关系

从上面的例子看到应用二阶、三阶行列式来解系数行列式不等于零的二元、三元线性方程组是很方便的，而且可直接把解用原方程组的系数及常数项表示出来. 为了将这个结论推广到未知量更多的一般线性方程组，需要把二、三阶行列式的概念推广，引进 n 阶行列式的概念，为此先分析一下二、三阶行列式的关系.

由三阶行列式与二阶行列式的定义有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \tag{1.1.6}$$

由此式可以看出，三阶行列式等于它的第一行每个元素分别乘一个二阶行列式的**代数和**. 同时也看到三阶行列式的计算可以转化为二阶行列式的计算. 那么一个重要的问题是 n 阶行列式的计算能否转化为 $n-1$ 阶或更低阶行列式的计算呢?

为了进一步了解这 3 个二阶行列式与原来的三阶行列式的关系，我们引入余子式和代数余子式的概念.

在三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

中，把元素 $a_{ij}\,(i=1,2,3;j=1,2,3)$ 所在的第 i 行与第 j 列划去，剩下的元素保持原来的相对位置不变构成的二阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}. 记 $A_{ij}=(-)^{i+j}M_{ij}$，称 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

例如，在三阶行列式 D 中，元素 a_{12} 的余子式 M_{12} 是在 D 中划去元素 a_{12} 所在的第 1 行与第 2 列后剩下的元素所构成的二阶行列式

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

而元素 a_{12} 的代数余子式为

$$A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

应用代数余子式的概念，式(1.1.6)可以写成

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},$$

即三阶行列式等于它的第一行每个元素与它的代数余子式的乘积之和. 这个表达式通常称为：**行列式按第一行展开的展开式.**

例 1.1.4　利用二阶与三阶行列式的关系计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix}.$$

解　$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 5\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1\times 16 - 0 + 5\times(-4) = -4.$$

行列式按第一行展开的结果还可以进一步推广为如下**展开定理**：

定理 1.1.1　三阶行列式等于它的任一行或任一列的每个元素与它的代数余子式的乘

积之和,即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}A_{ij} \quad (i = 1,2,3). \tag{1.1.7}$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} = \sum_{i=1}^{3} a_{ij}A_{ij} \quad (j = 1,2,3). \tag{1.1.8}$$

证 现证(1.1.8)式中 $j = 2$ 的情况,其他情况可类似证明.

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= -a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{22}a_{11}a_{33} - a_{22}a_{13}a_{31} - a_{32}a_{11}a_{23} + a_{32}a_{13}a_{21} \\ &= -a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) \\ &= -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}. \end{aligned}$$

称展开式(1.1.8)为按第 j 列展开的展开公式.称展开式(1.1.7)为按第 i 行展开的展开公式.

如果我们定义一阶行列式 $|a_{11}| = a_{11}$,那么三阶行列式的展开定理对于二阶行列式同样适用,例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}|a_{22}| - a_{12}|a_{21}|.$$

例 1.1.5 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix}.$$

解 把 D 按第二行展开,得

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 12 - 12 = -4.$$

例 1.1.6 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

解 由于第 2 列中有两个元素为零,故按第 2 列展开较简便,即

$$D = 4 \times (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 4 \times (-5) = -20.$$

习题 1.1

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{vmatrix}$；　(3) $\begin{vmatrix}0 & x & y\\ -x & 0 & z\\ -y & -z & 0\end{vmatrix}$.

2. 用二阶行列式解二元解线性方程组：

$$\begin{cases}3x_1-2x_2=1,\\ -x_1+2x_2=-1.\end{cases}$$

3. 用三阶行列式的定义计算：

(1) $\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & -2 & 1\\ -3 & 1 & -2\end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix}a & b & c\\ b & c & a\\ c & a & b\end{vmatrix}$.

4. 利用二阶与三阶行列式的关系计算行列式：

(1) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix}$；　(3) $\begin{vmatrix}0 & a & 0\\ b & 0 & c\\ 0 & d & 0\end{vmatrix}$.

5. 当 x 取何值时，$\begin{vmatrix}3 & 1 & x\\ 4 & x & 0\\ 1 & 0 & x\end{vmatrix}\neq 0$？

1.2　n 阶行列式

二阶行列式等于它的第一行每个元素与它的代数余子式乘积之和；三阶行列式等于它的第一行每个元素与它的代数余子式乘积之和.我们可以按照这个思路给出 n 阶行列式的定义.

1.2.1　n 阶行列式的定义

定义 1.2.1　由 n^2 个数 $a_{ij}\,(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的 n 阶行列式记作

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

当 $n=1$ 时，$D=|\,a_{11}\,|=a_{11}$；

当 $n\geqslant 2$ 时，

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j},\tag{1.1.9}$$

其中 A_{1j} 为 D 的元素 a_{1j} 的代数余子式.

例 1.2.1 应用行列式的定义计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}2&1&-2&4\\3&0&1&1\\0&-1&2&3\\2&0&5&1\end{vmatrix}.$$

解

$$\begin{aligned}D=&\,2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0&1&1\\-1&2&3\\0&5&1\end{vmatrix}+1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3&1&1\\0&2&3\\2&5&1\end{vmatrix}+\\&(-2)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3&0&1\\0&-1&3\\2&0&1\end{vmatrix}+4(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}3&0&1\\0&-1&2\\2&0&5\end{vmatrix}\\=&\,2(-5+1)-(6+6-4-45)-2(-3+2)-4(-15+2)\\=&-8+37+2+52=83.\end{aligned}$$

1.2.2 *n* 阶行列式展开定理

与三阶行列式一样，n 阶行列式也有类似的**展开定理**.

定理 1.2.1 n 阶行列式等于它的任一行或任一列的每个元素与它的代数余子式的乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\quad(j=1,2,\cdots,n).$$

一般来说，低阶行列式比高阶行列式的计算要简单，根据上述定理，能够把 n 阶行列式用 $n-1$ 阶行列式来表示，从而将高阶行列式的计算问题转化为低阶行列式的计算.

例 1.2.2 计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}2&1&-2&4\\3&0&1&1\\0&-1&2&3\\2&0&5&1\end{vmatrix}.$$

解 由于第 2 列中有两个元素为零，故按第 2 列展开较简便

$$\begin{aligned}D=&\,1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3&1&1\\0&2&3\\2&5&1\end{vmatrix}+(-1)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2&-2&4\\3&1&1\\2&5&1\end{vmatrix}\\=&\,37+46=83.\end{aligned}$$

例 1.2.3　计算对角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

其中行列式除主对角线上的元素外其余元素均为零.

解　根据 n 阶行列式的定义有

$$D=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & & & \\ & a_{33} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{vmatrix}=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 1.2.4　计算上三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

其中行列式主对角线以下的元素均为零.

解　根据定理 1.2.1,考虑到 D 的第 1 列除元素 a_{11} 外均为零,所以按第 1 列展开得

$$D=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

同样,对上式右端的 $n-1$ 阶行列式按第 1 列展开得到

$$D=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

依此类推可得

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

习题 1.2

1. 写出下面行列式中元素 a_{32} 的余子式及代数余子式

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 8 & 5 & 4 \\ 9 & -3 & 6 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$