明清河 主编

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 3y + \sin t \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y - 2\cos t \end{cases}$$

常微分方程的思想与方法

◎ 孙肖丽 杨艳萍 著

山东大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程的思想与方法/孙肖丽,杨艳萍著.
—济南:山东大学出版社,2010.5
(数学分支的思想方法丛书/明清河主编)
ISBN 978-7-5607-4081-2

Ⅰ.①常…
Ⅱ.①孙…②杨
Ⅲ.①常微分方程—研究
Ⅳ.①O175.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 081091 号

山东大学出版社出版发行
(山东省济南市山大南路 27 号　邮政编码:250100)
山 东 省 新 华 书 店 经 销
济南景升印业有限公司印刷
850×1168 毫米　1/32　4.125 印张　102 千字
2010 年 5 月第 1 版　2010 年 5 月第 1 次印刷
定价:10.00 元

《数学分支的思想方法丛书》

编 委 会

总 序

数学科学是在历史上逐渐形成和发展起来的一种知识系统.这个知识系统是由一个个分支组成的,同时各个分支间又相互联系、相互交叉、相互作用,从而产生新的分支,促进数学的发展与壮大.

数学的每一个分支,在确立之前都有一个萌发、孕育的过程,总结和分析它们的系统发育过程、了解其思想方法的演变规律,对了解数学的发现与创新,有着重要的引导作用.当一个数学分支形成独立的体系后,其内容体系中又包含着该分支所特有的核心思想与常用方法.任何一个数学分支都是由具体的数学知识和蕴涵的思想方法构筑起来的,数学知识是它的“躯体”,思想方法则是它的“灵魂”.思想方法寓于数学知识之中,是获取知识和发展思维的动力工具.

如果将数学的教与学仅仅看成是数学知识的传授与学习,将难以发挥数学的真正作用;领会和掌握数学的思想方法和精神实质,才能真正发挥数学在现实社会中的积极作用,才能充分显示数学的无穷威力与魅力,这应该是数学教育所努力追求的目标.

数学方法论是研究数学的发展规律、数学的思想方法以及数学中的发现、发明与创新法则的一门学问.对数学分支思想

方法的研究，是数学方法论研究的一个新领域和具体方向.

关于数学分支思想方法的研究，既可以对数学分支的发现、发展、创立过程中新观念、新思想、新方法、新见解及其演变规律进行研究，又可以对数学分支内容体系中蕴涵的数学思想和方法进行研究. 其研究内容主要包括：数学分支的起源与发展，数学分支的本质和特征，数学分支与现实世界的关系，数学分支的文化地位，数学分支内部间的辩证关系与美学研究，数学分支形成过程与内容体系中的核心思想，数学分支各特定内容中的数学思想与常用方法等. 其研究方式主要有：将数学哲学、数学史、数学教育相结合，将数学思想、数学知识、数学方法相结合.

《数学分支的思想方法丛书》是作者在数学方法论指导下，结合数学教学和科学研究的实践，经过长时间探讨的辛勤劳动成果，是数学方法论研究的新领域、新成果. 本丛书主要从数学史、数学方法、数学哲学、数学教学、数学学习、数学美学等视角，对数学分支的思想方法进行研究. 将数学分支的本质、内容、思想、方法以及发展历史有机地融会在一起. 其显著特点是系统性、深刻性与思辨性，同时集知识性、思想性、故事性、史料性于一体，是提高科学文化素质和增长知识的理想读本，可作为大学数学专业的教材，亦可作为数学史研究的参考书目，并且对从事数学史、数学哲学、数学方法论的研究人员来说也有较高的参考价值.

希望本丛书的出版能对数学方法论研究领域的扩展和应用起到应有的推动作用.

王梓坤

（中国科学院院士、原北京师范大学校长）

前 言

常微分方程是高等院校数学专业学生的必修课，也是大学数学的重要组成部分，其中体现了丰富而深刻的数学思想与方法。笔者结合常微分方程教学，通过大量查阅资料，形成了本书的基本框架。

本书分为四章。第一章对常微分方程中体现的数学思想进行了较为全面的探讨和分析，具体包括常数变易的思想、近似的思想、极限的思想、构造的思想、级数的思想、化归的思想、定性分析的思想、数学建模的思想、不动点的思想、数形结合的思想等，其中常数变易等思想方法为常微分方程所特有的，对于这类方法，本书进行了较为完整的阐述，对于大学数学的其他学科也有所体现的思想方法，如构造的思想方法、不动点的思想方法等，则侧重从与其他学科的不同体现进行探讨。第二章对常微分方程中蕴含的哲学与美学思想进行了整理和论述，意在使学生从哲学和美学的角度和高度认识常微分方程。第三章提出了常微分方程学习和研究中的几类方法，包括慎思和明辨的态度、善于分类的方法、相互联系的方法、重视概念的方法和“归纳·猜测·验证”，该部分的论述旨在指出该学科学习的特点，同时使学生初步认识和掌握一般的研究思路。第四章总结了常微分方程中常用的几类解题方法，具体包括变量分离

的方法、常数变易的方法、积分因子的方法、待定系数与系数函数的方法、特征方程与特征根法、升阶和降阶的方法。该部分有对方法本身的分析和举例，旨在训练学生根据题目特点选取不同的解题方法。

目　录

第一章　常微分方程中体现的数学思想

在本章中我们主要讨论常微分方程中体现的数学思想与方法.微分方程本身即是一种重要的数学思想,初等数学中,方程研究离散变量之间的关系,常微分方程则讨论连续变量的性质.在该章中,常数变易的思想、级数的思想、定性分析的思想是常微分方程学科所特有的,是本学科学习对象的特点所决定的.构造的思想、不动点的思想是分析类学科如数学分析、常微分方程、泛函分析等所具有的,在掌握这类思想方法时,应注意两点:一是学科知识的综合运用,这是因为我们往往需要借助相关学科的知识或方法来解决常微分方程中遇到的问题;二是此类思想方法在不同学科中有着不同的体现,如构造的思想方法在数学分析中着重在于构造函数,而在常微分方程中则可以是构造函数,也可以是构造函数列,还可以是构造方程、构造解、构造参数.

§1.1　常数变易的思想

常数变易法是常微分方程学科所特有的一种方法,是连接非齐次线性微分方程与相应齐次线性微分方程的桥梁.

在微分方程发展最初期,不仅人们所认识的方程类型非常有限,所用到的解决方法也非常简单,初等积分的方法即为其中之

一，这种方法需要将不同形式的方程转化为可以积分的形式. 对于一阶齐次线性微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P(x)y$，可以用变量分离的方法得解$y=c\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}$；对于一阶非齐次线性微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P(x)y+Q(x)$，注意到其解 $y=y(x)$ 是 x 的函数表达式，所以方程右端可以写为$y\left(P(x)+\frac{Q(x)}{y(x)}\right)$（尽管此时 $y(x)$ 表达式未知），这时即可分离变量，将方程写为$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\left(P(x)+\frac{Q(x)}{y(x)}\right)\mathrm{d}x$，从而形式上可积分，得$y=\pm\,\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\cdot\mathrm{e}^{\int\frac{Q(x)}{y(x)}\mathrm{d}x}$，因为其中的 $y(x)$ 未知，所以 $\mathrm{e}^{\int\frac{Q(x)}{y(x)}\mathrm{d}x}$ 未知，可记其为 $c(x)$，即该方程的形式解为 $y=c(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}$，将该形式解代入原方程解之可得 $c(x)$ 表达式，再代入形式解可得通解. 对比非齐次线性微分方程与相应齐次线性微分方程，两者通解在形式上的差别在于后者中的常数 c 在前者中变易为函数 $c(x)$，这也正是常数变易法的思路.

常数变易法是常微分方程所特有的一个方法，较之于代数方程，微分方程之所以可以用常数变易法，是由于微分方程是以函数为未知量的方程，所以只要确定了方程解的结构，即可将结构解（即形式解）代入微分方程得解.

常数变易法同时又是直观的，对于齐次线性微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P(x)y$，其通解为$y=c\mathrm{e}^{P(x)\mathrm{d}x}$，若令其中的常数$c$变易为函数$c(x)$，则$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$可在原来形式（$P(x)y$）基础上多出一项，我们只需寻找适当的 $c(x)$，使多出的一项恰为方程的非齐次项 $Q(x)$ 即可.

常数变易法在一阶微分方程中的应用非常简单，即只需如上分析将相应齐次线性方程通解中的常数 c 变易为函数 $c(x)$，而在高阶微分方程中的应用则要复杂得多. 考虑 $x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots$

$+a_n(t)x=f(t)$，若对其进行直接的常数变易，即将其相应齐次线性微分方程 $x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=0$ 的通解 $\sum\limits_{i=1}^{n}c_ix_i(t)$ 中的 c_i 变为 $c_i(t)$，$i=1,2,\cdots,n$，代入原方程后产生的第一个问题是一个等式中出现 n 个未知函数，即为不定方程，第二个问题是等式中出现了 $c_i(t)$ 的 0 阶至 n 阶导函数，即形式上较原方程更为复杂. 为解决第一问题，我们可以在原方程基础上附加 $n-1$ 个条件使之定解. 具体如何加条件，可考虑第二个问题，我们可以做如下分析：常数变易后，$x'(t)=\sum\limits_{i=1}^{n}c_i'(t)x_i(t)+\sum\limits_{i=1}^{n}c_i(t)x_i'(t)$，为避免 $x''(t)$ 中出现 $c_i''(t)$，可令第一个附加条件为 $\sum\limits_{i=1}^{n}c_i'(t)x_i(t)=0$，此时，$x(t)=\sum\limits_{i=1}^{n}c_i'(t)x_i'(t)+\sum\limits_{i=1}^{n}c_i(t)x_i''(t)$，为避免 $x'''(t)$ 中出现 $c_i''(t)$，可令附加的第二个条件为 $\sum\limits_{i=1}^{n}c'(t)x_i'(t)=0$，依次继续，得第 $n-1$ 个附加条件为 $\sum\limits_{i=1}^{n}c_i'(t)x_i^{(n-2)}(t)=0$. 代入原方程，得 $\sum\limits_{i=1}^{n}c_i'(t)x_i^{(n-1)}(t)=f(t)$. 考虑这 n 个等式所组成的方程组：

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{i=1}^{n}c_i'(t)x_i(t)=0,\\
\sum\limits_{i=1}^{n}c_i'(t)x_i'(t)=0,\\
\cdots\\
\sum\limits_{i=1}^{n}c_i'(t)x_i^{(n-2)}(t)=0,\\
\sum\limits_{i=1}^{n}c_i'(t)x_i^{(n-1)}(t)=f(t);
\end{cases}
$$

该方程组系数行列式为$W[x_1(t),\cdots,x_n(t)]\neq 0$,所以必存在唯一的$c_1'(t),\cdots,c_n'(t)$,积分可得$c_1(t),\cdots,c_n(t)$,代入形式解可得原方程的通解.

例 1-1 求解方程$x'(t)-x(t)=\mathrm{e}^t$.

解 先求解相应齐次线性微分方程$x'(t)-x(t)=0$,得其解为

$$x(t)=C\mathrm{e}^t.$$

令原方程通解形如$x(t)=C(t)\mathrm{e}^t$,代入原方程,得$C'(t)=1$,即

$$C(t)=t+C.$$

从而原方程通解为

$$x(t)=t\mathrm{e}^t+C\mathrm{e}^t(C\in R).$$

例 1-2 用常数变易法求解方程$x''-x=\cos t$.

解 易求相应奇次线性微分方程通解为$x(t)=c_1\mathrm{e}^t+c_2\mathrm{e}^{-t}$.令原方程通解形如$x(t)=c_1(t)\mathrm{e}^t+c_2(t)\mathrm{e}^{-t}$,如上分析附加条件并代入方程,得

$$\begin{cases}c_1'(t)\mathrm{e}^t+c_2'(t)\mathrm{e}^{-t}=0,\\c_1'(t)\mathrm{e}^t-c_2'(t)\mathrm{e}^{-t}=\cos t,\end{cases}$$

解之,得

$$\begin{cases}c_1'(t)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\cos t,\\[2ex]c_2'(t)=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{t}\cos t,\end{cases}$$

积分,得

$$\begin{cases}c_1(t)=-\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-t}(\cos t-\sin t)+k_1,\\[2ex]c_2(t)=-\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{t}(\cos t+\sin t)+k_2.\end{cases}$$

k_1,k_2为任意常数.所以原方程通解为

$$x(t)=k_1\mathrm{e}^t+k_2\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{2}\cos t\ (k_1,k_2\text{ 为任意常数}).$$

在求解非齐次线性方程组时也经常用到常数变易法，常用的有两种形式：第一种是化为纯量的常数变易，即对于 $X' = A(t)X + F(t)$，先考虑相应齐次线性方程组 $X' = A(t)X$，记其通解为 $X(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i(t)$（$n$ 为 X 的维数），可令原方程通解为 $X(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t) X_i(t)$，代入原方程，得关于 $c_i'(t)$ 的方程组 $\sum_{i=1}^{n} c_i'(t) X_i(t) = F(t)$. 由于 $X_1(t),\cdots,X_n(t)$ 线性无关，故 $c_i'(t)$ 可求且唯一，进一步积分得 $c_i(t)$，代入形式解得通解. 第二种是直接作为向量的常数变易，记 $X' = A(t)X$ 的基解矩阵为 $\Phi(t)$，寻求 $X' = A(t)X + F(t)$ 形如 $\varphi(t) = \Phi(t)C(t)$ 的解（其中 $C(t)$ 为待定的向量函数），代入原方程组，得 $\Phi(t)C'(t) = F(t)$，从而 $C(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)F(s)\mathrm{d}s$，$t_0, t \in [a,b]$，所以向量函数 $\varphi(t) = \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)F(s)\mathrm{d}s$ 是原方程满足初始条件 $\varphi(t_0) = 0$ 的解.

例 1-3　用常数变易法求解方程组 $\begin{cases} X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ X(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$

解　先考虑相应齐次线性方程组

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X,$$

易求其特征根为 $\lambda = 1$（二重）.

用待定系数法求其两个线性无关解

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} t\mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}, X_2(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

所以相应齐次线性方程组通解为

$$X(t)=\begin{pmatrix}c_1te^t+c_2e^t\\ c_1e^t\end{pmatrix}.$$

下求解给定方程组：

方法一　用纯量的常数变易法

寻求原方程形如 $X(t)=\begin{pmatrix}c_1(t)te^t+c_2(t)e^t\\ c_1(t)e^t\end{pmatrix}$的通解.

代入原方程,得

$$\begin{pmatrix}c_1'(t)te^t+c_2'(t)e^t\\ c_1'(t)e^t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{-t}\\ 0\end{pmatrix},$$

解之,得

$$c_1'(t)=0,c_2'(t)=e^{-2t},$$

积分,得

$$c_1(t)=k_1,c_2(t)=-\frac{1}{2}e^{-2t}+k_2.$$

原方程组通解为

$$X(t)=\begin{pmatrix}k_1te^t+k_2e^t-\dfrac{1}{2}e^{-t}\\ k_1e^t\end{pmatrix},$$

代入初始条件,得解

$$X(t)=\begin{pmatrix}te^t-\dfrac{1}{2}e^t-\dfrac{1}{2}e^{-t}\\ e^t\end{pmatrix}.$$

方法二　用向量的常数变易法

相应齐次线性方程组的基解矩阵为

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix}e^t & te^t\\ 0 & e^t\end{pmatrix},$$

可求

$$\Phi^{-1}(s)=\begin{pmatrix}e^{-s} & -se^{-s}\\ 0 & e^{-s}\end{pmatrix},$$

所以满足初始条件 $X(0)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ 的解为

$$X_0(t)=\begin{pmatrix}e^t & te^t\\0 & e^t\end{pmatrix}\int_0^t\begin{pmatrix}e^{-s} & -se^{-s}\\0 & e^{-s}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-s}\\0\end{pmatrix}ds=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})\\0\end{pmatrix},$$

又 $\Phi(0)=E$,所以相应齐次线性方程组满足初始条件

$$\varphi(0)=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

的解为

$$\varphi(t)=\Phi(t)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(t-1)e^t\\e^t\end{pmatrix},$$

从而原初值问题的解为

$$X(t)=X_0(t)+\varphi(t)=\begin{pmatrix}te^t-\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})\\e^t\end{pmatrix}.$$

常数变易法作为常微分方程中一个特别而重要的方法,究其实质,是一种转化的方法,即将求解未知函数 $x(t)$ 或向量函数 $X(t)(x_i(t)(i=1,2,\cdots,n))$ 的问题转化为求解未知函数 $c(t)$ 或向量函数 $C(t)$(也可记为 $c_i(t)(i=1,\cdots,n)$). 应用该方法的关键在于确定原方程(组)的形式解.

§1.2　近似的思想

常微分方程是大学数学中与生活实践联系最为直接和密切的学科之一,而现实生活往往是复杂多样的,要将其归结为以精确性为其主要特征的数学分科,近似思想起到了非常重要的作用.

首先,要构造的方程是近似的,即用来描述物理过程的微分方程以及由试验测定的初始条件往往是近似的. 其中微分方程中的

近似主要体现在两个方面：一是系统中变量的个数是近似的，换言之，为了保证模型的简单化，我们往往略掉一些次要因素而只保留主要的影响因素．例如在研究摆的振动规律时，因为事实上没有绝对的刚体，所以严格来讲也应该考虑到链子的变形，但在实际构造数学模型时，该变量往往略去不计．二是方程本身的近似，即事实上每个影响因素的影响方面可能是多样的，但在模型化的过程中，往往略去次要方面的影响使模型简单化和理想化．例如在发声器方程 $\rho l\,\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\dfrac{kps}{v}x$ 的推导过程中，我们略去了容器颈部空气的压缩性而只考虑其运动性，同时略去容器中空气的运动性而只考虑其压缩性．由此可以看到，在由实际问题进行数学建模（即得方程）的过程中，我们的主要任务是如何找到尽可能简单的同时又可以很好的描述其中变量关系的微分方程，而那些使得问题繁杂不堪且事实上影响又很小的因素可以忽略不计．

近似思想在微分方程中的第二个体现是有关解的定量计算．在微分方程发展初期，人们致力于精确解的寻找，即寻求方程初等函数或初等函数积分形式的解，但可以如此求解的方程是非常有限的．1841 年，刘维尔证明了即使是形式上很简单的李卡蒂方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+ay^2=x^2(a>0)$，其解也无法用初等函数或其积分表示，在这种情况下，可以应用于一般方程的求近似解的方法就具有了非常重要的意义，而且从理论上来讲，近似解在一定条件下可以达到任意要求的精确度，这样就从一定程度上满足了实际的需要．

求近似解的方法一般有两种，即用逐步逼近列求近似解析解的方法和数值计算求近似数值解的方法．前者在理论证明中有着重要的作用，而后者有更广泛的应用性．以一般的一阶微分方程初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$$