最新版

考研数学全面辅导

白 岩
陈殿有 主编

长春出版社

KAOYAN
SHUXIU
QUANMIAN
FUDAO

考研数学全面辅导

《考研数学全面辅导》编委会　编

长　春　出　版　社

(吉)新登字 10 号
图书在版编目(C I P)数据

考研数学全面辅导/白岩主编.—长春:长春出版社,2000.2

ISBN 7-80604-410-8

Ⅰ.考...　Ⅱ.白...　Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 14542 号

责任编辑:吕可路　毕素香　封面设计:翁立涛

长 春 出 版 社 出 版
(长春市建设街 43 号)
(邮编 130061　电话 8569938)
长春科技大学印刷厂印刷
长春出版社经销
787×1092 毫米 16 开本 26.5 印张　655 千字
2000 年 1 月第 1 版　2000 年 1 月第 1 次印刷
印数:1—3 000 册　定价:33.00 元

《考研数学全面辅导》编委会

高等数学

主　　编：白　岩　张国良
副 主 编：周德亮　马瑞杰　潘淑平

线性代数

主　　编：陈殿友　杨金远
副 主 编：韩　燕　戴经隆

概率论与数理统计

主　　编：刘淑琴
副 主 编：郭　华　郑文瑞

前　　言

为帮助众多报考硕士研究生的同学在考前全面系统地复习高等数学、线性代数、概率论与数理统计三门课程，我们按照国家教育部制订的全国硕士研究生入学统一考试《数学考试大纲》要求，并根据近几年统考命题的特点，结合作者历年来在“考研班”辅导的经验及去年使用本教材的情况，编写了此书。全书包括高等数学、线性代数、概率论与数理统计及1998年、1999年和2000年硕士研究生入学考试数学试题四部分。每一章分为：大纲要求及说明、重点基础理论知识、典型例题、考测题及参考答案。相信读者通过阅读了相关典型例题后进行演练，便可达到举一反三、触类旁通的目的。

全书精选典型例题600余个，各章配有多种题型的考测题，并附有答案或提示，供读者个人考测与练习。考测题是作者根据多年统考命题的特点及辅导的经验在参考了历届硕士研究生入学考试和各种辅导教材的基础上编写的。

本书有以下特点：

1. 对“考试大纲”的要求进行了说明，并对其要求的重要概念、定理、性质进行了剖析，进而达到增强读者对这些内容的理解、记忆，避免在答题过程中犯概念性错误。

2. 针对“考研”中常见的题型，在各章的典型例题中进行了有层次地解答，便于读者的理解与掌握。通过对历年考研情况分析，可以说所有题型基本上都含在本书的典型例题之中。

3. 本书介绍了许多新的、快速解题的方法和技巧，这对读者掌握解题方法、提高解题速度及解题的准确性十分有益。

本书不仅可以作为报考硕士研究生入学考试的复习用书，同时也是正在学习高等数学、线性代数、概率论的理工类院校本科生及专科生的一本非常实用的参考书，更是数学教师必备的教学参考书。

我们相信此书在手，同学们对考研数学可以全面突破。这本书是我们全体辅导教师十几年教学心血的结晶。在编写出版过程中，得到了许多同行的热情帮助和支持，在此表示深深地感谢。

本书编写中如有不妥之处，请读者赐教。

编者

于长春地质宫

2000年3月

目　　录

第一篇　高等数学

第一章　函数　极限　连续

一、大纲要求及说明

按考试大纲要求，本章要掌握函数的表示法，了解函数奇偶性、单调性、周期性、有界性，理解复合函数的概念，了解反函数及隐函数，掌握基本初等函数的性质及其图形，会建立简单应用问题中的函数关系式，理解极限的概念，函数左、右极限的概念，以及极限存在与左、右极限之间的关系，掌握极限的性质及四则运算法则，掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法，理解无穷小、无穷大以及无穷小阶的概念，会用等价无穷小求极限，理解函数连续性的概念，会判别函数间断点的类型，了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质（最大值、最小值和介值定理），并会应用这些性质.

关于上述要求做以下几点说明：

1. 函数

(1)表示函数对应法则的记号 $f()$ 有着广泛的涵义，只要是对应法则，就可以用它表示，它可以表示一个或几个数学表达式.

(2)确定函数的两个要素：定义域和对应法则. 两个函数，当其定义域相同，对应法则一样时，两个函数是相等的（或相同的）.

(3)函数是否"有界"或"单调"，与所论的区间是有关系的.

(4)分段函数往往不是初等函数，因为分段函数没有用一个数学式子表示，但不能认为分段函数都不是初等函数，如 $y=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$ 是分段函数，也是初等函数，因为它可以用一个数学式子 $y=\sqrt{x^2}$ 表示.

2. 极限

(1)数列 $x_n=f(n)$ 的极限与函数 $y=f(x)$ 的极限既有区别也有联系，它们的联系是：①当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在时，$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$ 必存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，但当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 不存在时，$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$ 可以存在；②（海涅定理）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A \Longleftrightarrow$ 对于任意数列 $\{x_n\}$，$x_n\neq x_0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

(2) 无穷大与无界函数既有区别也有联系，区别是：① 无穷大指在自变量的某种趋向下，对应的函数值的变化趋势（其绝对值无限增大），而无界函数是指：自变量在某一范围内变化时，对应函数值的变化；② 无穷大定义中的不等式 $|f(x)|>M$，要求适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 或 $|x|>X$ 的一切 x 都要满足，而无界函数定义中的不等式 $|f(x)|>M$，只要求在 $0<|x-x_0|<\delta$ 或 $|x|>X$ 中有一个 x 满足即可. 联系是：如果 $f(x)$ 是无穷大，则 $f(x)$ 必定无界，但反过来，$f(x)$ 无界时，$f(x)$ 不一定是无穷大.

(3)求极限的方法很多,且非常灵活,对未定式求极限,洛必达法则是一个有力的工具,但只有把求极限的各种方法综合运用,尤其是利用等价无穷小代换,才能使计算更简捷.

3.函数的连续性

(1)因为初等函数在其定义区间内总是连续的,所以关于函数的连续性讨论主要指非初等函数,如由极限定义的函数、带绝对值符号的函数、分段函数等,一般讨论函数在一点处的连续性.

(2)研究函数在一点处的连续性,主要依据函数连续的定义或在一点连续的充要条件.

由历年试题归类分析可见,本章常考的典型题型有以下6个方面

(1)求极限或给定极限值确定式中的常数(重点);

(2)利用洛必达法则求七种未定式的极限(每年必考,非常重要);

(3)讨论函数的连续性,判断间断点的类型(重点);

(4)无穷小的比较;

(5)方程在给定区间有无实根(重点);

(6)求分段函数的复合函数.

二、重点基础理论知识

1.几个常用的有界函数

$|\sin x|\leqslant 1, |\cos x|\leqslant 1, |\arctan x|\leqslant \frac{\pi}{2}, |\operatorname{arccot} x|\leqslant \pi, \quad x\in(-\infty,+\infty)$

2.极限

(1)左、右极限与极限的关系

定理1 极限存在$\Longleftrightarrow$左、右极限存在且相等.

常用定理1来证明分段函数在分段点处极限的存在性.

(2)极限存在的两个准则

准则1 (夹逼准则) 如果数列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$、$\{z_n\}$满足

(ⅰ) $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n \quad (n=1,2,\cdots)$

(ⅱ) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=a, \lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$.

则$\{x_n\}$的极限存在,且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

准则1′ 若$\exists\ \delta_0>0, 0<|x-x_0|<\delta_0$时,有$f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$,且$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$,则$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$.

准则2 单调有界数列必有极限.

(3)两个重要极限

①$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

②$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e, \lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e, \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$

(4)无穷小的阶

设α和β是在同一个自变量的变化过程中的无穷小,

①如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$,则称$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷小,记作$\beta=o(\alpha)$.

②如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = C \neq 0$,则称 β 与 α 是同阶无穷小.

③如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = C \neq 0 (k > 0)$,则称 β 是 α 的 k 阶无穷小.

④如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$,则称 β 与 α 是等价无穷小,记作 $\alpha \backsim \beta$.

(5)极限与无穷小的关系

定理 2 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow f(x) = A + \alpha$,其中 $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha = 0$.

(6)当 $x \to 0$ 时,常用的等价无穷小

$\sin x \sim x$, $\tan x \sim x$, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2$, $\ln(1 + x) \sim x$, $e^x - 1 \sim x$, $a^x - 1 \sim x \ln a$, $(1 + x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$, $\arcsin x \sim x$, $\arctan x \sim x$.

(7)有界变量与无穷小乘积仍为无穷小

(8)常用的重要结论

① $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0 \quad (0 < q < 1)$;

② $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad (a > 0)$;

③ $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$;

④ $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0)$;

⑤ $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$;

⑥ $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = \infty$., $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$;

⑦ $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$;

⑧ $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arccot} x = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arccot} x = \pi$.

(9)求极限的常用方法

①利用准则法求极限;

②利用两个重要极限;

③利用初等变形与等价无穷小代换;

④利用洛必达法则;

⑤利用泰勒公式法;

⑥利用定积分的定义;

⑦利用微分中值定理和积分中值定理;

⑧利用有界变量与无穷小的乘积仍是无穷小.

上述求极限常用方法我们将在典型例题中逐一介绍.求极限是最基本的运算,是必考的问题.

3.函数的连续性

(1)**定义 1** 设函数 $f(x)$在点 x_0 的某个邻域内有定义,
如果

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

则称 $f(x)$在点 x_0 处连续.

初等函数在其定义域内都连续.

$f(x)$在点 x_0 处连续 $\Longleftrightarrow f(x)$在点 x_0 处既左连续也右连续.

(2)间断点的分类

定义 2 如果 x_0 为 $f(x)$的间断点,

①$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，则称 x_0 为 $f(x)$的可去间断点(属第一类间断点)，$f(x_0-0)$、$f(x_0+0)$都存在且不相等，则称 x_0 为 $f(x)$的第一类不可去间断点，也称为跳跃间断点.

②$f(x_0-0)$和 $f(x_0+0)$至少有一个不存在，则称 x_0 为 $f(x)$的第二类间断点.

(3)闭区间上连续函数的性质

设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，则

①$f(x)$在$[a,b]$上有界；

②$f(x)$在$[a,b]$上有最大值和最小值；

③(介值定理)如果 C 是介于$f(a)$、$f(b)$ $(f(a)\neq f(b))$之间的任何一个数，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=C$.

(4)(零点定理)如果 $f(a)\cdot f(b)<0$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$.

三、典型例题

已知函数 $f(x)$、$\varphi(x)$的表达式，求 $f[\varphi(x)]$或 $\varphi[f(x)]$的表达式：

例 1 设 $f(x)=\begin{cases}0, x<0\\ x, x\geqslant 0\end{cases}$，$\varphi(x+1)=x^2+x+1$，试求 $f[\varphi(x)]$，$\varphi[f(x)]$.

解 已知 $\varphi(x+1)=x^2+x+1$，设 $t=x+1$，则 $x=t-1$，

因而有 $\varphi(t)=(t-1)^2+(t-1)+1=t^2-t+1$，将等式两边的 t 换成x 得

$$\varphi(x)=x^2-x+1=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$$

由 $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$ 可知 $f[\varphi(x)]=\begin{cases}0, & \varphi(x)<0\\ \varphi(x), & \varphi(x)\geqslant 0\end{cases}$

得

$$f[\varphi(x)]=\varphi(x)=x^2-x+1, \qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\varphi[f(x)]=f^2(x)-f(x)+1=\begin{cases}1, & x<0\\ x^2-x+1, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

例 2 设

$$f(x)=\begin{cases}e^x, x<1\\ x, x\geqslant 1\end{cases} \qquad \varphi(x)=\begin{cases}x+2, x<0\\ x^2-1, x\geqslant 0\end{cases}$$

求 $f[\varphi(x)]$.

解 由函数的定义有

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{\varphi(x)}, \varphi(x)<1\\ \varphi(x), \varphi(x)\geqslant 1\end{cases}$$

当 $\varphi(x)<1$ 时，或者 $x<0$，$\varphi(x)=x+2<1$，其解为 $x<0$，$x<-1$，公共解为$x<-1$；或者 $x\geqslant 0$，$\varphi(x)=x^2-1<1$，其解为 $x\geqslant 0$，$x^2<2$，公共解为 $0\leqslant x<\sqrt{2}$；

当 $\varphi(x)\geqslant 1$ 时，或者 $x<0$，$\varphi(x)=x+2\geqslant 1$，其解为 $x<0$，$x\geqslant -1$，公共解为 $-1\leqslant x<0$；或者 $x\geqslant 0$，$\varphi(x)=x^2-1\geqslant 1$，其解为 $x\geqslant 0$，$x^2\geqslant 2$，公共解为 $x\geqslant\sqrt{2}$.

从而，当 $x<-1$ 时，$\varphi(x)=x+2<1$，当 $-1<x<0$ 时，$\varphi(x)=x+2\geqslant 1$；当 $0\leqslant x<\sqrt{2}$时，$\varphi(x)=x^2-1<1$，当 $x\geqslant\sqrt{2}$时，$\varphi(x)=x^2-1\geqslant 1$. 故

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{x+2}, & x<-1\\ x+2, & -1<x<0\\ e^{x^2-1}, & 0\leqslant x<\sqrt{2}\\ x^2-1, & x\geqslant\sqrt{2}\end{cases}$$

已知 $f(x)$满足某关系式,求 $f(x)$的表达式:

例 3 设 $f(x)$满足 $af(x)+bf(-\frac{1}{x})=\sin x$,其中$|a|\neq|b|$,求 $f(x)$.

解 令 $t=-\frac{1}{x}$,则 $x=-\frac{1}{t}$,于是原式改写成 $bf(t)+af(-\frac{1}{t})=-\sin\frac{1}{t}$ 也就是

$$bf(x)+af(-\frac{1}{x})=-\sin\frac{1}{x}$$

与原式联立解得

$$f(x)=\frac{1}{a^2-b^2}(a\sin x+b\sin\frac{1}{x})$$

例 4 判断函数 $g(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的奇偶性,其中 $f(x)$ 为奇函数.

解 $g(-x)=\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t\xlongequal{令 t=-u}\int_0^x f(-u)(-\mathrm{d}u)=-\int_0^x f(-t)\mathrm{d}t=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=g(x)$

注意到 $f(x)$ 为奇函数,故 $g(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为偶函数.

注 ①$f(x)+f(-x)=0$是判别 $f(x)$ 为奇函数的有效方法.

② 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的,如果定义域关于原点不对称,则该函数既不是奇函数也不是偶函数.

求极限的方法很多,下面介绍几种主要方法求数列和函数的极限.

(1)用准则求极限

例 5 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}})$

解 $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=1,\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$$

故由夹逼准则知,

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}})=1$$

例 6 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\sqrt{1+x}\mathrm{d}x$

解 因为 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$x^n\leqslant x^n\sqrt{1+x}\leqslant\sqrt{2}x^n$,所以

$$\int_0^1 x^n\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 x^n\sqrt{1+x}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\sqrt{2}x^n\mathrm{d}x$$

又

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0,\lim_{n\to\infty}\int_0^1\sqrt{2}x^n\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{n+1}=0$$

故由夹逼准则知

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\sqrt{1+x}\,dx = 0$$

例 7 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(1^n+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$

解 因为$(1^n+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=3\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right]^{\frac{1}{n}}<3\cdot3^{\frac{1}{n}}$，对一切的 n，有

$$3<3\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right]^{\frac{1}{n}}<3\cdot3^{\frac{1}{n}}$$

而$\lim\limits_{n\to\infty}3\cdot3^{\frac{1}{n}}=3$，故由夹逼准则知

$$\lim_{n\to\infty}(1^n+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=3$$

例 8 设 $x_1=\sqrt{2}$，$x_n=\sqrt{2x_{n-1}}$$(n=2,3,\cdots)$，证明数列$\{x_n\}$的极限存在，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解题步骤 1.用数学归纳法或不等式的放缩法判断极限的存在性(①单调性，②有界性)；2.令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$，然后解关于 l 的方程，求出 l，从而求出 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证 由 $x_n=\sqrt{2x_{n-1}}$可知，$x_2=\sqrt{2x_1}=\sqrt{2\sqrt{2}}$，显然 $x_1<x_2$，不妨设 $x_{k-1}<x_k$，于是$\sqrt{2x_{k-1}}<\sqrt{2x_k}$，即 $x_k<x_{k+1}$，$\{x_n\}$是单调增加的.

因为 $x_n^2=2x_{n-1}\Rightarrow x_n=\dfrac{2x_{n-1}}{x_n}<2$，所以$\{x_n\}$有界，故由准则 2 知，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$，

$$l=\sqrt{2l}\Rightarrow l=2,\ l=0(\text{舍去})$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}x_n=2$$

例 9 设 $a>0$，$x_1>0$，$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)$ $(n=1,2,\cdots)$，证明数列$\{x_n\}$收敛，并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证 因为 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)\geqslant\sqrt{x_n\cdot\dfrac{a}{x_n}}=\sqrt{a}$，所以$\{x_n\}$有界，又因为

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{x_n^2}\right)\leqslant\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{(\sqrt{a})^2}\right)=1$$

即 $x_{n+1}\leqslant x_n$，所以$\{x_n\}$单调减少，由准则 2 知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 收敛.

令$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$，则 $l=\dfrac{1}{2}\left(l+\dfrac{a}{l}\right)\Longrightarrow l=\sqrt{a}$

故

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$$

(2)用两个重要极限求极限

例 10 求下列极限：

①$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$ $(x\neq0)$； ②$\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 ①注意到

$$\sin2x=2\sin x\cos x$$

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\cdot\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}\cdot\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdot\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}$$

②原式 $=\lim_{x\to0}\{[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\cos x-1}}\}^{\frac{\cos x-1}{x^2}}=\lim_{x\to0}e^{-\frac{1-\cos x}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$

(3)用初等变形与等价无穷小代换求极限

例 11 求下列极限:

①$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$;　　②$\lim_{x\to1}\frac{\ln(1+\sqrt[3]{x-1})}{\arcsin\sqrt[3]{x-1}}$;

③$\lim_{x\to0}\frac{\ln(\sin^2x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}$;　　④$\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{\tan x}}{x-\tan x}$.

解 ①原式 $=\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{(e^{x^2}-1)(\sqrt{1+x\sin x}+1)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$

②因为当 $x\to1$ 时,$\sqrt[3]{x-1}\to0$

所以 $\ln(1+\sqrt[3]{x-1})\sim\sqrt[3]{x-1}$,$\arcsin\sqrt[3]{x-1}\sim\sqrt[3]{x-1}$

原式 $=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}}=1$

③原式 $=\lim_{x\to0}\frac{\ln(\sin^2x+e^x)-\ln e^x}{\ln(x^2+e^{2x})-\ln e^{2x}}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\frac{\sin^2x}{e^x})}{\ln(1+\frac{x^2}{e^{2x}})}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin^2x}{e^x}}{\frac{x^2}{e^{2x}}}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{x^2}\cdot e^x=1$

④原式 $=\lim_{x\to0}\frac{e^{\tan x}(e^{x-\tan x}-1)}{x-\tan x}=\lim_{x\to0}e^{\tan x}=1$

注 做乘除运算时尽量用等价无穷小代换,做加减运算最好不用等价无穷小代换,因为后者掌握不好"度"易出错.

(4)用洛必达法则求极限

例 12 求下列极限:

①$\lim_{x\to1}\frac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}$;　　②$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x(e^{t^2}+t^2-1)^2dt}{x(\arcsin x)^4}$;

③$\lim_{x\to0^+}(\tan x)^{\sin x}$;　　④设 $f(x)=\int_{x^2}^{x}\frac{\sin xt}{t}dt$,求 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}$;

⑤$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$.

解 ①原式 $=\lim_{x\to1}\frac{\ln[1+(\cos(x-1)-1)]}{\cos(x-1)-1}\cdot\frac{\cos(x-1)-1}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cos(x-1)-1}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}=\lim_{x\to 1}\frac{-\sin(x-1)}{-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x}=\lim_{x\to 1}\frac{-\cos(x-1)}{(\frac{\pi}{2})^2\sin\frac{\pi}{2}x}=-\frac{4}{\pi^2}$$

②原式 $=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x(e^{t^2}+t^2-1)^2dt}{x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{x^2}+x^2-1)^2}{5x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{2(e^{x^2}+x^2-1)(2xe^{x^2}+2x)}{20x^3}$

$=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}+x^2-1}{x^2}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}+2x}{2x}=\frac{4}{5}$

③原式 $=e^{\lim_{x\to 0^+}\sin x\ln\tan x}$，其中 $\lim_{x\to 0^+}\sin x\ln\tan x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\tan x}{\csc x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cot x\cdot sec^2x}{-\csc x\cdot\cot x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin x}{\cos^2x}$

$=0$

故原式 $=e^0=1$

④$f(x)=\int_{x^2}^{x}\frac{\sin xt}{t}dt\xlongequal{令 u=xt}\int_{x^3}^{x^2}\frac{\sin u}{u}du$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_{x^3}^{x^2}\frac{\sin u}{u}du}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot 2x-\frac{\sin x^3}{x^3}\cdot 3x^2}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x^2-3\sin x^3}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{4x\cos x^2-9x^2\cos x^3}{4x}=1$$

⑤先有理化，再用洛必达法则

原式 $=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\tan x-\sin x}{x[\ln(1+x)-x]}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}\right\}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\ln(1+x)-x}=-\frac{1}{2}$

例 13 求下列极限：

①$\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})\right]$；　　②$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\cot^2x\right)$；

③$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$；　　④$\lim_{x\to 0^+}(\arctan x)^{\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}}$.

解 ①原式 $\xlongequal{令 u=\frac{1}{x}}\lim_{u\to 0}\left[\frac{1}{u}-\frac{\ln(1+u)}{u^2}\right]=\lim_{u\to 0}\frac{u-\ln(1+u)}{u^2}$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+u}}{2u}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{2u(1+u)}=\frac{1}{2}$$

②原式 $=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2x-x^2\cos^2x}{x^2\sin^2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x\cos x}{x}\cdot\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}$

$=\lim_{x\to 0}2\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}=2\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{3x^2}=\frac{2}{3}$

③原式 $=\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{\arcsin x-x}{x}\right]^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left\{\left[1+\frac{\arcsin x-x}{x}\right]^{\frac{x}{\arcsin x-x}}\right\}^{\frac{\arcsin x-x}{x^3}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x-x}{x^3}}$

而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{3x^2\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2\sqrt{1-x^2}(1+\sqrt{1-x^2})}=\frac{1}{6}$$

故　原式 $=e^{\frac{1}{6}}$

④原式 $= e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\ln(\arctan x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x} = 0$

(5) 用泰勒公式法求极限

例 14 求下列极限:

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{x\sin x}$;

② $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{3}{2}}[\sqrt{x+2}+\sqrt{x}-2\sqrt{x+1}]$.

解 ① $\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)$

$$= (x+x^2)-\frac{1}{2}(x+x^2)^2+o(x^2)+(-x+x^2)-\frac{1}{2}(-x+x^2)^2+o(x^2)$$

$$= x^2+o(x^2)$$

因此,原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+o(x^2)}{x^2}=1$

注 $(x+x^2)^2 = x^2+2x^3+x^4 = x^2+o(x^2)\quad (x\to 0)$

②令 $x=\dfrac{1}{t}$,则

$$原式 = \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\left[\sqrt{\frac{1}{t}+2}+\sqrt{\frac{1}{t}}-2\sqrt{\frac{1}{t}+1}\right]$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt{1+2t}+1-2\sqrt{1+t}}{t^2}$$

因为

$$\sqrt{1+2t} = 1+\frac{1}{2}(2t)+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(2t)^2+o(t^2) = 1+t-\frac{t^2}{2}+o(t^2)$$

$$\sqrt{1+t} = 1+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{8}+o(t^2)$$

所以

$$原式 = \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^2}\left[1+t-\frac{t^2}{2}-2(1+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{8})+1+o(t^2)\right] = -\frac{1}{4}$$

(6)用定积分定义求极限

例 15 求下列极限:

① $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$;

② $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right)$;

③ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\dfrac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

解 ①因为 $\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}}=\sqrt[n]{\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{2}{n}\cdots\dfrac{n}{n}}=e^{\frac{1}{n}\ln(\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdots\frac{n}{n})}=e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(\frac{i}{n})}$,而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(\frac{i}{n}) = \int_0^1\ln x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1\ln x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[[x\ln x]_\varepsilon^1-\int_\varepsilon^1 dx\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} (-\varepsilon \ln \varepsilon - x \Big|_{\varepsilon}^{1}) = -1$$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$.

② 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{1 + \left(\dfrac{i}{n}\right)^2} = \int_0^1 \dfrac{1}{1+x^2} dx = \dfrac{\pi}{4}$

③ $\dfrac{1}{n+1} \sum\limits_{i=1}^{n} 2^{\frac{i}{n}} \leqslant \dfrac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1} + \dfrac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\dfrac{1}{2}} + \cdots + \dfrac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\dfrac{1}{n}} \leqslant \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} 2^{\frac{i}{n}}$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} \sum\limits_{i=1}^{n} 2^{\frac{i}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} \cdot \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} 2^{\frac{i}{n}} = \int_0^1 2^x dx = \dfrac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^1 = \dfrac{1}{\ln 2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} 2^{\frac{i}{n}} = \int_0^1 2^x dx = \dfrac{1}{\ln 2}$

所以，由夹逼准则知：原式 $= \dfrac{1}{\ln 2}$.

(7)用中值定理求极限

例 16 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_n^{n+p} \dfrac{\sin x}{x} dx = 0 \qquad (p > 0)$

证 由于函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $[n, n+p]$ 上连续，根据积分中值定理得

$$\int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\sin \xi_n}{\xi_n} p, \qquad n \leqslant \xi_n \leqslant n+p$$

当 $n \to \infty$ 时，$\xi_n \to \infty$，而 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x} p = 0$，故

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{\xi_n \to\infty} \frac{\sin \xi_n}{\xi_n} p = 0$$

例 17 已知在 $(-\infty, +\infty)$ 上的可导函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = A$，计算极限

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - f(x-a)}{a} \qquad (a \neq 0).$$

解 由于 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导，因而在 $[x-a, x]$ 或 $[x, x-a]$ 上也可导，在该区间上用拉格朗日中值定理得

$$f(x) - f(x-a) = f'(\xi) a \qquad (\xi \text{ 在 } x \text{ 与 } x-a \text{ 之间})$$

当 $x \to \infty$ 时，$\xi \to \infty$，从而有

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - f(x-a)}{a} = \lim_{\xi\to\infty} f'(\xi) = \lim_{x\to\infty} f'(x) = A$$

即

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - f(x-a)}{a} = A$$

求极限还有其他类型的问题，如无穷小的比较、极限的局部逆问题等等.

例 18 证明 $x + x^2 \sin \dfrac{1}{x} - 4x^4 = x + o(x) \qquad (x \to 0)$

证 因为 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin \dfrac{1}{x} - 4x^4}{x} = \lim\limits_{x\to 0} (x \sin \dfrac{1}{x} - 4x^3) = 0$